

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Univ.-Prof. DI Dr. Ernst Stadlober

Institut für Statistik

Steyrergasse 17/IV

Technische Universität Graz

e.stadlober@tugraz.at

www.stat.tugraz.at/stadl/

30. Oktober 2006

Allgemeines zur Lehrveranstaltung

Grundlagenfach im 3. Semester mit 3 VU (4.5 ECTS)

Welches Wissen braucht man?

Analysis (Differential- und Integralrechnung)
ein bisschen *Lineare Algebra*

Was ist das Ziel?

Lernen des *stochastischen Denkens*
Lösung *einfacher wahrsch.-theoretischer Fragen*
Anwendung *gängiger stochastischer Modelle*

Wie wird vorgetragen?

Problemorientierte Darstellung mit Overhead und Tafel

Was wird verlangt?

Lösung von *Übungsaufgaben* bei 4 Übungstests
Schriftliche Prüfung

Welche Unterlagen gibt es?

Umfangreiches Skriptum mit Aufgaben (ca. 190 Seiten)

Was versteht man unter Zufall?

Zufallsexperiment

= *Experiment mit zufälligem Ausgang*

1. Alle möglichen Ausgänge des Experiments bekannt

Würfelexperiment: Werfen der Zahlen 1 bis 6

2. Konkreter Ausgang ist unvorhersehbar

Welche Zahl kommt als nächstes?

3. Experiment ist wiederholbar

Jeder Wurf unter gleichen Bedingungen

4. Vorhersehbares Langzeitverhalten

Oftmaliges Würfeln:

Jede Zahl kommt ungefähr gleich häufig vor

Laplace-Experimente (1)

Alle Ausgänge des Zufallsexperiments
sind *gleich wahrscheinlich*

Beispiel: Geburtstagsproblem

Geburtstage sind übers Jahr zufällig verteilt

Überraschendes Ergebnis

- Zufallsauswahl von 23 Personen:

$$P(\text{mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag}) =$$

0.51

- Zufallsauswahl von 50 Personen:

$$P(\text{mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag}) =$$

0.97

Laplace-Experimente (2)

Beispiel: Hash-Tabellen

Zufällige Belegung eines Feldes der Länge n mit r Datensätzen so, dass *keine Doppelbelegung* (Kollision)?

- Länge $n = 1024$ $r = 37$ Daten:

$$P(\text{keine Kollision}) =$$

0.52

- Länge $n = 1024$ $r = 10$ Daten:

$$P(\text{keine Kollision}) =$$

0.96

Mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiel: Produktion von CD-Playern

1. Stufe: Aufteilung in 2 Gruppen

Gutproduktion

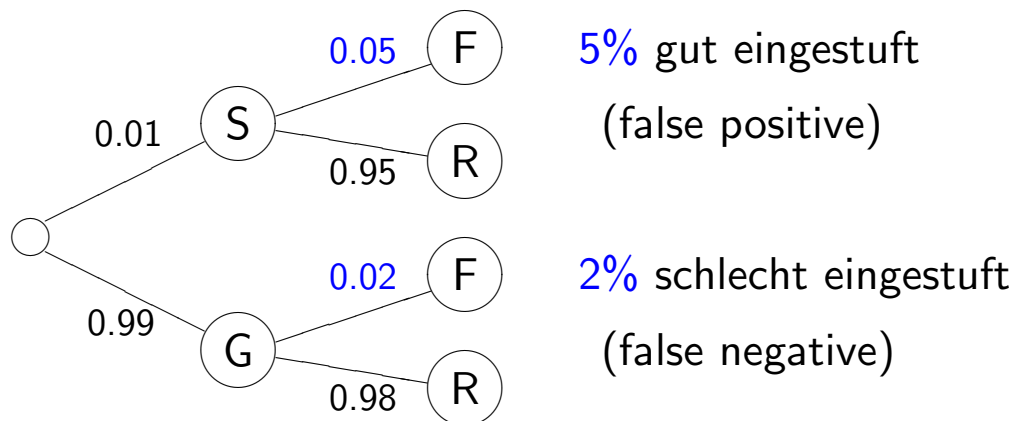
Schlechtproduktion

2. Stufe: Ergebnis der Qualitätskontrolle

richtig klassifiziert

falsch klassifiziert

Wahrscheinlichkeitsbaum



$P(\text{Qualitätskontrolle liefert falsche Einstufung}) =$

0.0203

$P(\text{gut eingestufte CD-Player ist aus Gutproduktion}) =$

0.9995

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable unterliegen *stochastischen Änderungen*

Beschreibung durch

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zwei Typen von Zufallsvariablen

Zählvariable	Messvariable
$X = k$ diskrete Grösse	X stetige Grösse
Anzahl von Defekten	Messfehler
Anzahl von Kunden	Lebensdauer
Anzahl von Verkehrsunfällen	Inflationsrate

Diskrete Verteilungsmodelle (1)

Binomialverteilung

$X = \text{Anzahl der Erfolge}$

bei n unabhängigen Versuchen

jeder Versuch: Erfolg oder Misserfolg

Erfolgswahrscheinlichkeit p

Beispiel: Platzreservierung im Flugzeug

Flugzeug mit 220 Plätzen

Reservierungen für 230 Plätze

93% der Reservierungen werden genutzt.

$X = \text{Anzahl Personen, die erscheinen}$

- $n = 230, p = 0.93$

$P(\text{alle Personen erhalten einen Platz}) =$

0.956

Diskrete Verteilungsmodelle (2)

Poissonverteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse

Beispiel: Zugsunfälle

$X = \text{Anzahl der Zugsunfälle pro Kalenderwoche}$

Kleine Zeitung 1. März 2002:

Kontrolle über den Zufall

Szenario

Durchschnittlich 20 Unfälle pro Jahr

$P(\text{in einer Kalenderwoche genau 3 Unfälle}) =$

0.29

Interpretation

Alle $3\frac{1}{2}$ Jahre gibt es eine *Unglückswoche*,
wo binnen 7 Tagen 3 Unfälle passieren

Stetige Verteilungsmodelle (1)

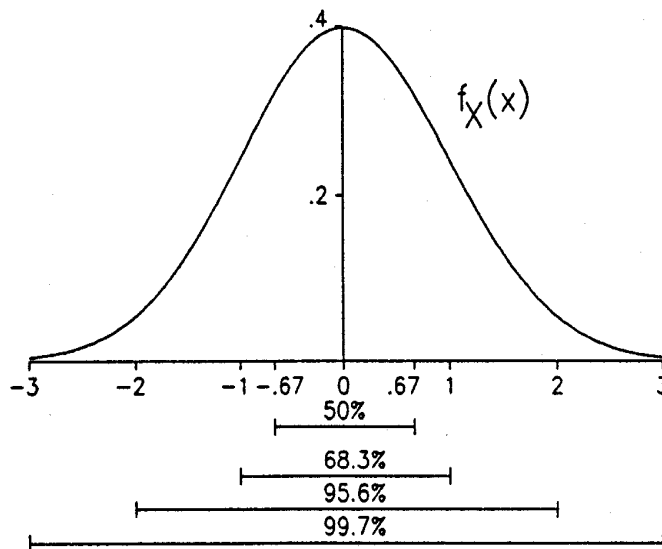
Normalverteilung

X = Abweichung vom Sollwert

X ist symmetrisch um den Sollwert verteilt

Sollwert = 0, Streubreite = 1

Gauß'sche Glockenkurve



$P(\text{Abs. Abweichung vom Sollwert kleiner als zwei Streubreiten}) =$

0.956

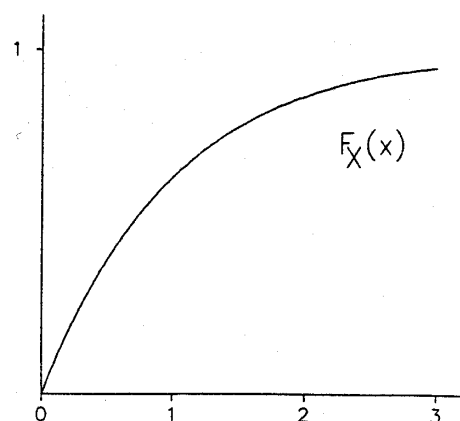
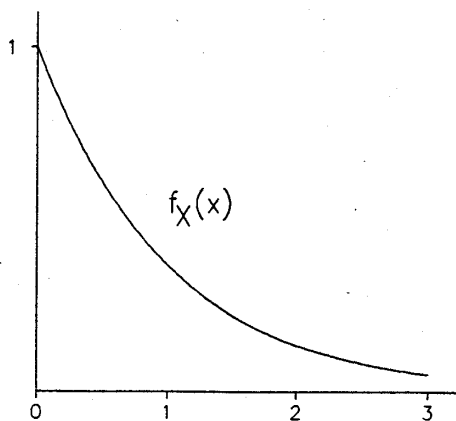
Stetige Verteilungsmodelle (2)

Exponentialverteilung

$X = \text{Lebensdauer eines Produkts}$

Überlebenswahrscheinlichkeit wird
im Laufe der Zeit geringer

mittlere Lebensdauer = 1, Streubreite = 1



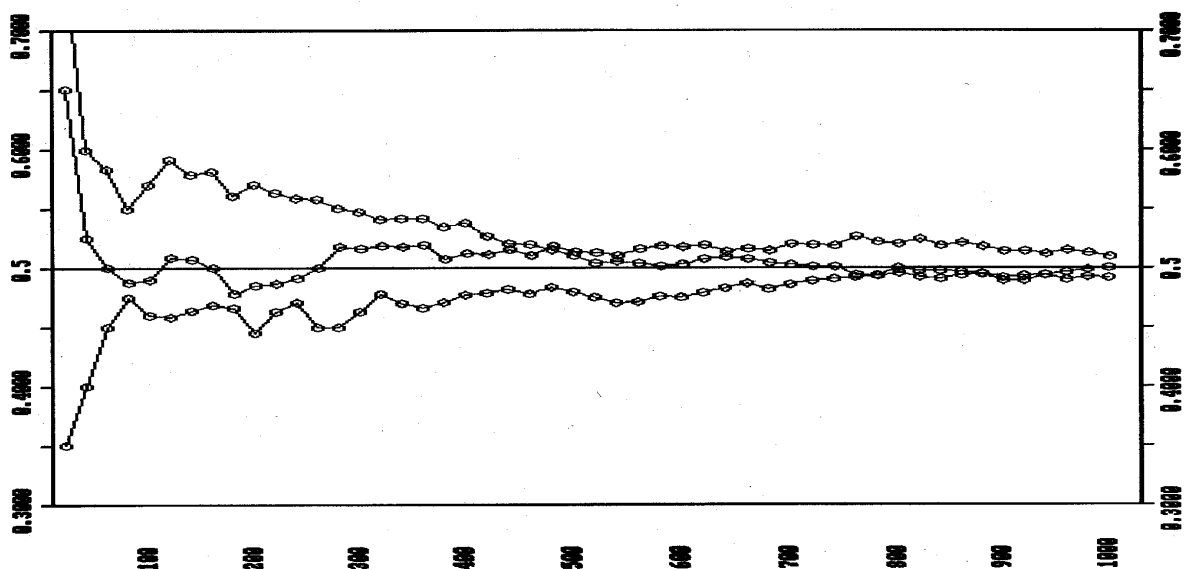
Wahrscheinlichkeitsdichte kum. Wahrscheinlichkeiten

$P(\text{Lebensdauer ist länger als mittlere Lebensdauer}) =$

0.368

Stochastisches Langzeitverhalten

Die **relative Anzahl der Erfolge**
bei n unabhängigen Versuchen
strebt **stochastisch** gegen die
Erfolgswahrscheinlichkeit p



- Drei Simulationen des Münzexperiments
- Relative Häufigkeiten für Auftreten von *Wappen* nähern sich dem Wert $p = \frac{1}{2}$

Stochastische Prozesse (1)

Zufallsvariable $X = X_t$ abhängig von der Zeit t

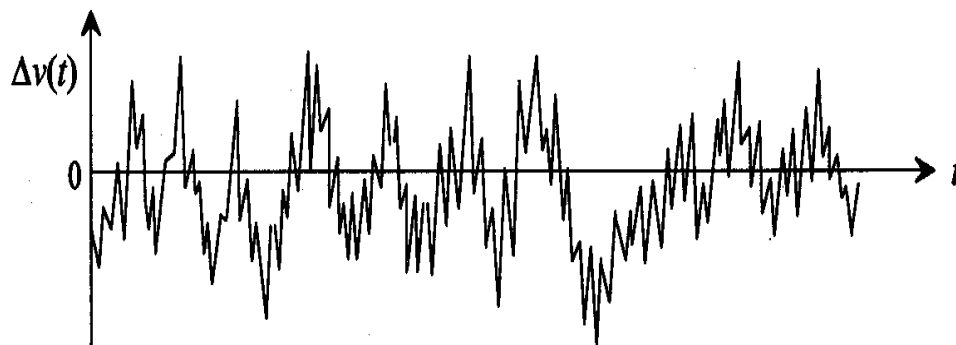
Allgemeinere Zufallsexperimente

Beispiel: Elektrischer Schaltkreis

Spannung unterliegt Schwankungen

Typischer Verlauf dieser Schwankungen

$\Delta v(t)$ um einen Nennwert

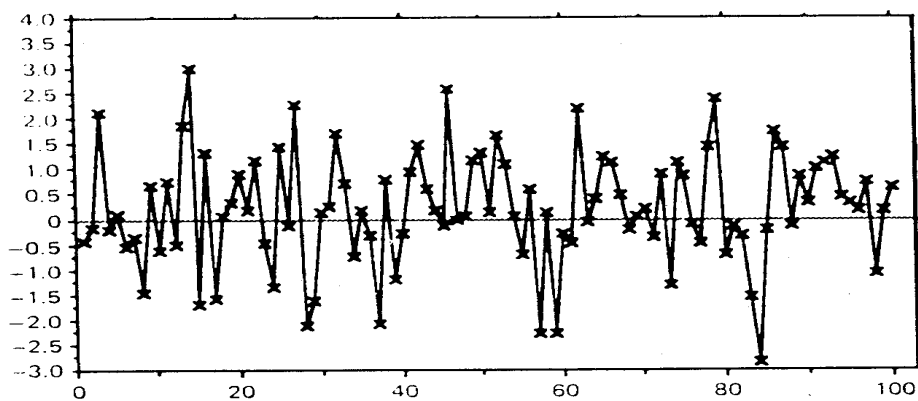


Stochastische Prozesse (2)

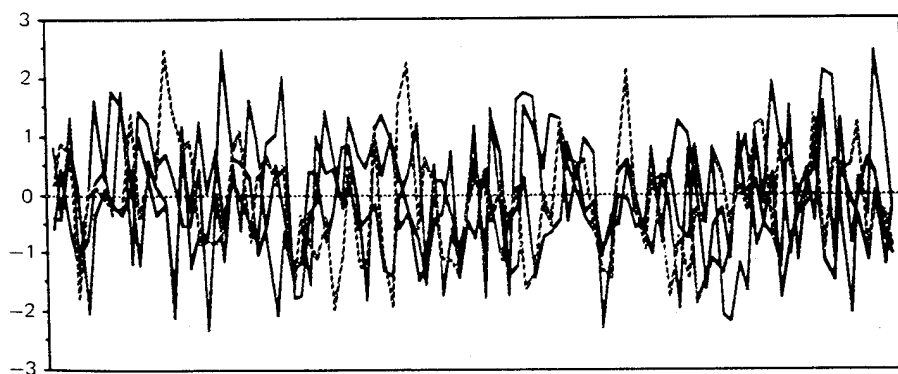
Beispiel: Weißes Rauschen

Stochastisches Modell für zufällige Signale

1 Pfad: 100 simulierte Beobachtungen



4 Pfade: je 100 simulierte Beobachtungen



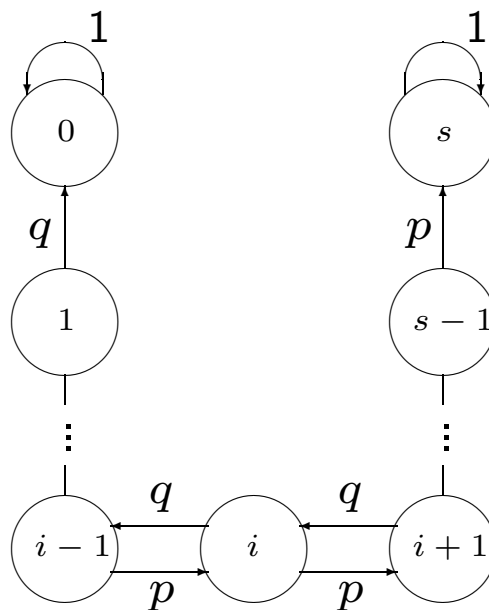
Markov–Ketten

Künftige Entwicklung nur von Gegenwart,
nicht von Vergangenheit abhängig

Zustand X_{n+1} hängt nur von $X_n = i$ ab.

Beispiel: Ruin–Problem

Darstellung durch **Übergangsgraphen**



- Nach wie vielen Schritten erreicht man
Zustand 0 (Ruin) oder Zustand s (Gewinn)?