Wahrscheinlichkeitstheorie
und
Stochastische Prozesse

Univ.-Prof. DI Dr. Ernst Stadlober

Institut für Statistik

Steyrergasse 17/IV

Technische Universität Graz

stadlober@stat.tu-graz.ac.at

www.cis.tugraz.at/stat/stadl/

24. November 2003

Allgemeines zur Lehrveranstaltung

Grundlagenfach im 3. Semester mit 3 VU (4.5 ECTS)

Welches Wissen braucht man?

Analysis (Differential- und Integralrechnung)
ein bisschen *Lineare Algebra*

Was ist das Ziel?

Lernen des *stochastischen Denkens*

Lösung *einfacher wahrsch.-theoretischer Fragen*

Anwendung *gängiger stochastischer Modelle*

Wie wird vorgetragen?

Problemorientierte Darstellung mit Overhead und Tafel

Was wird verlangt?

Lösung von *Übungsaufgaben mit Präsentation*

Schriftliche Prüfung

Welche Unterlagen gibt es?

Neues Skriptum mit Aufgaben (ca. 190 Seiten)

Was versteht man unter Zufall?

Zufallsexperiment

= *Experiment mit zufälligem Ausgang*

1. Alle möglichen Ausgänge des Experiments bekannt
   Würfelexperiment: Werfen der Zahlen 1 bis 6

2. Konkreter Ausgang ist unvorhersehbar
   Welche Zahl kommt als nächstes?

3. Experiment ist wiederholbar
   Jeder Wurf unter gleichen Bedingungen

4. Vorhersehbares Langzeitverhalten
   Oftmaliges Würfeln:
   Jede Zahl kommt ungefähr gleich häufig vor

Laplace-Experimente (1)

Alle Ausgänge des Zufallsexperiments
sind *gleich wahrscheinlich*

Beispiel: Geburtstagsproblem

Geburtstage sind übers Jahr zufällig verteilt

Überraschendes Ergebnis

- Zufallsauswahl von 23 Personen:

$$P(\textit{mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag}) =$$

$$\boxed{0.51}$$

- Zufallsauswahl von 50 Personen:

$$P(\textit{mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag}) =$$

$$\boxed{0.97}$$

Laplace-Experimente (2)

Beispiel: Hash-Tabellen

Zufällige Belegung eines Feldes der Länge n mit r Datensätzen so, dass *keine Doppelbelegung* (Kollision)?

- Länge $n = 1024$ $r = 37$ Daten:

$$P(\textit{keine Kollision}) =$$

$$\boxed{0.52}$$

- Länge $n = 1024$ $r = 10$ Daten:

$$P(\textit{keine Kollision}) =$$

$$\boxed{0.96}$$

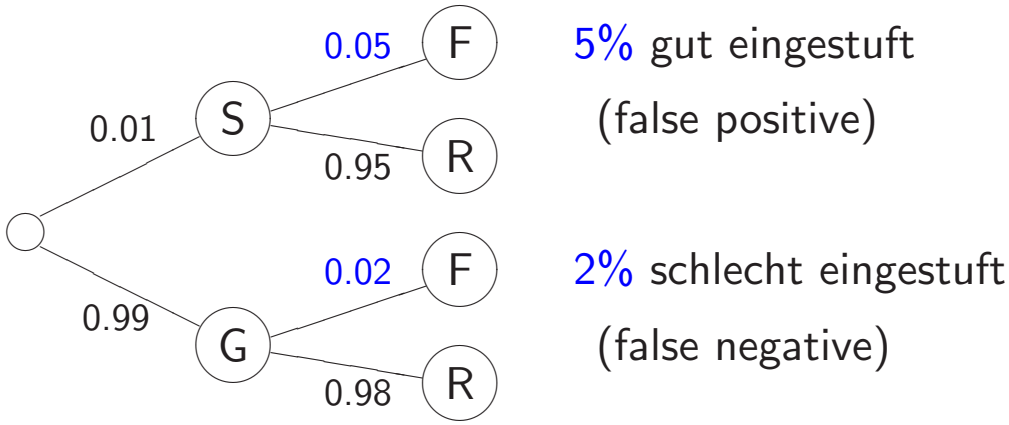
Mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiel: Produktion von CD-Playern

1. Stufe: Aufteilung in 2 Gruppen
Gutproduktion *Schlechtproduktion*

2. Stufe: Ergebnis der Qualitätskontrolle
richtig klassifiziert *falsch klassifiziert*

Wahrscheinlichkeitsbaum



5% gut eingestuft
(false positive)

2% schlecht eingestuft
(false negative)

$$P(\textit{Qualitätskontrolle liefert falsche Einstufung}) =$$

$$\boxed{0.0203}$$

$$P(\textit{gut eingestufter CD-Player ist aus Gutproduktion}) =$$

$$\boxed{0.9995}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable unterliegen *stochastischen Änderungen*

Beschreibung durch

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zwei Typen von Zufallsvariablen

Zählvariable	**Messvariable**
$X = k$ diskrete Grösse	X stetige Grösse
Anzahl von Defekten	Messfehler
Anzahl von Kunden	Lebensdauer
Anzahl von Verkehrsunfällen	Inflationsrate

Diskrete Verteilungsmodelle (1)

Binomialverteilung

$X =$ *Anzahl der Erfolge*
bei n unabhängigen Versuchen

jeder Versuch: Erfolg oder Misserfolg

Erfolgswahrscheinlichkeit p

Beispiel: Platzreservierung im Flugzeug

Flugzeug mit 220 Plätzen

Reservierungen für 230 Plätze

93% der Reservierungen werden genutzt.

$X =$ *Anzahl Personen, die erscheinen*

- $n = 230$, $p = 0.93$

$$P(\textit{alle Personen erhalten einen Platz}) =$$

$$\boxed{0.956}$$

Diskrete Verteilungsmodelle (2)

Poissonverteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse

Beispiel: Zugsunfälle

$X =$ *Anzahl der Zugsunfälle pro Kalenderwoche*

Kleine Zeitung 1. März 2002:

Kontrolle über den Zufall

Szenario

Durchschnittlich 20 Unfälle pro Jahr

$$P(\textit{in einer Kalenderwoche genau 3 Unfälle}) =$$

$$0.29$$

Interpretation

Alle $3\frac{1}{2}$ Jahre gibt es eine *Unglückswoche*,
wo binnen 7 Tagen 3 Unfälle passieren

Stetige Verteilungsmodelle (1)

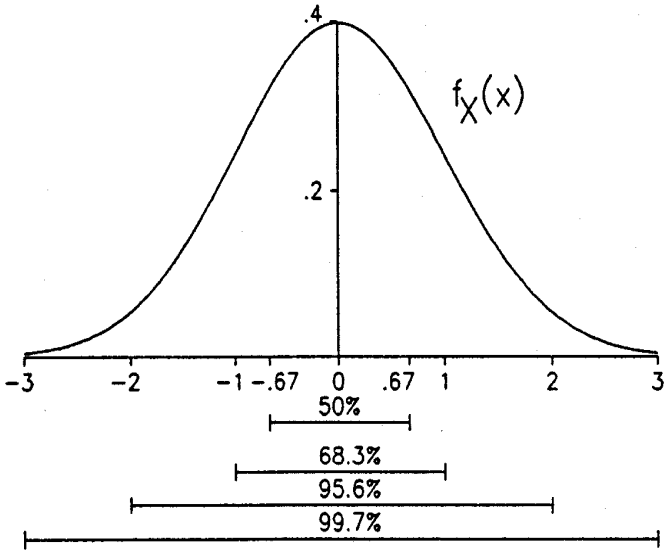
Normalverteilung

$X =$ *Abweichung vom Sollwert*

X ist symmetrisch um den Sollwert verteilt

Sollwert $= 0$, Streubreite $= 1$

Gauß'sche Glockenkurve



$P($*Abs. Abweichung vom Sollwert kleiner als zwei Streubreiten*$) =$

0.956

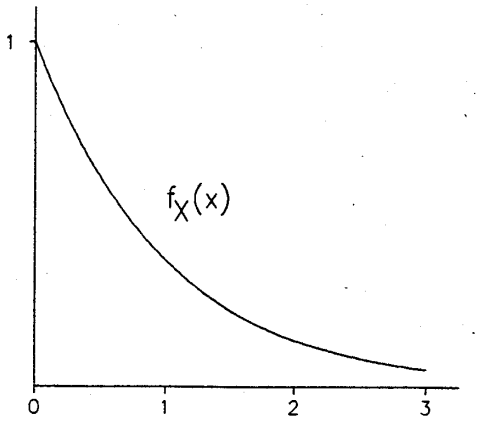
Stetige Verteilungsmodelle (2)

Exponentialverteilung

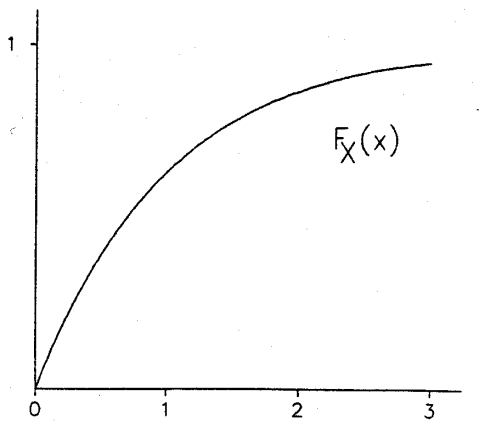
$X =$ *Lebensdauer eines Produkts*

Überlebenswahrscheinlichkeit wird
im Laufe der Zeit geringer

mittlere Lebensdauer $= 1$, Streubreite $= 1$



Wahrscheinlichkeitsdichte



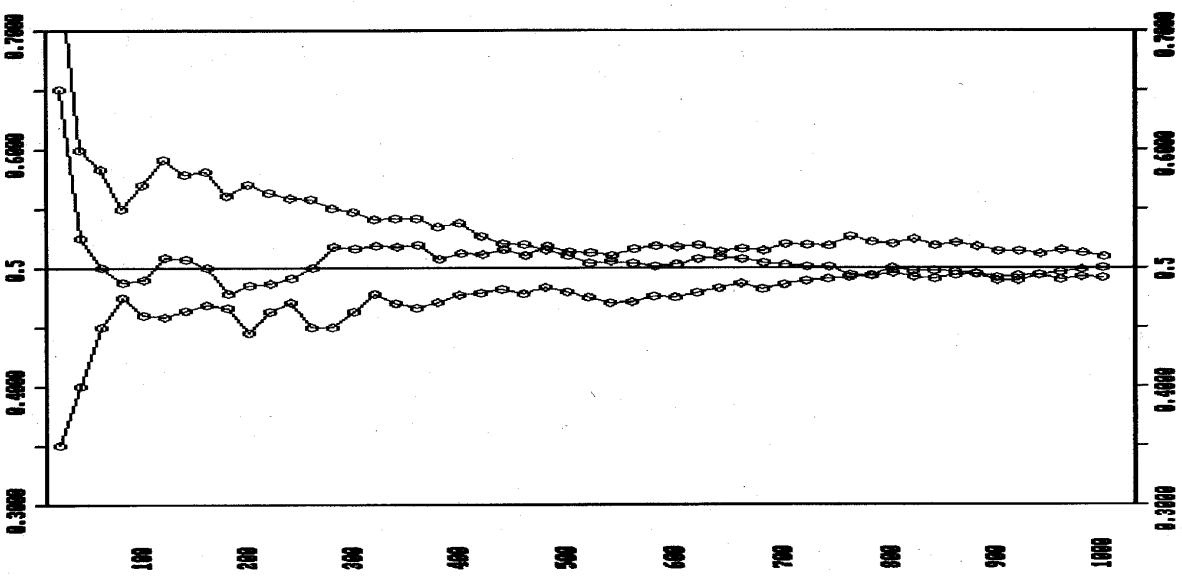
kum. Wahrscheinlichkeiten

$P($*Lebensdauer ist länger als mittlere Lebensdauer*$) =$

0.368

Stochastisches Langzeitverhalten

Die relative Anzahl der Erfolge
bei n unabhängigen Versuchen
strebt stochastisch gegen die
Erfolgswahrscheinlichkeit p



- Drei Simulationen des Münzexperiments
- Relative Häufigkeiten für Auftreten von *Wappen* nähern sich dem Wert $p = \frac{1}{2}$

Stochastische Prozesse (1)

Zufallsvariable $X = X_t$ abhängig von der Zeit t

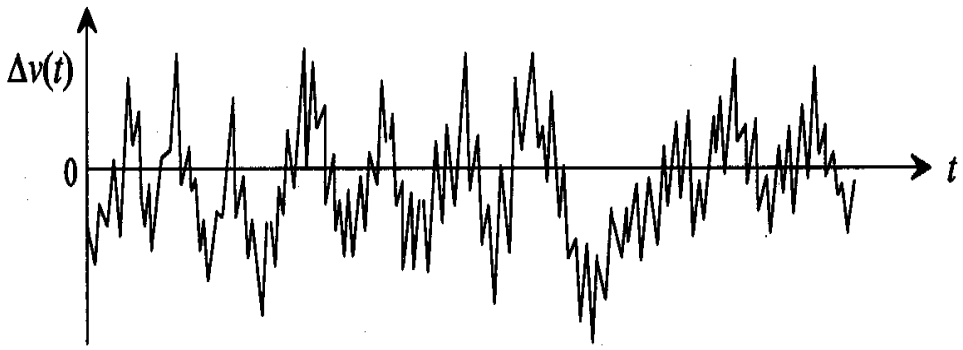
Allgemeinere Zufallsexperimente

Beispiel: Elektrischer Schaltkreis

Spannung unterliegt Schwankungen

Typischer Verlauf dieser Schwankungen

$\Delta v(t)$ um einen Nennwert

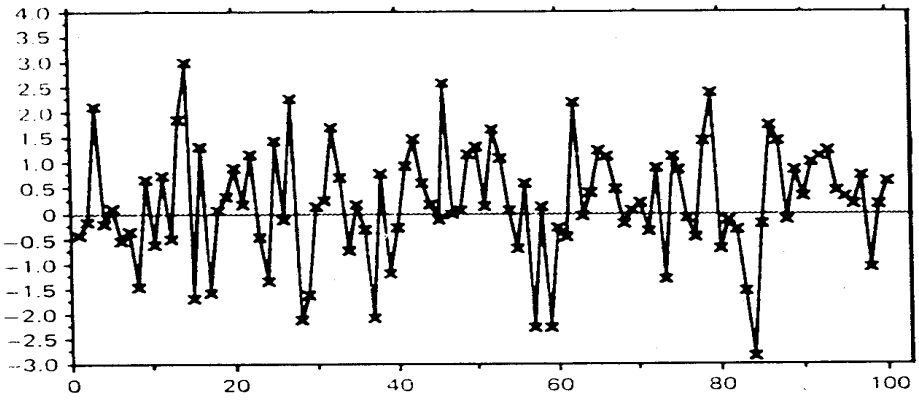


Stochastische Prozesse (2)

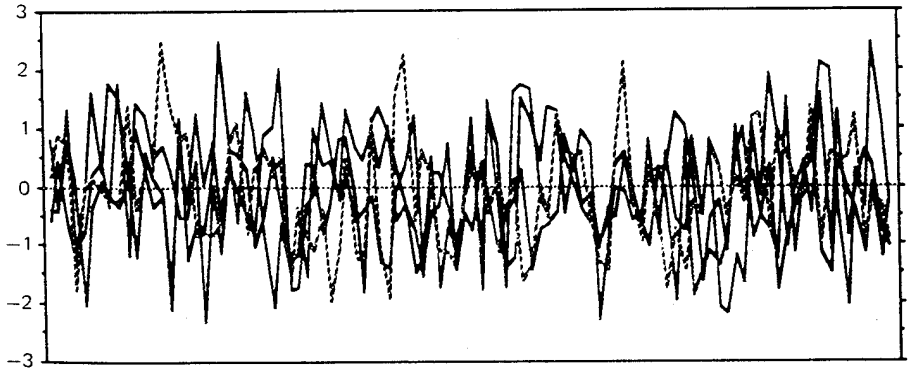
Beispiel: Weißes Rauschen

Stochastisches Modell für zufällige Signale

1 Pfad: 100 simulierte Beobachtungen



4 Pfade: je 100 simulierte Beobachtungen



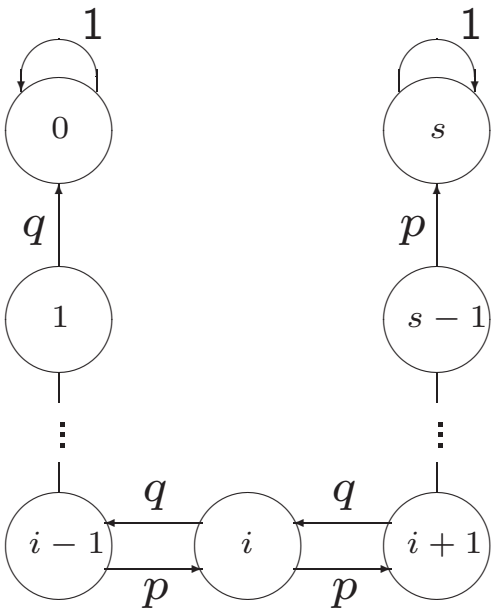
Markov–Ketten

Künftige Entwicklung nur von Gegenwart,
nicht von Vergangenheit abhängig

Zustand X_{n+1} hängt nur von $X_n = i$ ab.

Beispiel: Ruin–Problem

Darstellung durch **Übergangsgraphen**



- Nach wie vielen Schritten errreicht man

  Zustand 0 (Ruin) oder Zustand s (Gewinn)?