

Mathematische Statistik – Übungen: Blatt 3

1. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, **nicht identisch verteilte** Zufallsvariablen mit Dichten

$$f_{X_i}(x|\theta) = \begin{cases} e^{i\theta-x}, & x \geq i\theta, \\ 0, & x < i\theta. \end{cases}$$

Zeige, dass $T = \min_i (X_i/i)$ eine suffiziente Statistik für θ ist.

2. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ -Population. Finde eine (zweidimensionale) suffiziente Statistik für (α, β) .
3. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer $\text{Normal}(\theta, a\theta)$ -Population mit $0 < \theta$ und bekannter Konstante $0 < a$.

(a) Prüfe, ob dieses Modell zur Exponentialfamilie gehört?

(b) Zeige, dass die Statistik $T = (\bar{X}, S^2)$ eine suffiziente Statistik für θ ist.

4. Ein Beispiel aus der *Genetik* ist folgendes Multinomial-Modell. Betrachte hierbei die vektorwertige Zufallsstichprobe $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$, $i = 1, \dots, n$, aus der Multinomial-Verteilung mit Zellwahrscheinlichkeiten $(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{\theta}{4})$ für $\mathbf{x}_i$ mit $x_{ij} \in \{0, 1\}$ und $\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1$.

(a) Ist dieses Modell aus der Exponentialfamilie?

(b) Finde eine suffiziente Statistik für den skalarwertigen Parameter θ .

(c) Finde eine minimal suffiziente Statistik für θ .

5. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer *Inversen Gauß-Verteilung* (*Wald-Verteilung*) mit Dichte

$$f(x|\mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right), \quad 0 < x, \mu, \lambda < \infty.$$

Zeige, dass die Statistiken

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{und} \quad T = n \left(\sum_{i=1}^n X_i^{-1} - \bar{X}^{-1} \right)^{-1}$$

suffizient für (λ, μ) sind.

6. Es liege genau **eine** Beobachtung x für die auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ diskret verteilte Zufallsvariable X vor. X habe Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x|\theta)$, $\theta \in \{1, 2, 3\}$. Bestimme den MLE $\hat{\theta}$.

x	$f(x 1)$	$f(x 2)$	$f(x 3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/4
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

7. Die Zufallsstichprobe $X_1, \dots, X_n$ stamme aus einer Verteilung mit

$$P(X \leq x | \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ (x/\beta)^\alpha & \text{falls } 0 \leq x \leq \beta, \\ 1 & \text{falls } x > \beta \end{cases}$$

mit positiven Parametern α und β .

- (a) Finde eine suffiziente Statistik für (α, β) .
- (b) Finde den MLE für (α, β) .
- (c) Die Länge von Kuckuckseiern in *mm* wird damit modelliert. Berechne die Maximum Likelihood Schätzung bei Vorliegen der 14 Beobachtungen

22.0, 23.9, 20.9, 23.8, 25.0, 24.0, 21.7, 23.8, 22.8, 23.1, 23.1, 23.5, 23.0, 23.0

8. Beweise Satz 2.1.3 über suffiziente Statistiken bei der Exponentialfamilie.

9. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer Population mit Dichte $f(x|\theta)$. Zeige: die Maximierung von $L(\theta|\mathbf{x})$ bzgl. θ ist äquivalent mit der Maximierung von $\log L(\theta|\mathbf{x})$.

10. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ -verteilten Population.

- (a) Finde den MLE $\hat{\beta}$ von β bei bekanntem α .
- (b) Falls α und β unbekannt sind gibt es keine explizite Form für die MLEs, jedoch kann das Maximum **numerisch** gefunden werden. Verwende das Ergebnis von (a), um dieses Maximierungsproblem auf die Maximierung einer eindimensionalen Funktion zu reduzieren. Finde die MLEs $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ für die beobachteten Längen der $n = 14$ Kuckuckseiern.
- (c) Berechne die Schätzer auch nach der Momenten-Methode und vergleiche deren Werte mit denen der Maximum-Likelihood Schätzung.