Mathematische Statistik – Übungen: Blatt 1

1. Farbenblindheit tritt mit 1% in einer bestimmten Population auf. Wie groß muss eine Stichprobe daraus sein, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest eine farbenblinde Person darin enthalten ist, zumindest 0.95 ist? (die Population sei gross genug, sodass das Stichprobenziehen als *Ziehen mit Zurücklegen* betrachtet werden kann).

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ stetige, unabhängige Zufallsvariablen jeweils mit marginaler Dichte $f(x)$, welche die jährlichen Niederschlagsmengen an einem bestimmten Ort beschreiben. Finde die Verteilung der Anzahl an Jahren bis die Regenmenge des ersten Jahres, X_1, erstmals überschritten wird.

3. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und mit $\mathrm{E}(X) = \mu$. Finde die Verteilung von $\sum_{i=1}^n Y_i$, für

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i > \mu, \\ 0 & \text{falls } X_i \leq \mu. \end{cases}$$

4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Dichte $f_X(x)$, und bezeichne $\overline{X}$ das Stichprobenmittel. Zeige, dass gilt

$$f_{\overline{X}}(x) = n f_{X_1+\cdots+X_n}(nx),$$

sogar wenn die Momentenerzeugende Funktion von X nicht existiert.

5. Zeige, dass für einen beliebigen Zufallsvektor $X_1, \ldots, X_n$ (nicht notwendigerweise eine Zufallsstichprobe) gilt

$$\mathrm{var}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

6. Wie ist das Stichprobenmittel $\overline{X}$ verteilt, falls $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer

   (a) Negativ-Binomial(r, p) Verteilung,

   (b) Gamma(α, β) Verteilung.

7. Zeige, dass jede der folgenden Familien eine Exponentialfamilie ist:

   (a) Die Gammafamilie mit entweder α oder β als bekanntem Parameter, oder beide unbekannt,

   (b) Die Negativ-Binomialfamilie mit bekanntem Parameter r, und $0 < p < 1$.