**Prüfung aus**

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
# Telematik

13. 10. 2000

---

**1)** Zwei Freunde, Daniel und Thomas, nehmen am Graz–Marathon teil. Sie schließen mit Florian ein Wette ab und gewinnen diese Wette, wenn beide eine Zeit unter 4 Stunden laufen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Daniel (Thomas) eine Zeit unter 4 Stunden läuft, beträgt $\frac{2}{3}(\frac{1}{2})$. Die Wahrscheinlichkeit, dass *zumindest einer* von den beiden dieses Ziel schafft betrage $\frac{5}{6}$.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen sie die Wette? (2P)

(b) Man stelle die Ereignisse *Daniel erreicht eine Zeit unter 4 Stunden* und *Thomas erreicht eine Zeit unter 4 Stunden* in einem Mengen–diagramm dar. (2P)

(c) Man nehme an, dass sie die Wette verloren haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren beide daran schuld (keiner erreicht eine Zeit unter 4 Stunden)? (4P)

(d) Verlieren Daniel und Thomas die Wette, dann müssen sie an Florian ATS 100,– bezahlen. Wieviel müssten sie bei einem Gewinn vom Wettpartner Florian erhalten, damit die Wette fair ist? (2P)

---

**2)** Bei einer Reederei weiß man, dass im Mittel 7% der Personen, die sich einen Platz auf einer bestimmten Fähre reservieren lassen, nicht erscheinen. Um die Zahl der nicht genutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für eine Fähre mit 220 Plätzen 230 Reservierungen vorgenommen.

(a) Sei $X$ = Anzahl der Personen, die einen Platz reserviert haben und zur Abfahrt erscheinen. Dabei nehme man an, dass die Reservierungen unabhängig von einander vorgenommen wurden. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X$? Wie lauten $E(X)$ und $Var(X)$? (4P)

(b) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle zur Abfahrt erschei–nenden Personen, für die ein Platz reserviert wurde, auch einen Platz erhalten, durch die Normalverteilung. (3P)

(c) Wie viele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit *mindestens* 0.99 beträgt? (3P)

---

**3)** Zwei Spieler, Jörg und Wolfgang, ziehen nacheinander aus einer Lostrommel mit 6 Kugeln (4 schwarze, 2 blaue) abwechselnd eine *Kugel ohne Zurücklegen.* Jörg beginnt. Wer zuerst eine blaue Kugel zieht, hat gewonnen.

(a) Stellen Sie das Spiel durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar. (2P)

(b) Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_J$, dass Jörg gewinnt? (4P)

(c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen $X =$ *Anzahl der Ziehungen* an. (4P)

---

**4)** Ein technisches System $S$ bestehe aus zwei Komponenten $K_1$ und $K_2$, deren Lebensdauern $X_1$ und $X_2$ *exponentialverteilt* sind mit den Parametern $\lambda_1$ und $\lambda_2$. Zunächst arbeitet $S$ nur mit $K_1$; erst wenn $K_1$ ausfällt, springt $K_2$ ein (*System mit kalter Reserve*). Dann wird die Lebensdauer von System $S$ beschrieben durch $Z = X_1 + X_2$, wobei $X_1$ und $X_2$ unabhängige Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Dichte $f_Z(z)$ von $Z$ für $\lambda_1 = \lambda_2$ und für $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (7P)

(b) Wie lauten $E(Z)$ und $Var(Z)$? (3P)

---

**5)** Die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch POISSON($\lambda$)–verteilt.

(a) Bestimmen Sie den Maximum–Likelihoodschätzer $\hat{\lambda}_n$ von $\lambda$. (5P)

(b) Berechnen Sie $E(\hat{\lambda}_n)$ und $Var(\hat{\lambda}_n)$. (3P)

(c) Zeigen Sie, dass der ML–Schätzer $\hat{\lambda}_n$ konsistent ist. (2P)

---

**6)** Aus einer Weinlieferung eines steirischen Weinbauern wird eine Stichprobe von $n = 20$ Flaschen entnommen, wobei sich eine mittlere Füllmenge von $\overline{x} = 0.65$ [l] ergibt. Die Füllmenge werde als normalverteilt mit $\sigma_0 = 0.10$ [l] angenommen.

(a) Man ermittle ein einseitiges oberes Konfidenzintervall für $\mu$ zum Niveau 95%. (2P)

(b) Ist aufgrund dieser Stichprobe die Behauptung des Weinbauern, die Füllmenge der Flaschen betrage im Mittel *mindestens* 0.7 [l] auf dem Niveau 5% (1%) zu verwerfen? (4P)

(c) Man berechne den Fehler 2. Art für $H_1$: $\mu_1 = 0.62$ [l], falls $\alpha = 0.05$. (4P)

---