Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

30. 11. 2001

---

1) Eine Firma entwickelt einen Hepatitis-Schnelltest. Es wird davon ausgegangen, dass 0.1% der Personen einer Region den Hepatitis-Virus haben. Falls eine Person an Hepatitis erkrankt ist, dann fällt der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.95 positiv aus. Falls sie nicht erkrankt ist, kommt es mit Wahrscheinlichkeit 0.85 auch zu einem negativen Testergebnis. Man entscheidet sich für die folgende Vorgangsweise: Bei einem positiven Ergebnis wird derselbe Test nochmals wiederholt und das Ergebnis des zweiten Tests als Befund angesehen. Bei einem negativen Ergebnis wird nicht weiter getestet.

(a) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Wahrscheinlichkeiten auf. (2P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Testergebnis negativ. (5P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person tatsächlich krank, obwohl das Testergebnis negativ ausfällt (false negative). (3P)

2) Bestimmen Sie die Konstanten a und b derart, dass gilt: $P_X(X \leq a) = 0.3$ $P_X(X \geq b) = 0.4$, falls die Zufallsvariable X

(a) exponentialverteilt mit $\lambda = 1/3$ (3P)

(b) $N(3,2)$–verteilt (4P)

(c) gleichverteilt auf $[-2,8]$. (3P)

3) Die Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cx^3(3-x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (2P)

(b) Wie lautet die Dichte $f_X(x)$? (2P)

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$. (4P)

(d) Wie lautet $P_X(0.8 \leq X \leq 1.5)$? (2P)

4) Die 3. Auflage des Skriptums besteht aus 100 Blättern und 2 festen Einbanddeckeln aus Karton. Die Papierdicke der Blätter sei $N(10,2)$–verteilt und die Kartondicke sei $N(30,6)$–verteilt [*Meßeinheiten in* $\frac{1}{100}$ *mm*].

(a) Welche Verteilung besitzt die Dicke eines Buches *mit* Einband?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese zwischen 10 mm und 11 mm? (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 100 Blätter dünner als 9.5 mm sind? (3P)

(c) Die Skripten werden in Schachteln mit einer Innenhöhe von 245 mm aufbewahrt. Wieviel Skripten kann die Sekretärin in eine Schachtel geben, sodass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.5 nicht überfüllt ist? (3P)

Hinweis: Bitte Maßstäbe beachten!

5) Bei einer Flaschenabfüllmaschine in einer obersteirischen Brauerei wird regelmäßig überprüft, ob die mittlere Füllung $\mu_0 = 500\,[cm^3]$ beträgt. Anhand einer Stichprobe von $n = 25$ Flaschen soll entschieden werden, ob die Maschine neu eingestellt werden muss. Aus Erfahrung weiß man, dass die Füllmengen X_i, $i = 1, \dots, 25$, normalverteilt sind mit den Parametern μ und σ.

(a) Angenommen man weiß $\sigma = 4$ und beobachtet einen Mittelwert von $\bar{x} = 498.5$. Muß aufgrund dieses Resultats die Maschine neu eingestellt werden? (3P)

(b) Man nehme nun an, dass die Standardabweichung aus den Daten geschätzt wurde und einen Wert von 3.8 ergab. Wie lautet nun die Entscheidung der Brauerei? (4P)

(c) Wie lauten für (a) und (b) die zweiseitigen 95%–Konfidenzintervalle für μ? (3P)

6) Die monatlichen Lebenshaltungskosten von Telematikstudenten sei $N(\mu, 2000)$–verteilt. Von $n = 50$ zufällig ausgewählten Studenten wurden durchschnittliche monatliche Lebenshaltungskosten von S 9000,– festgestellt.

(a) Testen Sie die Nullhypothese H_0 : *die zu erwartenden mtl. Lebens–haltungskosten μ sind nicht höher als das Höchststipendium von S 8330,–* zum Niveau $\alpha = 0.05$. Wie ist zu entscheiden? (4P)

(b) Skizzieren Sie die Operationscharakteristik $1 - \beta(\mu)$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn die tatsächlichen Lebenshaltungskosten S 9000,– betragen. (6P)