Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik Telematik

13. 11. 1998

1) Ein Würfel sei wie folgt verfälscht: Die Augenzahlen 1 bis 5 treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf; die Wahrscheinlichkeit *6 zu werfen*, ist das Fünffache der Wahrscheinlichkeit *1 zu werfen*. Der Würfel werde 4−mal geworfen. S_k bezeichne das Ereignis $Augensumme = k$.

(a) Um welchen Faktor ist $P(S_{24})$ größer als die entsprechende Wahrscheinlichkeit für einen fairen Würfel? (3P)

(b) Man zeige, daß $P(S_6) = 2.5P(S_5)$. (3P)

(c) Berechnen Sie $P(S_{23})$ und $P(S_{22})$. (4P)

---

2) Eine Münze wird sooft geworfen, bis zum ersten Mal Wappen erscheint.

(a) Man stelle das Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar. (2P)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Wappen erscheint nicht beim ersten Wurf.
B: Die Münze wird viermal geworfen. (4P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Münzwürfe bis zum ersten Auftreten von Wappen ungerade ist? (4P)

---

3) Die Fahrgäste einer Stadtbahn (Länge b) steigen an einer zufälligen Stelle im Intervall $[0, b]$ zu. Die zufällige Einstiegstelle X besitze eine Dichte der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2(b-x) & 0 \leq x \leq b \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Konstante c. (3P)

(b) Stellen sie $f_X(x)$ für $b = 10$ graphisch dar. An welcher Stelle ist die Dichte maximal? (3P)

(c) Bestimmen Sie $E(X)$ und $P_X(X \leq 6)$ für $b = 10$. (4P)

---

4) Der Gewinn G in einer Lotterie sei wie folgt verteilt:

$G=k$	0	1	2	3	4
$P_G(G=k)$	4α	3α	2α	α	β

Bei einer Folge von $n = 50$ Spielen werden folgende Häufigkeiten n_k beobachtet:

$G=k$	0	1	2	3	4
n_k	21	16	9	3	1

(a) Berechnen Sie die Momentenschätzung für α. (5P)

(b) Berechnen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung für α und β. (5P)

Hinweis: Man beachte $(\beta + 10\alpha = 1)$.

---

5) Anhand von 11 Probanden wurde im Rahmen eines Schulversuches eine auf die individuellen Fähigkeiten der Schüler eingehende Lernmethode untersucht. Bei einem allgemeinen Test zu Beginn und am Ende des Schuljahres wurden folgende Punktezahlen erreicht:

Proband i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anfang	25	25	27	44	30	67	53	53	52	60	28
Ende	27	29	37	56	46	82	52	80	61	59	43

(a) Testen Sie die Vermutung eines positiven Effektes der Methode zum Niveau $\alpha = 0.05$. (5P)

(b) Geben Sie 95%-Konfidenzintervalle für die mittlere Punktedifferenz zwischen Ende und Anfang des Schuljahres an. (5P)

---

6) Bei einer Studie wurde die Anzahl der Keime in der Milch von zwei Lieferanten A und B gemessen. Für $n = 10$ Proben ergaben sich die Mittelwerte $\bar{x}_A = 3276$, $\bar{x}_B = 3097$ (in Tausend pro 100 mg) und Standardabweichungen $s_A = 301$, $s_B = 309$.

(a) Ist die Vermutung, daß der Lieferant A Milch mit höherer Keimzahl liefert, gerechtfertigt? Prüfen Sie auch, ob die Annahme gleicher Varianz auf Grund der beiden Stichproben haltbar ist ($\alpha = 0.05$). (6P)

(b) Geben Sie zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle für die mittleren Keimzahlen bei A und B an . (4P)
