4. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

1. (Binomial Test) Von einer Zufallsvariable $X \sim Ber(p)$, dh.

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p,$$

liegen $n=10$ unabhängige Beobachtungen vor. Untersuchen Sie den folgenden Test:

$$H_0 : p = 0.5$$
$$H_1 : p > 0.5,$$

wobei die Nullhypothese H_0 zugunsten von H_1 verworfen werden soll, wenn

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \in \{8, 9, 10\}.$$

   (a) Berechnen Sie das Niveau dieses Tests - d. h. die Wahrscheinlichkeit, H_0 zu verwerfen, obwohl H_0 wahr ist.

   (b) Geben Sie die Macht des Tests für $p = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ an.

2. (Gaußtest, t-Test) Das Gewicht X (in Gramm) von Zuchthühnern darf als normalverteilt mit unbekanntem Parameter μ und Standardabweichung $\sigma = 150[gramm]$ angesehen werden. Als Inhaber einer Kaufhauskette kaufen Sie $n = 100$ Hühner und stellen ein von $\bar{x} = 1054[gramm]$ fest. Der Lieferant behauptet, daß $\mu = 1100[gramm]$ ist. Ist diese Behauptung anzuzweifeln. Formulieren Sie einen geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ Prozent.

3. Die Weiterverarbeitung von Äpfeln in einem Betrieb, der Apfelmus herstellt, erfordert, daß der Durchmesser der Äpfel gewisse Grenzen weder unter noch überschreitet.

   (a) Der Lieferant A behauptet, daß seine Äpfel einen durchschnittlichen Durchmesser von $\mu_B = 12[cm]$ haben. Bei einer Lieferung von $n = 300$ Stück ist $\bar{x}_A = 12.4cm$ und $s_A = 2.5[cm]$. Basierend auf einem statistischen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ soll die Behauptung des Lieferanten geprüft werden.

   (b) Laut Lieferant soll die Varianz σ_A^2 kleiner als 1.8 sein. Testen Sie auch diese Behauptung zum Signifikanzniveau 0.05.

4. (Zweistichproben t-Test, Fortsetzung) Eine Lieferung von $m = 240$ Äpfeln von einem zweiten Lieferanten B ergibt $\bar{x}_B = 12.9[cm]$ und $s_B = 2.6[cm]$. Der Lieferant B möchte den Abnehmer überzeugen, daß seine Apfel einen größeren durchschnittlichen Durchmesser haben. Geben Sie einen geeigneten 2-Stichprobentest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ an. Prüfen Sie die Anwendbarkeit Ihres Tests (Gleichheit der Varianzen).

5. Seien X_i, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer stetigen Verteilungsfunktion F; weiters x_p derart, daß $F(x_p) = p$ (p-Quantil). Geben Sie für die folgenden Hypothesen einen geeigneten Test an.

$$\begin{array}{lcl} H_0 : x_p = x_0 & \text{versus} & H_1 : x_p <> x_0 \\ H_0 : x_p \leq x_0 & \text{versus} & H_1 : x_p > x_0 \\ H_0 : x_p \geq x_0 & \text{versus} & H_1 : x_p < x_0 \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Testgröße $S_n = \sum_{i=1}^n I_{[x_0,\infty)}(X_i)$.

6. Die Messung der Körpergröße bei 15 Personen ergab die folgenden Werte:

x_i	178	175	189	177	175	173	180	182	183	176	175	172	169	163	181

Testen Sie die Behauptung, der Median m betrage 178.5 zum Niveau $\alpha = 0.05$.

7. (Dualität von Konfidenzbereichen und Hypothesentests.) Sei $\theta \in \Theta$ der Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und X ein Zufallsvektor aus dieser Verteilung (die Daten!). Für jedes $\theta_0 \in \Theta$ sei $A(\theta_0)$ der Annahmebereich eines Test der Hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$. Zeigen Sie, daß durch $C(X) = \{\theta | X \in A(\theta)\}$ ein $(1-\alpha)100\%$- Prozent Konfidenzbereich für den Parameter θ gegeben ist. Sei nun umgekehrt $C(X)$ ein $(1-\alpha)100\%$ - Konfidenzbereich für den Parameter θ. Dann ist ein Test zum Signfifikanzniveau α für die Hypothese $\theta = \theta_0$ durch den

$$A(\theta_0) = \{X : \theta_0 \in C(X)\}$$

gegeben.

8. Die Anzahl der Besucher einer kleinen Büchermesse verteile sich wie folgt auf die Wochentage

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
n_i	120	127	119	114	164	182	179

(a) Testen Sie die Hypothese $N = (N_1, \ldots, N_7) \sim MULT(p = (1/7, \ldots, 1/7), n = 1005)$. zum Signifikanzniveau 0.01.

(b) Ein Marketingexperte stellt folgende Vermutung auf: $N \sim Mult((p, p, p, p, p, r, q), n = 1005)$. Prüfen Sie seine Behauptung zum Signifikanzniveau 0.01.

9. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe aus einer Verteilung mit Verteilungsfunktion F. Es soll die Hypothese

$$H_0 \quad : \quad F = 1 - \exp(-\lambda x), x > 0, \tag{1}$$

getestet werden (d.h. das Vorliegen einer Exponentialverteilung.)

(a) Bilden Sie die Klassen $(0,1], (1,2], (2,3], (4,\infty)$ und leiten Sie den ML–Schätzer für die gruppierten Beobachtungen her? Wie lautet der ML–Schätzer für die ungruppierten Daten.

(b) Die Waiting Daten enthalten $n = 150$ Beobachtungen von Wartezeiten in einer Bankfiliale (in Minuten). Testen Sie die Hypothese (1) mittels χ^2-Anpassungstest. Sind alle Vorssetzungen erfüllt. Was ergibt sich bei Verwendung des ML-Schätzers für die ungruppierten Daten?

(c) Prüfen Sie diese Hypothese mittels KS–Test. (Verwenden Sie ein Softwarepaket dafür.)

(*ftp://statistik.tu-graz.ac.at/angstat/data/waiting.txt*)