# 3. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

1. (ML-Schätzung bei Multinomialverteilung) Sei $X$ ein Zufallsvektor der $m$ verschiedene Werte mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, \ldots, p_m$ annimmt. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} X$. Berechnen Sie den ML-Schätzer für $(p_1, \ldots, p_m)$. Sind die Schätzer erwartungstreu?

2. Gegeben sei ein Zufallsvektor $X$ und eine Stichprobe vom Umfang $n = 30$, und zwar wie folgt:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $r$ | $p$ | $q$ | $r$ |
| $y_1, \ldots, y_4$ | 12 | 4 | 6 | 8 |

   Ermitteln Sie die ML-Schätzer für die Parameter $p$,$q$,$r$.

3. Die Komponenten des Vektors $X_1, \ldots, X_n$ seien $iid$ nach $U(0, \theta)$ verteilt, $\theta > 0$.
   (a) Berechnen Sie den Momentenschätzer für $\theta$.
   (b) Berechnen Sie den ML-Schätzer für $\theta$.
   (c) Modifizieren Sie den ML-Schätzer, sodaß er erwartungstreu wird.

4. (Cramer Rao Schranke). Seien $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Dichte $f(x; \theta)$. Weiters gelten die Bedingungen von Cramer-Rao (vgl. VL-Skriptum, Kapitel Maximum Likelihood Theorie.) Mit $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ sei ein erwartungstreuer Schätzer von $\theta$ gegeben. Zeigen Sie

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{1}{n\mathrm{I}(\theta)}.$$

5. (Konfidenzintervalle bei Normalverteilung) Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$.
   (a) Geben Sie ein Konfidenzintervall $[U, O]$ mit Konfidenzniveau $1 - \alpha$ an, wobei gelte $P(\mu \leq U) = bP(\mu \geq O)$, $b > 0$.
   (b) Eine Realisation des Vektors $(X_1, \ldots, X_{100})$ ergebe die Schätzung $\bar{x} = 4.12$. Weiters sei bekannt, daß $\sigma^2 = 2$ ist. Berechnen Sie die (zweiseitigen, einseitigen) Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 0.95. Wie groß müßte $n$ sein, damit sich die Länge des Konfidenzintervalles für $\mu$ halbiert.
   (c) Sei nun $\sigma^2$ unbekannt und die empirische Varianz $s^2 = 2.24$. Geben Sie zweiseitige und einseitige Konfidenzintervalle für $\mu$ und $\sigma^2$ an ($\alpha = 0.05$).

6. (Simultane Konfidenzintervalle). Es seien $(X_1, \ldots, X_n)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ zwei voneinander unabhängige Stichprobenvektoren aus $N(\mu_x, \sigma^2)$ resp. $N(\mu_y, \sigma^2)$. Bestimmen Sie einen Konfidenzbereich für den Parametervektor $(\mu_x, \mu_y)$ zum Niveau $1-\alpha$ (z.B. das kartesische Produkt zweier Konfidenzintervalle für $\mu_x$ resp. $\mu_y$ mit geeignet gewählter Überdeckungswahrscheinlichkeit.)

7. (Berechnung eines konkreten KIV für Anteilswahrscheinlichkeiten) In einer Fabrik, in der elektronische Bauteile gefertigt werden, stellt man bei einer Routinekontrolle fest, daß von $n = 100$ Stück 23 nicht einwandrei funktionieren

   (a) Geben Sie zweiseitige und einseitige Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 0.9 an.

   (b) Wie groß muß bei gleichbleibendem (!) Anteil (von 23 %) $n$ sein, damit die Länge des zweiseitigen Konfidenzintervalles nicht größer als 0.05 ist. Wie groß muß $n$ gewählt werden, damit dies in jedem Falle gewährleistet ist.