2. Übungsblatt

Mathematische Statistik

1. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger und auf $[0, \theta]$ stetig gleichverteilter Zufallsvariablen. Bestimmen Sie α und β derart, daß

$$X = \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{und} \qquad Y = \beta \max_{i=1,\ldots,n} X_i$$

erwartungstreue Punktschätzer für θ werden. Welcher der beiden Schätzer ist der wirksamere?

2. Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x; \alpha) = \frac{1 + \alpha x}{2}, \tag{1}$$

wobei $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq \alpha \leq 1$ ist.

   (a) Leiten Sie den Momentenschätzer von α (bei Vorliegen eines Samples $(X_1, \ldots, X_n) \overset{iid}{\sim} X$) her.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Schätzers von α.

   (c) Geben Sie die Normalverteilungsapproximation für den Schätzer an.

   (d) Stellen Sie die ML-Gleichungen für den Parameter α auf. Berechnen Sie den Erwartungswert des Scores und die Fisher-Information eines iid Samples $(X_1, \ldots, X_n)$.

3. Sei T ein Schätzer für θ und $MSE(T) = E((T - \theta)^2)$ der mittlere quadratische Fehler von T. Weisen Sie nach, daß

$$MSE(T) = Var(T) + Bias(T, \theta)^2$$

gilt.

4. Capture-Recapture Problem: Sei n die (unbekannte) Größe einer Population wildlebender Tiere. Ein Biologe möchte n schätzen. Zu diesem Zweck fängt er zunächst t Tiere ein und kennzeichnet sie. Nach ihrer Freilassung wartet er eine zeitlang, um schließlich m Tiere einzufangen. Darunter seien nun r gekennzeichnete. Verwenden Sie die ML-Methode, um n zu schätzen. Sei $t = 10$, $m = 20$ und $r = 4$ - wie lautet dann Ihre Schätzung.

5. Sei $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Gamma(\alpha, \lambda)$, d.h. eine Stichprobe aus der Gammaverteilung mit Parameter α und λ mit Dichte

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x} I_{0,\infty}(x).$$

(a) Leiten Sie die Momentenschätzer für α und λ her.

(b) Sei $\mu = E(X_1)$. Reparametrisieren Sie die Dichtefunktion durch $\lambda = \frac{\alpha}{\mu}$, $\alpha = \alpha$. Wie lauten die Maximum Likelihood Gleichungen für (α, μ)?

(c) Berechnen Sie die Fisher Informationsmatrix.

(d) Berechnen Sie mittels der Newton Raphson Methode die Maximum Likelihood Schätzer für (α, μ) bei den CPU Daten. Wie lauten die Maximum Likelihood Schätzer für (α, λ)?

(e) Werten Sie die Inverse der Fisher Informationsmatrix im Maximum Likelihood Schätzer aus. (Die Wurzeln aus den Diagonalelementen dieser Matrix liefern Schätzungen für die Standardabweichung der Maximum Likelihood Schätzungen – die sog. Standardfehler.)