1. Übungsblatt aus Mathematischer Statistik

1. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Die empirische Verteilungsfunktion $F_n(x)$ wird durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i)$$

definiert.

   (a) Berechnen Sie $E(F_n(x))$, $Var(F_n(x))$.

   (b) Weisen Sie

$$F_n(x) \to F(x) \quad f.s., \forall x \in \mathbb{R},$$

   nach.

   (c) Skizzieren Sie $F(x)$ und $Var(F_n(x))$ für $X_i \sim U(0,1)$ und $n = 10$.

2. Berechnen Sie

$$Cov[F_n(u), F_n(v)] \text{ und } Cor[F_n(u), F_n(v)].$$

Interpretieren Sie Ihr Resultat.

3. Seien X und Y Zufallsvariable mit invertierbarer Verteilungsfunktion F bzw. G. Dann heißt $F^{-1}(p)$, bzw. $G^{-1}(p)$ theoret. p-Quantil von X bzw. Y. Der (theoret.) QQ-Plot ist definiert durch

$$\{(F^{-1}(p), G^{-1}(p)) | p \in (0,1)\}.$$

Konstruieren (zeichnen, berechnen) Sie den QQ-Plot für

   (a) $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim N(3,2)$.

   (b) $X \sim U(0,1)$ und $Y \sim N(0,1)$.

   (c) $X \sim U(0,1)$ und $Y \sim Exp(1)$.

   (d) Für $Y = aX + b$, wobei X eine Zufallsvariable mit invertierbarer Verteilungsfunktion F ist.

4. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und Dichte f. Die geordnete Stichprobe ist definiert durch $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$. Insbesondere ist $X_{(1)}$ das Minimum, $X_{(n)}$ das Maximum. Leiten Sie die Dichte der k-ten Ordnungsstatistik $X_{(k)}$ her.

5. Erwartungswert und die Varianz von Ordnungstatistiken.

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der k-ten Ordnungstatistik $X_{(k)}$ für unabhängige und identisch nach $U(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen.

   (b) Sei $X_1, \ldots, X_{100} \overset{iid}{\sim} Exp(1)$. Berechnen Sie eine Monte Carlo Approximation für den Erwartungswert und die Varianz von $X_{(75)}$. Welcher Simulationsumfang ist geeignet bzw. wann beginnen sich die Ergebnisse zu stabilisieren? Welchem theoretischen Quantil der Exponentialverteilung entpricht die Monte Carlo Approximation für den Erwartungswert? (Dh. erzeugen Sie B Stichproben vom Umfang 100 aus $Exp(1)$. Berechnen Sie für jede $X_{(75)}$. Das Mittel resp. die empirische Varianz aller dieser Werte ist eine Monte Carlo Approximation für den Erwartungswert und die Varianz von $X_{(75)}$. Variieren Sie B.)

6. Weisen Sie folgendes nach

   (a) U, V unabhängig $\chi^2_{n_1}$- und $\chi^2_{n_2}$-verteilt $\quad \Rightarrow \quad U + V \sim \chi^2_{n_1+n_2}$.

   (b) $T \sim t_n \Rightarrow T^2 \sim F_{1,n}$.

   (c) $X \sim F_{m,n} \Rightarrow X^{-1} \sim F_{n,m}$, $F_{m,n,1-\alpha} = \frac{1}{F_{n,m,\alpha}}$.

   Verwenden Sie dazu die bereits bekannten Resultate aus der Vorlesung.

7. Seien $(X_1, \ldots, X_m) \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n) \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$ voneinander unabhängige Zufallsvektoren.

   (a) Berechnen Sie $P(a \leq \frac{S_X^2}{\sigma^2} \leq b)$, $P(\frac{S_X^2}{S_Y^2} > c)$.

   (b) Benützen Sie Tabellen oder Programme, um diese Wahrscheinlichkeiten für $n = 30$, $m = 20$, $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 2$ auszuwerten.