Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

7. 05. 1999

1) Ein Inlineskater schafft eine schwierige Figur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.75. Stürzt er bei dieser Figur, gelingt es ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.90 unverletzt zu bleiben, und er übt weiter. Wird er beim Sturz (leicht) verletzt, verliert er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.30 die Lust; er gibt auf und genehmigt sich einen Drink im nächsten Café.

(a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum. (2P)

(b) Wie wahrscheinlich ist es, daß er *nicht* aufgibt? (2P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hört er *nach* dem Sturz auf? (3P)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der fleißig übende Inlineskater vorher bei der Figur gestürzt ist? (3P)

---

2) Die Zufallsvariable X sei

(a) POISSON–verteilt mit $\lambda = 4$, (2P)

(b) binomialverteilt mit $n = 12$, $p = 0.3$, (2P)

(c) exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{1}{4}$, (2P)

(d) normalverteilt mit $\mu = 4$, $\sigma = 2$, (2P)

(e) gleichverteilt in $(1, 6)$. (2P)

Man berechne jeweils $P_X(X \in A)$ mit $A = [1, 3) \cup [4, 6)$.

---

3) Die Zufallsvariable X besitze folgende Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x & 0 \le x \le 2 \\ d/x^2 & 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X(x)$? (2P)

(b) Berechnen Sie die Konstanten c und d unter der Voraussetzung, daß die Dichte $f_X(x)$ an der Stelle $x = 2$ stetig ist. Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (4P)

(c) Bestimmen Sie $E(X)$ und den Median $x_{0.50}$ mit $F_X(x_{0.50}) = \frac{1}{2}$. (4P)

---

4) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2}, \quad x \geq 0.$$

(a) Finden Sie den Momentenschätzer für θ. (4P)
(**Hinweis:** Bringen Sie das Integral auf die Form der vollständigen Gammafunktion).

(b) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für θ. (4P)

(c) Berechnen Sie die Schätzungen, falls folgende Stichprobenrealisation vorliegt:
0.5, 0.3, 0.9, 1.1, 1.1, 1.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.6. (2P)

---

5) Der Hersteller eines Waschmittels gibt auf der Packung ein Füllgewicht von $600g$ an. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 100$ ergab $\bar{x} = 598g$ und $s^2 = 120g^2$.

(a) Eine Konsumentenschutzorganisation äußert den Verdacht, daß das mittlere Füllgewicht geringer sein könnte. Ist dieser Verdacht begründet? ($\alpha = 0.01$)? (4P)

(b) Geben Sie ein 99%-Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht an. (2P)

(c) Wie groß ist die Macht des Tests, wenn $\sigma^2 = 100g^2$ und der wahre Mittelwert des Füllgewichts $595g$ beträgt? (4P)

---

6) Um den Effekt von Magnetfeldern auf das Wachstum zu erforschen, wurde folgender Versuch durchgeführt. 10 Käfige (mit 30 Mäusen) wurden 12 Tage lang einem starken Magnetfeld ausgesetzt. In zehn weiteren Käfigen wurden ebenfalls 30 Mäuse untergebracht, ohne einem Magnetfeld ausgesetzt zu sein. Nach Ablauf des Versuchs wurde die Gewichtszunahme der Mäuse je Käfig gemessen. Das ergab folgende 20 Werte:

Magnetfeld										
ja	22.8	10.2	20.8	27.0	19.2	9.0	14.2	19.8	14.5	14.8
nein	23.5	31.0	19.5	26.2	26.5	25.2	24.5	23.8	27.8	22.0

(a) Ist die Annahme eines negativen Einflusses von Magnetfeldern auf das Wachstum begründet ($\alpha = 0.05$)? (6P)

(b) Geben Sie 95%-Konfidenzintervalle für die mittlere Gewichtszunahme in den beiden Gruppen an. (2P)

(c) Prüfen Sie die Voraussetzungen für die Anwendung des Tests in (a) . (2P)