# Prüfung aus

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
# Telematik

# 15. 03. 2002

---

**1)** Eine Stadt wird von drei Fabriken mit Glühlampen versorgt. Die erste Fabrik liefert 30%, davon 97% fehlerfrei, die zweite Fabrik liefert 50% des Bedarfes, davon 99% fehlerfrei, die dritte Fabrik liefert 20%, davon 88% fehlerfrei.

(a) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum. (2P)

(b) Jemand kauft eine Glühlampe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie fehlerfrei? (2P)

(c) Eine Glühlampe ist fehlerhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus der zweiten Fabrik? (3P)

(d) Beim Kauf von wieviel Glühlampen muß man fürchten, mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine fehlerhafte Glühlampe erworben zu haben? (3P)

---

**2)** Eine entschlossene Minderheit kann bei einer uninteressierten Mehrheit einen unverhältnismäßig großen Einfluß ausüben:

(a) Ein Vereinsvorstand hat fünf Mitglieder. Zwei dieser fünf Mitglieder wollen einen Antrag durchbringen. Die anderen drei Mitglieder stimmen zufällig ab (zB durch Werfen einer Münze). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorschlag angenommen wird? (3P)

(b) In einer Kommission sitzen 15 Vertreter verschiedener Interessensgruppen. Die vier Vertreter zweier bestimmter Interessensgruppen wollen einen Antrag unbedingt durchsetzen. Alle übrigen Kommissionsmitglieder sind indifferent: sie fällen eine Zufallsentscheidung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Antrag angenommen wird? (3P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die in (b) genannten vier Kommissionsmitglieder durchsetzen, wenn für die Annahme des Antrags eine Zweidrittelmehrheit erforderlich ist. (Es wird wieder angenommen, dass alle übrigen Kommissionsmitglieder indifferent bleiben.) (4P)

---

**3)** Die Lebensdauer elektrischer Bauteile (in h) lassen sich durch die Zufallsvariable $X \sim \gamma(2, \lambda)$ beschreiben; d.h.:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x), x > 0.$$

Sei $\lambda = 1/1000$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_o = 400$ nicht ausfällt? (2P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 400$ und $t_2 = 600$ ausfällt (2P)

(c) Wie lauten $f_X(x), E(X)$ und $Var(X)$? (3P)

(d) Welchen Zeitpunkt $t_3$ überlebt ein Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 0.9? (Näherungslösung) (3P)

---

**4)** Ein Tetraeder mit den Augenzahlen $1, 2, 3, 4$ ist so verfälscht, dass die Augenzahlen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auftreten

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_X(X = k)$ | 1/4 | 1/4 | 1/5 | 3/10 |

Der Spieler verwendet diesen Tetraeder zusammen mit einem unverfälschten Tetraeder. Bezeichne $Y$ die Augenzahl des unverfälschten Tetraeders.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_S(S = i)$ der Augensumme $S = X + Y$. (7P)

(b) Wie lauten $E(X), E(Y), E(S)$? (3P)

---

**5)** Der diastolische Blutdruck einer bestimmen Altersgruppe sei $N(\mu, \sigma)$–verteilt. Eine Stichprobe von $n = 25$ Personen ergab einen mittleren Blutdruckwert von $\overline{x} = 75.2$ [*mm Hg*] und eine Standardabweichung von $s = 8.5$ [*mm Hg*].

(a) Wie lautet das zweiseitige 95%–Konfidenzintervall für $\mu$? Welches einseitige Konfidenzintervall würden Sie berechnen, wenn hohe Werte als gesundheitsgefährdend angesehen werden? (4P)

(b) Weicht der mittlere Blutdruck der Personen signifikant von $\mu_0 = 78$ ab? Formulieren Sie einen entsprechenden Hypothesentest mit $\alpha = 0.05$. (4P)

(c) Geben Sie ein 95%–Konfidenzintervall für $\sigma^2$ an. (2P)

---

**6)** Ein Apfelbauer möchte ein neues Sprühmittel testen, das den Ernteverlust durch Schädlingsbefall verringern soll. Zu diesem Zweck behandelt er 31 Apfelbäume mit dem neuen Sprühmittel und behandelt 21 Apfelbäume mit seinem alten Mittel. Es ergeben sich folgende Werte für den Apfelertrag in [kg].

| Apfelertrag | | | |
|---|---|---|---|
| Alt | | Neu | |
| $n$ | 21 | $m$ | 31 |
| $\bar{x}$ | 220 | $\bar{y}$ | 230 |
| $s_x$ | 16 | $s_y$ | 20 |

(a) Ist der mittlere Ertrag durch das neue Mittel signifikant höher ($\alpha = 0.05$)? (4P)

(b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen für die in (a) verwendete Teststatistik ($\alpha = 0.01$). (2P)

(c) Wie lauten zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle für $\mu_x$ und $\mu_y$. (4P)