Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik Telematik

16. 03. 2001

---

1) Eine Universität mit Zugangsbeschränkung nimmt für einen bestimmten Studienlehrgang 256 Studenten auf Grund der Ergebnisse eines Eignungstests auf. Nach dem ersten Studienjahr werden die Prüfungsergebnisse der aufgenommenen Studenten mit den Zeugnisssen des Eignungstests verglichen. Man betrachtet dabei folgende Ereignisse.

A_1 = ausgezeichneter Aufnahmetest, A_2 = sehr guter Aufnahmetest,
T_1 = sehr gute Prüfungsergebnisse, T_2 = gute Prüfungsergebnisse, T_3 = durchschnittliche Prüfungsergebnisse.
Als Häufigkeitstabelle hat man

	T_1	T_2	T_3
A_1	48	64	16
A_2	32	72	24

Für einen zufällig herausgegriffenen Studenten berechne man folgende Wahrscheinlichkeiten.

(a) $P(A_1), P(T_3)$ (2P)

(b) $P(A_2|T_1), P(T_2|A_1)$ (4P)

(c) $P(A_1|T_1 \cup T_2), P(T_2 \cup T_3|A_2)$ (4P)

---

2) Ein Würfel wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal die Augenzahl *Sechs* erscheint.

(a) Stellen Sie das Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar. (2P)

(b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_k der Zufallsvariablen $X = \#$ (Würfelversuche)? (2P)

(c) Berechnen Sie die Erzeugende Funktion $G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k$ und bestimmen Sie $E(X) = G'_X(1)$. (6P)

---

3) Die Zeitdauer T_A [min] bis eine menschliche Reaktion auf Tränengas vom Typ A bemerkbar ist, sei gammaverteilt mit den Parametern $a = 2, \lambda = \frac{1}{2}$. Die Zeitdauer T_B für Typ B ist ebenfalls gammaverteilt mit den Parametern $a = 1, \lambda = \frac{1}{4}$.

(a) Wie lauten $E(T_A)$, $E(T_B)$, $Var(T_A)$, $Var(T_B)$? (4P)

(b) Welches Tränengas hat eine höhere Wahrscheinlichkeit eine menschliche Reaktion in $(0, 1)$ (d.h. in weniger als 1 min) auszulösen? (6P)

---

4) Die gemeinsame Dichte von X, der Gesamtzeit [min] zwischen der Ankunft eines Kunden in einer Warteschlange und dem Verlassen des Systems nach der Bedienung, und Y, der Zeit [min], die ein Kunde in der Warteschlange verbringt bevor er bedient wird, ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-x^2} & 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. (4P)

(b) Wie lautet die Randdichte $f_X(x)$? (3P)

(c) Zeigen Sie, daß die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ die Dichte einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, x)$ darstellt. (3P)

---

5) Resultate einer landesweiten Studie legen nahe, daß die mittlere Bleikonzentration im Blut von Menschen zwischen 2 und 70 Jahren $14\,[\mu g/dl]$ beträgt. In einer Stichprobe von $n = 25$ Kindern einer bestimmten Region wurde eine mittlere Bleikonzentration von $\bar{x} = 17\,[\mu g/dl]$ und eine Standardabweichung von $s = 5\,[\mu g/dl]$ festgestellt.

(a) Wie lautet das einseitige 0.99-Konfidenzintervall für μ? Spricht dies für eine signifikant höhere Bleikonzentration als $\mu = 14\,[\mu g/dl]$? (4P)

(b) Geben Sie einen entsprechenden Hypothesentest für $\alpha = 0.01$ an. (3P)

(c) Ermitteln Sie einen 0.95–Konfidenzintervall für σ^2. (3P)

---

6) In einer Studie an der Purdue University (IEEE Transactions 1993) wurde bei der Produktion von Schaltkreisen die Leistungsfähigkeit von menschlichen Bedienern mit der Leistungsfähigkeit von automatisierten Systemen verglichen. Zu diesem Zweck wurden 8 simulierte Aufgaben sowohl von menschlichen Bedienern als auch vom automatisierten System behandelt. Die Leistungsfähigkeit wurde duch die Durchgangsrate *(throughput rate)*, das ist die Anzahl der guten Teile gewichtet mit der Produktqualität, gemessen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
menschl. Bediener	185	146	174	185	240	254	239	264
autom. System	180	248	186	216	269	250	282	316

(a) Stellen Sie durch einen Hypothesentest fest, ob ein signifikanter Unterschied in den Durchgangsraten besteht ($\alpha = 0.05$). (5P)

(b) Wie lautet das zweiseitige 95%-Konfidenzintervall für die Differenz der erwarteten Durchgangsraten? (5P)
