1) Eine Firma stellt ein Serienprodukt mit den Maschinen M1, M2, M3 und M4 her. Es werden 45% der Gesamtproduktion auf M1, 32% auf M2, 15% auf M3 und der Rest auf M4 hergestellt. Empirisch wurde festgestellt, dass 5% der von M1, 4% der von M2, 2% der von M3 und 6% der von M4 hergetellten Produkte fehlerhaft sind. Die insgesamt produzierten Teile werden in einem Lager gesammelt.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Lager zufällig ausgewählter Teil fehlerhaft ist. Veranschauliche dies durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum. (3P)

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerhaft erkannter Teil von M4 produziert worden ist. (3P)

(c) Berechne, wie viele Teile geprüft werden müssen, dass die Wahrscheinlichkeit, *wenigstens einen fehlerhaften* zu erhalten, mindestens 95% beträgt. (4P)

---

2) Ein Graphologe hat sich um eine Stelle beworben. Um seine Fähigkeit zu testen, werden ihm zehn Schriftproben vorgelegt, die von Ärzten und Rechtsanwälten stammen. Man will ihn anstellen, wenn er *mindestens acht der zehn* Proben identifiziert. Seine Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt 75%.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit,

(i) dass er angestellt wird,

(ii) dass er genau fünf Proben richtig beurteilt,

(iii) dass er höchstens sechs Proben richtig beurteilt. (5P)

(b) Der Graphologe wird angestellt. Nach zehn Dienstjahren stellt er fest, dass er insgesamt 6000 Gutachten angefertigt hat. Berechne, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass davon zwischen 4470 und 4580 Gutachten richtig erstellt wurden mit Hilfe der Normal-Approximation. (5P)

---

3) Die Zufallsvariable X besitze eine *Rayleigh-Verteilung* mit Dichte

$$f_X(x) = cxe^{-\frac{x^2}{4}}, x > 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (2P)

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (2P)

(c) An welcher Stelle x_0 ist $f_X(x)$ maximal? (4P)

(d) Man zeige, dass das p-te Quantil gleich $x_p = \sqrt{-4\log(1-p)}$ ist, und man gebe die Werte für die Quartile $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ und $x_{0.75}$ an. (2P)

4) Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. (2P)

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$? (3P)

(c) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$. (5P)

---

5) Ein Bäckereibetrieb erzeugt Semmeln; erfahrungsgemäß sind die *Gewichte* normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 4[g]$. Bei einer Überprüfung durch die Lebensmittelbehörde wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 50$ gezogen; es ergab sich ein Stichprobenmittelwert von $\overline{x} = 47.5\,[g]$.

(a) Wie lautet das zweiseitige 95%–Konfidenzintervall für μ? Muss der Bächermeister geschupft werden, d.h. wird $\mu_0 = 50$ vom Konfidenzintervall überdeckt? (Das *Bäckerschupfen* war bis ins 18. Jahrhundert eine Bestrafung des Bäckers wegen Verkaufs zu kleiner Produkte) (3P)

(b) Wie lautet das Konfidenzintervall in (a), wenn σ nicht bekannt und durch $s = 3.8\,g$ aus der Stichprobe geschätzt wird? (3P)

(c) Eine Maschine zur Herstellung von Präzisionsschrauben arbeitet mit einer Varianz von $\sigma^2 = 1.00\,mm^2$. Der Mittelwert der normalverteilten Schraubendurchmesser soll $3.00\,mm$ betragen. Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, damit man ein 99%-Konfidenzintervall mit der Breite $0.02\,mm$ erhält? (4P)

---

6) Anhand von 11 Probanden wurde im Rahmen eines Schulversuches eine auf die individuellen Fähigkeiten der Schüler eingehende Lernmethode untersucht. Bei einem allgemeinen Test zu Beginn und am Ende des Schuljahres wurden folgende Punktezahlen erreicht:

Proband i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anfang	30	30	32	53	36	80	64	64	62	72	33
Ende	32	35	44	67	55	98	62	96	73	71	52

(a) Testen Sie die Vermutung eines positiven Effektes der Methode zum Niveau $\alpha = 0.05$. (5P)

(b) Geben Sie 95%-Konfidenzintervalle für die mittlere Punktedifferenz zwischen Ende und Anfang des Schuljahres an. (5P)