Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

11. 06. 1999

1) In einer Maschinenfabrik werden Ersatzteile automatisch auf ihre Funktionstüchtigkeit getestet. Der Test erkennt defekte Ersatzteile mit Wahrscheinlichkeit 0.98; nicht defekte werden mit Wahrscheinlichkeit 0.03 fälschlicherweise als defekt eingestuft. Aus Erfahrung weiß man, daß 99% der produzierten Ersatzteile nicht defekt sind.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Ersatzteil als *defekt* ausgewiesen? (3P)

(b) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum! (2P)

(c) Der Test habe ein Ersatzteil als defekt ausgewiesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es ich um ein *funktionstüchtiges* Ersatzteil? (3P)

(d) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in (c), wenn die Fehleinstufungsrate von 3% auf 2% sinkt? (2P)

---

2) Eine stetige Zufallsvariable X habe die folgende Verteilungsfunktion $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3}x^3 & 0 \le x < 1 \\ x - \frac{1}{3} & 1 \le x < c \\ 1 & c \le x. \end{cases}$$

(a) Wie groß muß c sein? (2P)

(b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (2P)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und den Median $x_{0.5}$ mit $F(x_{0.5}) = \frac{1}{2}$. (3P)

(d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_X(\frac{1}{4} < X \le \frac{5}{4})$ und $P_X(X = 1)$ an. (3P)

---

3) Die gemeinsame Dichte eines Zufallsvektors sei durch

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\lambda y e^{-\lambda x}, \quad 0 \le x, 0 \le y \le 1$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\lambda > 0$ einen positiven Parameter der Dichte.

(a) Berechnen Sie Randdichten von X und von Y. (2P)

(b) Berechnen Sie weiters $E(X)$, $E(Y)$. (3P)

(c) Wie lautet die Kovarianz $Cov(X, Y)$ von X und Y. Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? (2P)

(d) Geben Sie $P_X(4 \le X \le 6)$ an. (3P)

---

4) Ein Ferienhotel an einem österreichischen Badesee hat einen Vertrag mit einem Reisebüro für ein Kontingent von 80 Betten. Aufgrund der großen Nachfrage nimmt das Reisebüro aber 84 Buchungen vor. Aus Erfahrung weiß man, daß 5% der Reservierungen nicht in Anspruch genommen werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Hotel *mindestens einen* Gast wegen Überbuchung umquartieren muß.

(a) Wie lautet die exakte Lösung? (4P)

(b) Benutzen Sie die POISSON–Verteilung als Annäherung. (3P)

(c) Welches Ergebnis liefert die Approximation durch die Normalverteilung? (3P)

---

5) In einem Krankenhaus werden 2 verschiedene Schlafmittel auf ihre Wirksamkeit hin untersucht. Bei 10 Patienten wurde die Schlafdauer am ersten Tag (ohne Schlafmittel) gemessen. Am zweiten wurde das erste, am dritten Tag das zweite Schlafmittel verabreicht. Beobachtet werden für jeden Patienten die Abweichung der Schlafdauer am zweiten bzw. dritten Tag von der Schlafdauer am ersten Tag. Es ergab sich die Tabelle

Medikament 1	3.6	1.2	0.3	-0.8	4.2	-1.3	-2.6	3.2	0.9	-0.3
Medikament 2	-0.4	0.6	4.2	1.7	-3.5	-2.1	2.4	0.9	-0.9	0.1

Bezeichne μ_1 und μ_2 die erwartete Wirksamkeit von Medikament 1 und Medikament 2.

(a) Stellen Sie durch einen Test fest, ob ein Unterschied in der Wirksamkeit der beiden Medikamente besteht ($\alpha = 0.05$). (5P)

(b) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ an. (5P)

---

6) Aufgrund von zehnmaligem Werfen mit einer Münze soll entschieden werden, ob die Hypothese, daß die Wahrscheinlichkeit p von *Kopf* gleich der Wahrscheinlichkeit von *Zahl* ist, zutrifft oder nicht. Die Entscheidungsregel lautet: Die Hypothese $H_0 : p_0 = 0.5$ wird verworfen, wenn *nie* oder *zehnmal* Kopf aufscheint.

(a) Wie groß ist der Fehler 1. Art bei diesem Test? (5P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer irrtümlichen Annahme der Hypothese $p_0 = 0.5$, falls $p = 0.3$ ist. (5P)
