# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Telematiker

## Übungsblatt 5

16. 1. 2001

---

*Familienname* *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,
— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben
— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

| | | | Pkte | T-Pkte |
|---|---|---|---|---|
| Übertrag 1. + 2. + 3. + 4. Übungsblatt | | | | |
| Aufgabe | bearbeitet | Tafel | | |
| 1 | ☐ | ☐ | | |
| 2 | ☐ | ☐ | | |
| 3 | ☐ | ☐ | | |
| 4 | ☐ | ☐ | | |
| 5 | ☐ | ☐ | | |
| 6 | ☐ | ☐ | | |
| | Gesamt 5. Übungsblatt: | | ☐ | ☐ |
| | Gesamt 1. bis 5. Übungsblatt: | | ☐ | ☐ |

**Bemerkung zu den Übungen: Aufgrund der letzten Übungen, bei welchen einige Studenten nach Abgabe des Aufgabenblattes nicht mehr anwesend waren, gilt in Hinkunft die folgende Regelung:**

1. *Für alle Studenten, die ein Übungsblatt abgeben, besteht generell* **Teilnahmepflicht** *an den Übungen.*
2. *Ein Fernbleiben wird nur akzeptiert, wenn eine* **triftige Entschuldigung** *über e-mail beim Übungsleiter vorliegt.*
3. *Die* **Anwesenheit** *wird am Anfang jeder Übungsstunde* **überprüft**. *Ein* **unentschuldigtes Fernbleiben** *führt zu einer* **negativen Bewertung** *der Übungen.*

---

**1.** $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige, identisch geometrisch verteilte Zufallsvariable, d.h. $p_k = P_{X_i}(X_i = k) = p(1-p)^k$ , $k = 0, 1, 2, \dots$ . 5 P

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n$, dass die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *negativ binomialverteilt* mit den Parametern $n$ und $p$, d.h.

$$P_{S_n}(S_n = k) = \binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^k p^n \ , k = 0, 1, 2, \dots .$$

(b) Nach **Aufgabe 3.5.(b)** lautet die Erzeugende Funktion der Zufallsvariablen $X_i$, $G_{X_i}(s) = E\left(s^{X_i}\right) = p(1-qs)^{-1}$ mit $q = 1-p$. Ermitteln Sie die Erzeugende Funktion $G_{S_n}(s)$ (i) über die Erzeugenden Funktionen der $X_i$, (ii) gemäss der Definition $G_{S_n}(s) = E\left(s^{S_n}\right)$.

(c) Berechnen Sie $E(S_n)$ und $Var(S_n)$.

**2. [Monte Carlo Integration]** Bestimmmen Sie mittels Simulation eine Approximation für das Integral 5 P

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

das ist die Fläche unter dem Viertelkreis im ersten Quadranten.

Verwenden Sie dazu das folgende **Trefferverfahren:** Bezeichne $K$ die Fläche unter der Kreislinie im ersten Quadranten. Man generiere nun eine auf dem Quadrat $R = [0,1] \times [0,1]$ gleichverteilte Folge $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ von Zufallsvektoren. Das Verhältnis

$$\hat{S}_m = \frac{\sharp\{(U_i, V_i) \in K | i = 1, \dots, m\}}{m}, \quad m \le n,$$

ist ein Schätzer für $I$.

(a) Berechnen Sie $\hat{S}_m$ für $m = 100, 200, \dots, n = 1000$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert $p$.

(b) Wiederholen Sie dieses Experiment 10 Mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch oder (besser) graphisch in Form der Pfade

$$(m, \hat{S}_m)\,, \quad m = 100, 200, \ldots, 1000$$

dar.

(c) Ein Experiment besteht aus $m$ Bernoulli-Experimenten, definiert durch die Zufallsvariable $X_i$ mit $X_i = 1$, falls $(U_i, V_i) \in K$ und 0 sonst. Nach dem ***Satz von Bernoulli*** strebt $\hat{S}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ stochastisch gegen $p$. d.h.

$$P_{\hat{S}_m}(|\hat{S}_m - p| > \epsilon) \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten durch die Normalverteilung für $\epsilon = 0.02$, $m = 100, 200, 500, 1000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

**3. [P3/6.12.96]** Eine Kiste Bockbier enthält 20 Flaschen. Das Gewicht einer vollen Flasche $F$ und einer leeren Kiste $K$ sei jeweils normalverteilt mit $\mu_F = 0.7$ [kg], $\sigma_F = 0.08$ [kg], $\mu_K = 2.0$ [kg], $\sigma_K = 0.2$ [kg]. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung des Gewichts einer vollen Bockbierkiste.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt eine volle Bockbierkiste zwischen 16 und 17 kg?

(c) Wieviele volle Bockbierkisten darf ein LKW-Fahrer laden, wenn die zulässige Nutzlast von 2500 kg mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 *nicht überschritten* werden soll?

**4. [A 11.4]** Eine Person, die nach den relativen Flächen von Kreisen variierender Größe gefragt wird, schätzt typischerweise die Flächen auf einer Wahrnehmungsskala wie folgt: $\boxed{4\text{ P}}$

$\hat{F} = a\,F^b$, mit $F$ = wahre Fläche, $\hat{F}$ = geschätzte Fläche.

Der übliche Bereich von $b$ ist $0.6 \le b \le 1.2$.

In der folgenden Tabelle sind die Werte $100 \times b$ für $n = 24$ Versuchspersonen in aufsteigender Reihenfolge angegeben.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 58 | 63 | 69 | 72 | 74 | 79 |
| 88 | 88 | 90 | 91 | 93 | 94 |
| 97 | 97 | 99 | 99 | 99 | 100 |
| 103 | 104 | 105 | 107 | 118 | 127 |

(a) Berechnen Sie $\overline{x}$, $\tilde{x}$, $s$, $s_q$, $g_1$ und $g_2$.

(b) Man stelle die Daten mittels Histogramm (mit geeigneter Klasseneinteilung), Boxplot, Symmetrieplot und empirischer Verteilungsfunktion graphisch dar.

**5. [A 13.10]** Eine diskrete Verteilung ist wie folgt gegeben: $\boxed{3\text{ P}}$

| $X = i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P_X(X = i)$ | $p$ | $q$ | $1 - (p + q)$ |

(a) Man bestimme einen Maximum–Likelihood–Schätzer $(\hat{p}, \hat{q})$ für den Parametervektor $(p, q)$ aus einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Berechnen Sie für die Stichprobenrealisation

| $X = i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P_X(X = i)$ | 28 | 80 | 22 |

konkrete Schätzwerte für $(p, q)$.

**6. [A 13.11]** Die relative Dauer $D$ eines Projekts lasse sich durch folgende Verteilung mit Dichte $\boxed{4\text{ P}}$

$$f_D(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} & 0 \le x \le 1, \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben.

(a) Bestimmen Sie den Maximum–Likelihood–Schätzer für den Parameter $\lambda$ aus einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Wie lautet der Momentenschätzer für $\lambda$?

(c) Es liege eine Stichprobenrealisation von $n = 6$ relativen Dauern $0.3, 0.7, 0.2, 0.1, 0.3, 0.2$ vor. Wie lauten die Schätzwerte für den Parameter $\lambda$ nach (a) und (b)?

## Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{24\text{ P}}$

## Besprechungstermine:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gruppe A - L:** | **Di. 16. 1. 2001** | **9:15 - 10:45** | **HS B**: UProf. Stadlober |
| **Gruppe M - Z:** | **Di. 16. 1. 2001** | **11:00 - 12:30** | **HS G**: UAss. Stampfer |

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Tutorin oder unseren Tutor:

**Claudia Repitsch** `rebi@sbox.tu-graz.ac.at`

**Matthias Goldgruber** `goldy@sbox.tu-graz.ac.at`

BITTE NUR DAS DECKBLATT UND DIE RECHNUNGEN ABGEBEN!