Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Telematiker

Übungsblatt 3

21. 11. 2000

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,
— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben
— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. + 2. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 3. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. + 2. + 3. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 5.3] Für welche k definieren die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsfunktionen? $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

(a) $P_X(X = i) = \frac{k\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \ldots\ ; \quad \lambda > 0.$

(b) $P_X(X = i) = \frac{k}{N} \quad i = 1, 2, \ldots, N.$

(c) Man berechne die Erwartungswerte und Varianzen.

2. [A 5.4] Eine stetige Zufallsvariable X sei gegeben durch ihre Verteilungsfunktion $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/3 & 0 \leq x < 1 \\ x - 2/3 & 1 \leq x < k \\ 1 & x \geq k \end{cases}$$

(a) Wie groß muß k sein?

(b) Stellen Sie $F_X(x)$ graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Dichte $f_X(x)$.

(d) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

(e) Wie groß ist $P_X(\frac{1}{2} \leq X \leq 1)$?

3. Einem Touristen wird an der Straßenecke folgendes Würfelspiel mit zwei symmetrischen, unabhängig geworfenen Tetraedern (vierseitige Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 4) vorgeschlagen: $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

Zeigen die beiden Würfel die gleiche Augenzahl, so erhält er das Fünffache seines Einsatzes zurück, unterscheiden sich die Augenzahlen dagegen um 1, 2 oder 3, so verliert er den ein–, zwei– oder dreifachen Einsatz.

(a) Geben Sie einen geeigneten Laplace-W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an.

(b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns G (negativer Gewinn $\equiv$ Verlust).

(c) Wie hoch muß die Auszahlung (als Vielfaches des Einsatzes) bei gleicher Augenzahl gewählt werden, damit das Spiel fair wird, also einen mittleren Gewinn von 0 besitzt?

4. [A 6.2] Eine Firma vereinbart mit einem Zulieferanten von Bauteilen folgende Abnahmekontrolle. Jeder (umfangreichen) Lieferung werden 20 Stück entnommen, die alle geprüft werden. Findet man dabei *keinen fehlerhaften* Bauteil, so wird die *gesamte* Lieferung *angenommen*, findet man *mindestens 2 fehlerhafte* Bauteile, so wird sie *zurückgewiesen*. Bei Feststellung *eines fehlerhaften* Bauteils wird aus *derselben* Lieferung eine zweite Stichprobe von 20 Stück entnommen. Die Lieferung wird angenommen, falls kein defektes Bauteil darunter ist, sonst zurückgewiesen. Es werden nur 8% fehlerhafte Bauteile in einer vorliegenden Lieferung angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

(a) muß eine zweite Stichprobe entnommen werden,

(b) wird diese Lieferung angenommen,

(c) wurden bei einer Annahme zwei Stichproben geprüft?

(d) Wie viele Bauteile werden im Mittel pro Lieferung bei einem angenommenen stets gleichen Fehleranteil zu prüfen sein?

Hinweis: Rechnung unter Verwendung der Binomialverteilung.

5. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer *geometrisch–verteilten* Zufallsvariablen X ist gegeben durch $p_k = P_X(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. $\boxed{4 \text{ P}}$

(a) Zeigen Sie, dass p_k eine W–Verteilung definiert.

(b) Bestimmen Sie die *Erzeugende Funktion* $G_X(s) = E(s^X)$.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ mit Hilfe von $G_X(s)$.

(d) Die Zufallsvariable X zählt die *Anzahl der Misserfolge* bevor der erste Erfolg eintritt. Sei $Y = X + 1$, die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Versuche zählt. Wie lauten $E(Y)$ und $Var(Y)$?

6. Die Laufzeit T eines stochastischen Suchverfahrens auf einer Workstation werde als $Exp(\lambda)$–verteilt angenommen. Weiter sei bekannt, dass die mittlere Laufzeit 100 [sec] beträgt. $\boxed{3 \text{ P}}$

(a) Wie lautet der Parameter λ der Exponentialverteilung?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Lauf des Verfahrens (i) genau 100 [sec], (ii) zwischen 90 und 110 [sec] dauert?

(c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in (ii), wenn bekannt ist, dass das Verfahren bereits 50 [sec] läuft?

7. **[A 7.1]** In einer Fabrik werden elektrische Widerstände maschinell gefertigt. Aufgrund längerer Beobachtungen weiß man, dass die von einer bestimmten Maschine produzierten Widerstände einen Mittelwert von $\mu = 152$ [Ohm] und eine Streuung von $\sigma = 2$ [Ohm] aufweisen und normalverteilt sind. Man benötigt nun eine größere Serie Widerstände von 150 Ohm mit den Toleranzen (Streuungen) ± 4 Ohm. $\boxed{2 \text{ P}}$

(a) Wie groß würde der mittlere Ausschußanteil, wenn man zur Produktion die Maschine mit $\mu = 152$ [Ohm] und $\sigma = 2$ [Ohm] benutzt? (D.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffener Widerstand außerhalb der Toleranzgrenze liegt?)

(b) Wie groß würde der mittlere Ausschußanteil, wenn es gelänge, die Maschine bei gleicher Streuung auf den Mittelwert $\mu = 150$ [Ohm] einzustellen?

8. Interpretiert man eine stetige Zufallsvariable $T \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $F_T(t)$ und Dichte $f_T(t)$ als *Lebensdauer* eines Systems, so heißt **4 P**

$$a(t) := \frac{1}{1-F_T(t)} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$$

Ausfallrate (hazard rate) des Systems. $a(t) \cdot \Delta t$ ist als eine Näherung für die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitraum $(t, t+\Delta t]$ ausfällt, wenn es zum Zeitpunkt t noch intakt war. Berechnen Sie die Ausfallraten $a(t)$ für

(a) eine *exponential–verteilte* Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(b) eine *Weibull–verteilte* Zufallsvariable T mit Parametern $s > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t^s) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(c) eine *Hjorth–verteilte* Zufallsvariable T mit den Parametern $q > 0$, $r > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{\exp(-r \cdot t^2/2)}{(1+q \cdot t)^{\lambda/q}} & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

und interpretieren Sie die Ergebnisse (graphische Darstellung von $a(t)$).

Maximal erreichbare Punkteanzahl **27 P**

Besprechungstermine:

Gruppe A - L: **Di. 21. 11. 2000** **9:15 - 10:45** **HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe M - Z: **Di. 21. 11. 2000** **11:00 - 12:30** **HS G**: UAss. Stampfer

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Tutorin oder unseren Tutor:

Claudia Repitsch `rebi@sbox.tu-graz.ac.at`
Matthias Goldgruber `goldy@sbox.tu-graz.ac.at`

BITTE NUR DAS DECKBLATT UND DIE RECHNUNGEN ABGEBEN!