Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Telematiker

Übungsblatt 2

19. 11. 2002

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,
— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben
— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 2. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. und 2. Übungsblatt:		☐	☐

1. **[A 4.22]** Gegeben sei ein Feld der Länge n auf das zufällig r Daten abgespeichert werden sollen (**Hash–Tabelle**). Eine Mehrfachbesetzung des selben Speicherplatzes nennt man *Kollision*. Die Wahrscheinlichkeit, dass *keine Kollision* stattfindet kann approximativ angegeben werden als $P_r = \exp(-r^2/(2n))$. Für $n = 1024$, $r = 37$ ergibt sich $P_r \approx 0.512$. Der exakte Wert ist $P_r = 0.522$. Für $n = 1024$, $r = 10$ erhält man $P_r \approx 0.952$, mit dem exakten Wert von $P_r = 0.957$. 6 P

   (a) Führen Sie das 1. Szenario ($n = 1024$, $r = 37$) in 8 Simulationsläufen mit $m = 250, 500, 1000$ und 2000 Wiederholungen durch, wobei die Integerzahl `j = random(n)+1` die belegte Zelle j angibt. Berechnen Sie die relative Anzahl $x_i =$ (Anzahl der Belegungen ohne Kollision)$/m$, deren Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$ und Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2)^{1/2}$. Definieren Sie einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den 8 Simulationsläufen mit 250 Wiederholungen, die 2. Simulationsserie aus den 8 Simulationsläufen mit 500 Wh. usw.).

   (b) Simulieren sie das 2. Szenario ($n = 1024$, $r = 10$) analog zu (a).

   (c) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a) und (b) mit den exakten Wahrscheinlichkeiten P_r.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe–Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie (**Quellcode, exe-File, Ergebnisfile**) bis **Montag, den 18. 11., 20 Uhr** an uns.

Bei Fehlen einer dieser Dateien werden **keine Punkte** vergeben.

Die Übertragung erfolgt über anonymous ftp wie üblich:

1. Starten des ftp–Programms (beispielweise das von Onnet angebotene)
2. Name des Rechners eingeben: `statistik.tu-graz.ac.at`
3. Username: `anonymous`
4. Password: `guest`
5. Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter

   `statistik.tu-graz.ac.at/incoming/wthtele`

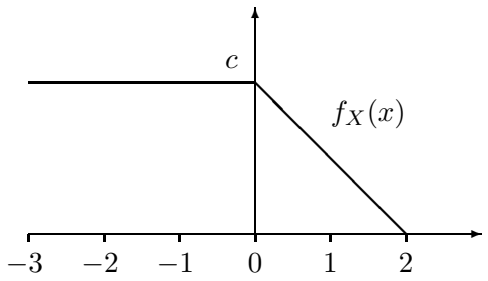
2. **[A 4.30]** Zwei Spieler, Georg und Michael, ziehen nacheinander aus einer Urne mit 8 Kugeln (5 rote, 3 schwarze) abwechselnd eine Kugel *ohne* Zurücklegen. Georg beginnt. Wer zuerst eine schwarze Kugel zieht, hat gewonnen. 3 P

   (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_M, dass Michael gewinnt?

   (c) Man gebe die Verteilung der Zufallsvariablen $X = \#$ (*Ziehungen*) an und berechne $E(X)$.

3. [A 5.7] Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X habe folgenden Graphen [4 P]



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie $P_X(-\frac{3}{2} \leq X \leq -\frac{1}{2})$ und $P_X(0 < X < \infty)$.

(c) Geben Sie die Dichtefunktion $f_X(x)$ formelmäßig an.

(d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

4. [A 6.3] Beim Würfeln mit 2 Würfeln setzt der Spieler EUR 10.– ein. Er gewinnt EUR 10.– dazu, wenn die Differenz der Augenzahlen höchstens 1 beträgt, und EUR 15.–, wenn gleiche Augenzahlen erscheinen. [4 P]

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der ZV X = *Gewinn (Verlust = –Gewinn).*

(b) Berechnen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns, wenn nicht in EUR, sondern in Schweizer Franken CHF (10 EUR = 14.7 CHF) gespielt wird.

(d) Bestimmen Sie den kleinsten Ereignisraum für eine sinnvolle Beschreibung dieses Spiels.

5. [A 6.10] Eine Zufallsvariable X besitzt eine *negative Binomialverteilung von der Ordnung* r ($r \geq 1$), wenn sie die Werte k ($k = 0, 1, \dots$) mit den Wahrscheinlichkeiten [4 P]

$$P_X(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k \quad (k = 0, 1, \dots; r \geq 1 \text{ fest})$$

annimmt, wobei $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ ist.

(a) Man zeige, dass P_X eine W–Funktion darstellt.

(b) Wie lautet die Erzeugende Funktion $G_X(s)$?

(c) Man berechne $E(X)$ und $Var(X)$ mit Hilfe der Erzeugenden Funktion.

(Eventuell auftretende Reihen sind auszurechnen.)

6. [A 6.15] Einem Touristen wird an der Strassenecke folgendes Würfelspiel mit zwei symmetrischen, unabhängig geworfenen Tetraedern (vierseitige Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 4) vorgeschlagen: [3 P]

Zeigen die beiden Würfel die gleiche Augenzahl, so erhält er das Fünffache seines Einsatzes zurück, unterscheiden sich die Augenzahlen dagegen um 1, 2 oder 3, so verliert er den ein–, zwei– oder dreifachen Einsatz.

(a) Geben Sie einen geeigneten Laplace-W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an.

(b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns G (negativer Gewinn $\equiv$ Verlust).

(c) Wie hoch muß die Auszahlung (als Vielfaches des Einsatzes) bei gleicher Augenzahl gewählt werden, damit das Spiel fair wird, also einen mittleren Gewinn von 0 besitzt?

7. [A 7.7] In der Telefonzentrale der TU Graz ist die Zeitspanne T [in min] zwischen zwei Anrufen *exponentialverteilt* mit Parameter λ, wobei pro Stunde durchschnittlich 150 Anrufe zu bedienen sind und die Anzahl X der *Anrufe pro Zeiteinheit* POISSON–verteilt ist. 3 P

(a) Wie groß ist λ? Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt die Leitung länger als 30 Sekunden frei?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 20 Minuten zwischen 40 und 60 Anrufe kommen?

(c) Die Vermittlung ist überlastet, falls mehr als k Anrufe in 1 Minute eintreffen. Für welches k ist die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung kleiner als 0.05?

8. [A 7.16] 3 P

(a) Die Zufallsvariable X sei $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Bestimmen Sie die Parameter μ und σ, wenn $F_X(2) = 0.9$ und $F_X(2.5) = 0.95$.

(b) Die Lebensdauer X eines Motors sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{12}$; d.h. $E(X) = 12$. Berechnen Sie $P_X(X \leq 10)$.

(c) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit in (b), wenn X gammaverteilt mit $a = 2$ und $\lambda = \frac{1}{6}$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $F_X(x) = 1 - e^{-x/6}\left(1 + \frac{x}{6}\right)$.

Maximal erreichbare Punkteanzahl 30 P

Besprechungstermine:

Gruppe A - L: **Di. 19. 11. 2002** **9:15 - 10:45** **HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe M - Z: **Di. 19. 11. 2002** **11:00 - 12:30** **HS G**: UProf. Stadlober

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere/n TutorIn:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern kern@stat.tu-graz.ac.at
Elke Pauritsch mathe@sbox.tu-graz.ac.at
Reinhard Fiedler boss@sbox.tu-graz.ac.at