Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Telematiker

Übungsblatt 1

29. 10. 2002

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,
— welche Aufgaben Sie zu Hause bearbeitet haben,
— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

Aufgabe	bearbeitet	Tafel	Punkte
1	☐	☐	
2	☐	☐	
3	☐	☐	
4	☐	☐	
5	☐	☐	
6	☐	☐	
7	☐	☐	
8	☐	☐	
		Gesamt:	☐

1. [**A 2.4**] A, B, C seien drei beliebige Ereignisse. $\boxed{4\text{ P}}$

(a) Man gebe mengenalgebraische Ausdrücke dafür an, dass

i. A, aber weder B noch C, eintritt,

ii. *mindestens eines* der Ereignisse eintritt,

iii. *mindestens zwei* der Ereignisse eintreten,

iv. *genau eines* der Ereignisse eintritt.

(b) Gegeben seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten

$P(A)$,$P(B)$, $P(C)$,$P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$.

Wie berechnen sich hieraus die Wahrscheinlichkeiten für die in i. bis iv. beschriebenen Ereignisse?

2. [**A 2.8**] Das Ergebnis eines Roulette-Spieles ist eine der Zahlen 1 bis 36 oder die 0, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Man kann bei einfacher Gewinnchance auf die geraden Zahlen $(2, 4, \ldots, 36; \mathit{Pair})$ oder auf die ungeraden Zahlen $(1, 3, 5, \ldots, 35; \mathit{Impair})$ setzen. Ein Spieler setze immer auf *Pair*. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei 12 Spielen genau 4–mal bzw. 5–mal Erfolg hat?

(b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass der Spieler beim k–ten Spiel $(k = 1, 2, \ldots)$ zum ersten Erfolg kommt, und berechne diese Wahrscheinlichkeit für $k = 1, 2, 3, 4$.

(c) Das Einsatzlimit betrage EUR 400,–. Der Spieler beginnt mit einem Einsatz von EUR 1,– und nimmt sich vor, bei Verlust seinen Einsatz im jeweils nächsten Spiel zu verdoppeln und bei Gewinn aufzuhören. Für welches k wird das Limit zum ersten Mal überschritten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wegen Überschreitung des Limits aufhören muss, bevor er einen Gewinn realisieren kann?

3. [**A 2.9**] Die Grundmenge Ω sei gegeben durch $\Omega = \{a, b, c, d\}$. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Wie ist der W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert, wenn folgendes bekannt:

$\{a\} \in \mathcal{A}$, $\{b, c\} \in \mathcal{A}$, $P(\{b, c\}) = 0.3$, $P(\{a\}) = 0.4$.

(b) Man bestimme die kleinstmögliche σ–Algebra von Ω, welche die Mengen $\{a, b\}$ und $\{d\}$ enthält.

4. [**A 2.13**]

Man simuliere in `Turbo--Pascal` (`Java`, `C++` oder in einer anderen Programmumgebung) die beiden Glücksspiele des Chevalier DE MERÉ mit Hilfe des Zufallszahlengenerators `random`. Der Aufruf `random( )` liefert einen (zufälligen) Realwert im Intervall $[0, 1)$. Ein (zufälliger) positiver Integerwert aus $\{0, \ldots, k-1\}$ wird durch `random(k)` erzielt. Die Integerzahl `i=random(6)+1` ist also ein Ergebnis des Zufallsexperiments *Wurf eines Würfels*. Vor der mehrmaligen Simulation eines Zufallsexperiments mit Hilfe von `random` ist es notwendig, einen neuen Startwert des Generators durch den Befehl `randomize` zu initialisieren. $\boxed{6\text{ P}}$

(a) Führen Sie das 1. Spiel *(4 Würfe mit einem Würfel)* in 8 Simulationsläufen mit 50, 100, 200, 500 und 1000 Wiederholungen durch. Berechnen Sie die relative Anzahl x_i der Ereignisse *Mindestens eine Sechs bei einem Spiel* und geben Sie jeweils die Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$ und Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2)^{1/2}$ aus. Definieren Sie durch `randomize` einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den 8 Simulationsläufen mit 50 Wiederholungen, die 2. Simulationsserie aus den 8 Simulationsläufen mit 100 Wh. usw.).

(b) Simulieren sie das 2. Spiel *(24 Würfe mit zwei Würfeln)* analog zu (a) und registrieren Sie die relative Anzahl der Ereignisse *Mindestens eine Doppelsechs bei einem Spiel*.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a) und (b) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Ist die Anzahl der Wiederholungen groß genug?

Hinweis: Übermitteln Sie die Programme (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis

Montag, den 28. 10., 20 Uhr, über anonymous ftp wie folgt an uns:

1. Starten des ftp–Programms (beispielweise das von Onnet angebotene)
2. Name des Rechners eingeben: `statistik.tu-graz.ac.at`
3. Username: `anonymous`
4. Password: `guest`
5. Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter
   `statistik.tu-graz.ac.at/incoming/wthtele`

5. [**A 3.6**] Ein *Skatspiel* besteht aus 32 Karten. Jeder der drei Spieler erhält 10 Karten; im *Skat* verbleiben zunächst 2 Karten. Man berechne folgende (bedingte) Wahrscheinlichkeiten 3 P

(a) Sie haben ein typisches Contrablatt:
2 Buben und von jeder Farbe 2 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf 6 Trümpfe zu kommen, wenn Sie den Skat erhalten?

(b) Sie haben nach Aufnahme des Skats 6 Trümpfe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Verteilungen der restlichen 5 Trümpfe: 5:0, 4:1, 3:2?

(c) Sie haben nach Aufnahme des Skats 8 Trümpfe; der Pik–Bube fehlt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Pik–Bube einzeln ist?

(d) Sie haben keinen Buben im Blatt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich *ohne 4* zu überreizen, wenn man die Karten voll ausreizt? (D.h. dass man mindestens einen Buben aus dem Skat hebt).

Hinweis: Die Trümpfe bestehen aus den 8 Karten einer Farbe plus den restlichen 3 Buben.

6. [**A 4.5**] Man berechne beim *Skatspiel* folgende Wahrscheinlichkeiten: $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

(a) Jeder Spieler hat *genau einen* Buben.

(b) Es liegen 2 Buben im Skat.

(c) *Mindestens* ein Spieler hat *genau* 2 Buben.

(d) *Genau* ein Spieler hat *genau* 2 Buben.

Hinweis: Der *Skat* wurde noch nicht aufgenommen.

7. [**A 4.13**] Bei einem Spiel mit einem Würfel hängt die Anzahl der Würfelversuche von den geworfenen Augenzahlen ab. Das Spiel ist nach einem Versuch zu Ende, falls der Spieler die *Sechs* (Gewinn) oder die *Eins* (Verlust) würfelt. Ansonsten wird so lange gewürfelt bis entweder *Fünf* oder *Sechs* (Gewinn) oder die *Eins* (Verlust) kommt. $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

(a) Stellen Sie das Spiel durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler?

(c) Man nehme an, dass der Spieler gewonnen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er höchstens 5 Versuche dazu benötigt?

8. [**A 4.20**] Ein *dreimotoriges* Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Ein *viermotoriges* Flugzeug stürzt ab, wenn auf einer Seite beide Motoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

(a) Unter der Annahme der Unabhängigkeit für das Eintreten der Defekte an den einzelnen Flugzeugmotoren berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein *dreimotoriges* bzw. *viermotoriges* Flugzeug durch Motorversagen abstürzt.

(b) Man stelle die beiden errechneten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p in einer Skizze dar.

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{30\ \mathrm{P}}$

Besprechungstermine:

Gruppe A - L:	**Di. 29. 10. 2002**	**9:15 - 10:45**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe M - Z:	**Di. 29. 10. 2002**	**11:00 - 12:30**	**HS G**: UProf. Stadlober

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere/n TutorIn:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Elke Pauritsch `mathe@sbox.tu-graz.ac.at`

Reinhard Fiedler `boss@sbox.tu-graz.ac.at`