Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

01. 02. 2002

---

1) In einer Gemeinde wird die zuletzt abgehaltene Wahl analysiert. Dabei werden die Wahlberechtigten in drei Gruppen aufgeteilt:
Gruppe 1 (jünger als 35) 30% Anteil, Gruppe 2 (35 bis 65 Jahre) 45% Anteil, Gruppe 3 (älter als 65) 25% Anteil. Die Wahlbeteiligung betrug 65% in Gruppe 1, 75% in Gruppe 2 und 70% in Gruppe 3.

(a) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum! (3P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bürger zur Wahl gegangen ist? (3P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein abgegebener Stimmzettel von einer mindestens 35 Jahre alten Person? (4P)

2) Für den Verkauf von Tombolalosen wird mit folgenden Sätzen geworben: *Jedes dritte Los gewinnt. Jeder 100. Gewinn ist ein Haupttreffer.* Sie kaufen 3 Lose.

(a) $Y = \#$ (Gewinne bei Kauf von 3 Losen). Wie lautet $g_k = P_Y(Y = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$? Für welches k ist g_k maximal? (3P)

(b) $Z = \#$ (Haupttreffer bei Kauf von 3 Losen). Wie lautet $h_k = P_Z(Z = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Haupttreffer zu erzielen. (4P)

(c) Wie viele Lose müsste man kaufen, damit man mit einer Wahrschein— lichkeit größer als 0.9 *mindestens einen* Haupttreffer gewinnt? (3P)

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_1 x^2 & 0 \le x < 1 \\ c_1(c_2 - \frac{2}{x}) & 1 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2. (4P)

(b) Wie lautet die Dichtefunktion $f_X(x)$? (2P)

(c) Man berechne den Median $x_{0.50}$ mit $F_X(x_{0.50}) = \frac{1}{2}$ und $P_X(1 \le X \le \frac{5}{2})$. (4P)

4) Die Schneefallmengen [in cm] im Dezember, Jänner und Februar des Olympiaortes Park City werden als unabhängig normalverteilte Zufallsvariable $D \sim N(60, 10)$, $J \sim N(80, 15)$, $F \sim N(90, 20)$ angesehen.

(a) Geben Sie die Verteilung der Gesamtschneefallmenge in den drei Wintermonaten an. (2P)

(b) Wie lautet die Verteilung des über 10 Jahren gebildeten Mittelwertes der Schneefallmengen im Jänner und Februar zusammen? (4P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneit es im Februar mehr als im Jänner? (4P)

5) Die diskreten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch verteilt mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P_{X_i}(X_i = x_i) = c(\theta)\theta^{2x_i - 1}\,, x_i \in \mathbb{N}, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

(a) Bestimmen Sie für jedes θ die Konstante $c(\theta)$. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum–Likelihood-Schätzer für den Parameter θ gleich $\hat{\theta} = \sqrt{1 - 1/\overline{X}}$ mit $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist. (4P)

(c) Berechnen Sie für die Stichprobenrealisation $(4, 2, 1, 3, 1, 1, 4)$ den ML–Schätzwert für θ. (2P)

6) Im Sportteil der Kleinen Zeitung im Jänner 2002 war folgende Notiz zu lesen:

Kopf oder Zahl? Schiedsrichter, aufgepasst! Hat die Euro–Einführung auch Auswirkungen auf Platzwahl und Losentscheidungen bei Fußballspielen? Die “Süddeutsche Zeitung“ hat die deutsche Euro-Münze getestet: Bei 250 Würfen landete 141 Mal der Adler oben. Offizielle Stellungnahme des DFB: Die Kapitäne haben freie Münzwahl — sie können den Euro ablehnen und eine andere Münze verlangen.

(a) Kann man auf Grund des Ergebnisses die Vermutung bestätigen, dass die Münze nicht regelmässig ist? Formulieren Sie einen entsprechenden Hypothesentest und tesen Sie die Vermutung zum Niveau $\alpha = 0.05$. (6P)

(b) Wie lautet ein approximatives zweiseitiges 95%–Konfidenzinterval für den wahren Anteil p? Würden Sie als Kapitän den Euro ablehnen? (4P)