**Prüfung aus**

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik Telematik

02. 02. 2001

---

**1)** Eine Firma entwickelt einen BSE-Schnelltest. Es wird davon ausgegangen, daß bei 1% der Rinder BSE vorhanden ist. Falls ein Tier an BSE erkrankt ist, dann fällt der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.9 positiv aus. Falls es nicht erkrankt ist, kommt es mit Wahrscheinlichkeit 0.2 dennoch zu einem positiven Testergebnis. Man entscheidet sich für die folgende Vorgangsweise: Bei einem positiven Ergebnis wird derselbe Test nochmals wiederholt und das Ergebnis des zweiten Tests als Befund angesehen. Bei einem negativen Ergebnis wird nicht weiter getestet.

(a) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Wahrscheinlichkeiten auf. (5P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Testergebnis positiv. (2P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Tier tatsächlich erkrankt, falls das Testergebnis positiv ausfällt. (3P)

---

**2)** Eine Ersatzteillieferung enthält 1 Karton Kugellager, 2 Kartons Zahnräder und 3 Kartons Schrauben. Das Gewicht der Kartons lasse sich durch unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen $K_1, Z_1, Z_2, S_1, S_2, S_3$ mit Erwartungswerten $E(K_1) = 125$, $E(Z_1) = E(Z_2) = 84$, $E(S_1) = E(S_2) = E(S_3) = 65$, und Varianzen $Var(K_1) = 1$, $Var(Z_1) = Var(Z_2) = 4$, $Var(S_1) = Var(S_2) = Var(S_3) = 3$ beschreiben.

(a) Bestimmen Sie $a$ derart, daß das Gewicht der 3 Kartons Schrauben mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 im Intervall $[195 - a, 195 + a]$ liegt. (3P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ersatzteillieferung mehr als 500 kg wiegt. (3P)

(c) Wieviele solcher Lieferungen darf man auf einen Lastwagen packen, damit ein Gesamtgewicht von 18 Tonnen mit Wahrscheinlichkeit 0.5 nicht überschritten wird. (4P)

---

**3)** Die ZV $X$ besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. (2P)

(b) Man berechne die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (2P)

(c) Wie lauten $E(X)$ und $Var(X)$ ? (4P)

(d) Berechnen Sie $P_X(0.2 < X \leq 0.8)$. (2P)

---

**4)** Ein Angestellter der Grazer Verkehrsbetriebe kontrolliert jeden Vormittag die Fahrkarten der Fahrgäste solange, bis er einen Schwarzfahrer aufdeckt. Danach geht er in sein Büro. Die Zufallsvariable $X$ sei die Anzahl der Personen, die er kontrollieren muß, bis das erste Bußgeld fällig ist; es gelte $P_X(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geq 1$. An zehn Tagen wurden die folgenden Anzahlen beobachtet:
$42, 50, 40, 64, 30, 36, 68, 42, 46, 48$.

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $p$ aufgrund einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$. (4P)

(b) Geben Sie den Momentenschätzer für $p$ an. (3P)

(c) Wie lautet der konkrete Schätzwert für die angegebene Stichprobe vom Umfang $n = 10$. (3P)

---

**5)** Ein großer Autohersteller will einen neuen Motorentyp testen, um festzustellen, ob er die neuen Abgasnormen erfüllt. Die mittlere Emission $\mu$ aller Motoren dieses Typs muß kleiner als $20[ppm]$ Kohlenstoff sein. Bei $n = 16$ Motoren wurde ein Mittelwert $\overline{x} = 18.0[ppm]$ und eine Standardabweichung von $s = 3.0[ppm]$ festgestellt.

(a) Man formuliere einen entsprechenden Hypothesentest. Kann aufgrund der vorliegenden Stichprobe angenommen werden, daß dieser Typ von Motoren die bestehenden Abgasnormen erfüllt? ($\alpha = 0.01$) (4P)

(b) Man nehme an, daß die erlaubte Emission nur mehr $\mu \leq 19[ppm]$ betragen darf. Wie groß darf dann der Mittelwert $\overline{x}$ bei $n = 16$, $s = 3$, höchstens sein, damit die Stichprobe den Test $\alpha = 1\%$ besteht? (3P)

(c) Wie lautet das zweiseitige 95%–Konfidenzintervall für $\sigma^2$? (3P)

---

**6)** Das durchschnittliche Geburtsgewicht von $n = 51$ in einer Tierklinik geborenen männlichen Welpen betrug $\overline{x} = 358[g]$ und die Streuung war $s_x = 36[g]$. Bei $m = 41$ weiblichen Tieren ergab sich ein mittleres Gewicht von $\overline{y} = 375[g]$ und eine Streuung von $s_y = 41[g]$. Es darf davon ausgegangen werden, daß die Daten normalverteilt sind.

(a) Prüfen Sie die Hypothese gleicher Varianzen zum Niveau $\alpha = 0.01$. (3P)

(b) Man teste zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, daß der Erwartungswert des Geburtsgewichtes nicht vom Geschlecht abhängt. (4P)

(c) Man bestimme Konfidenzintervalle für den Erwartungswert $\mu_X$ bei den männlichen Tieren zum Niveau $1 - \alpha = 0.99$. (3P)

---