Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik Telematik

04. 02. 2000

---

1) Ingenieure entwickeln ein automatisches Testverfahren für Compakt-Disk-Player. Folgendes ist bekannt: 1% der CD-Player sind defekt. Die bisherige Erfahrung zeigt, daß der Test in 5% der Fälle ein falsches positives und in 2% der Fälle ein falsches negatives Ergebnis liefert.

   (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum, der diese Situation wiedergibt. (3P)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht der Test positiv aus. (3P)

   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein CD-Player, der den Test bestand, tatsächlich ohne Fehler ist. (4P)

---

2) In einem Netzwerk werden Datenpakete verschickt. Die Anzahl fehlerhafter Datenpakete pro Tag sei POISSON-verteilt mit Parameter $\lambda = 5$.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von mehr als 2 fehlerhaften Zustellungen pro Tag? (3P)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es innerhalb von 3 Tagen zu höchstens fünf Fehlern in den Datenpaketen? (3P)

   (c) Über eine Zeit von 10 Tagen wurden an jedem Tag die folgenden Fehlerhäufigkeiten beobachtet: 5, 6, 12, 2, 4, 5, 6, 2, 5, 6. Geben Sie die Maximum Likelihood Schätzung für λ aufgrund dieser Stichprobe an. (4P)

---

3) Die Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ eines Zufallsvektors (X,Y) sei durch

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

festgelegt.

   (a) Bestimmen Sie k. (3P)

   (b) Berechnen Sie die Randdichten und $E(X)$, $E(Y)$. (3P)

   (c) Berechnen Sie $P_{X,Y}(X > \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2})$? Sind X und Y unabhängig? (4P)

---

4) Die Verteilung eines diskreten Zufallsvektors (X,Y) sei durch die folgende Tabelle bestimmt

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	0.1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.1	0.1	0
3	0	0.1	0.1	0	0.1	0
4	0.1	0	0	0	0.1	0
5	0	0	0	0.1	0	0.1

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y. Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$. (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Y = 3\}$, falls $\{X = 3\}$ beobachtet wurde? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{1 \leq X \leq 3, Y > 4\}$? (3P)

(c) Sind X und Y unabhängig? (3P)

---

5) Der Hersteller eines Waschmittels gibt auf der Packung ein Füllgewicht von $600g$ an. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 100$ ergab $\bar{x} = 597g$ und $s^2 = 115g^2$.

(a) Eine Konsumentenschutzorganisation äußert den Verdacht, daß das mittlere Füllgewicht geringer sein könnte. Ist dieser Verdacht gerechtfertigt ($\alpha = 0.01$)? (3P)

(b) Geben Sie ein 99%-Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht an. (3P)

(c) Wie groß ist die Macht β des Tests, wenn $\sigma^2 = 100g^2$ und der wahre Mittelwert des Füllgewichts $\mu = 596g$ beträgt? (4P)

---

6) An Hand von zwei zufällig ausgewählten Gruppen von Testpersonen soll die Wirksamkeit zweier Medikamente verglichen werden. Folgende Daten liegen vor:

Gruppe 1: $n = 31$ $\overline{x} = 12.5$ $s_x = 1.7$
Gruppe 2: $m = 51$ $\overline{y} = 11.7$ $s_y = 1.4$

(a) Man bestimme 95%-Konfidenzintervalle für die Mittelwerte μ_x, μ_y der beiden Gruppen. (3P)

(b) Kann die Hypothese der Gleichheit der Varianzen $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ aufrechterhalten werden? (3P)

(c) Ist die Hypothese $H_0 : \mu_x \leq \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x > \mu_y$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ zu verwerfen? (4P)
