Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

11. 12. 1998

1) Telematikstudenten können zu einer bestimmten Prüfung maximal dreimal antreten. Die Wahrscheinlichkeit p_k, daß ein zufällig ausgewählter Student beim k-ten Antreten durchkommt, gegeben daß $k-1$ Fehlversuche vorliegen $(k = 1, 2, 3)$ sei:
$p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{5}{6}$, $p_3 = \frac{3}{4}$

(a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum. (2P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kandidat die Prüfung nicht erfolgreich absolviert. (3P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kandidat durchkommt, unter Annahme, daß er beim zweiten Versuch scheitert. (2P)

(d) Der Kandidat ist durchgekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies bereits beim ersten Versuch? (3P)

---

2) Die Orte Adorf und Bedorf sind durch zwei Straßen miteinander verbunden. Zwei weitere Straßen verbinden Bedorf mit Cestadt. Adorf hat auch eine direkte Eisenbahnverbindung mit Cestadt. Alle vier Straßen und die Eisenbahn können mit Wahrscheinlichkeit p unabhängig voneinander durch Schnee blockiert sein. Sie sind in Adorf.

(a) Stellen Sie die Situation graphisch dar. (2P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie mit dem Auto nach Cestadt? (2P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie nach Cestadt reisen? (3P)

(d) Angenommen Sie kommen nach Cestadt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zugstrecke blockiert? (3P)

---

3) Die Zufallsvariable X besitze eine *Rayleigh-Verteilung* mit Dichte

$$f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0$$

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (2P)

(b) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (2P)

(c) An welcher Stelle x ist die Dichte $f_X(x)$ maximal? (4P)

(d) Zeigen Sie, daß das p-te Quantil gleich $x_p = \sqrt{-2\log(1-p)}$ ist, und geben Sie die Werte für die Quartile $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ und $x_{0.75}$ an. (2P)

---

4) Die Zufallsvariablen X, Y haben folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion.

$$P_{X,Y}(X=1,Y=2)=\frac{1}{8}, P_{X,Y}(X=1,Y=3)=\frac{1}{16}, P_{X,Y}(X=1,Y=4)=\frac{1}{4}$$

$$P_{X,Y}(X=2,Y=2)=\frac{1}{16}, P_{X,Y}(X=2,Y=3)=\frac{1}{8}, P_{X,Y}(X=2,Y=4)=\frac{3}{8}$$

(a) Berechnen Sie die Randverteilung $P_X(X=k)$, $P_Y(Y=j)$, $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$. (4P)

(b) Sind X und Y unabhängig? (2P)

(c) Berechnen Sie $\rho(X,Y)$. (4P)

---

5) Eine Firma stellt zwei verschiedene Typen E_1, E_2 von elektronischen Bauteilen her. Bei Widerstandsmessungen anhand von 21 (16) Bauteilen des Typs E_1 (E_2) wurde ein Mittelwert von $\bar{x}_1 = 56.2$, ($\bar{x}_2 = 30.5$) und eine Varianz von $s_1^2 = 1.2$ ($s_2^2 = 2.6$) gemessen. Die Daten dürfen als unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert μ_1 (μ_2) und Varianz σ_1^2 (σ_2^2) angesehen werden.

(a) Man gebe zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle für μ_1 und μ_2 an. (5P)

(b) Man teste die Vermutung $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ zum Niveau $\alpha = 0.05$. (5P)

---

6) Bei 51 zufällig ausgewählten Personen wird die Reaktionszeit auf ein bestimmtes Signal gemessen. Es ergibt sich dabei ein arithmetisches Mittel $\bar{x} = 0.8$ sec. Unter Annahme, daß die Zeiten normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 = 0.04$ sind, bestimme man:

(a) Ein- und zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle für den Erwartungswert der Reaktionszeit. (5P)

(b) Den mindestens notwendigen Stichprobenumfang, sodaß das zweiseitige Konfidenzintervall für μ nicht länger als 0.04 sec. wird. (5P)
