Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Telematik

1\. 12. 2000

---

1) Die Zugangsberechtigung von Personen zu einer Firmenanlage wird über die Wiedererkennung von registrierten Fingerabdrücken erteilt. Man nehme an, daß 90% der Firmenangehörigen eine Zugangsberechtigung besitzen, d.h. *registriert* sind.
Ein neues System für die Wiedererkennung von Fingerabdrücken mit spektralen Methoden erkennt einen *registrierten Fingerabdruck* mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 wieder. Andererseits wird ein Fingerabdruck einer *nicht registrierten* Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.03 fälschlicherweise akzeptiert.
Wird eine Person abgelehnt, dann wird der Fingerabdruck ein zweites Mal analysiert. In diesem Fall wird ein *registrierter* Fingerabdruck mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 richtig erkannt; ein *nicht registrierter* Fingerabdruck mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 zu Recht zurückgewiesen.

(a) Stellen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum dar. (3P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fingerabdruck richtig eingeordnet? (4P)

(c) Ein Fingerabdruck wurde abgelehnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies eine richtige Entscheidung? (3P)

---

2) Bestimmen Sie die Konstanten a und b derart, daß gilt:

$P_X(X \leq a) = 0.4$, $P_X(X \geq b) = 0.3$, falls

(a) X exponentialverteilt mit $\lambda = 3$ (3P)

(b) X $N(5, 2)$–verteilt (4P)

(c) X gleichverteilt auf $[-1, 4]$ ist? (3P)

---

3) (a) Man ergänze die nachfolgende Tabelle der Verteilung des diskreten Zufallsvektors (X, Y) unter der Annahme der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y. (5P)

$X \backslash Y$	1	2	3	$P_X(X = i)$
-1		0.06		
0	0.03			
1				0.50
$P_Y(Y = j)$		0.30		

(b) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ und $Var(Y)$. (3P)

(c) Wie lautet die Korrelation $\rho(X, Y)$ von X und Y? (2P)

---

4) Der zweidimensionale Zufallsvektor (X,Y) besitze die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,x\,e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. (4P)

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$? (4P)

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (2P)

---

5) Eine automatische Abfüllanlage füllt Konservendosen. Das Nettogewicht X einer Dose ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ [g].

(a) Bestimmen Sie die einseitigen 95%–Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ, wenn bei $n = 50$ erhobenen Werten das Stichprobenmittel $\overline{x} = 598$ [g] beträgt. (3P)

(b) Wie groß muß der Stichprobenumfang n gewählt werden,damit die Länge des zweiseitigen 99%–Konfidenzintervalls unter 1 [g] bleibt? (3P)

(c) Wenn Y das Leergewicht einer Dose bezeichnet und $X \sim N(600, 10)$, $Y \sim N(50, 8)$ gilt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Bruttogewicht über 670 [g] liegt? (4P)

---

6) Bei einer Flaschenabfüllmaschine in einer obersteirischen Brauerei wird regelmäßig überprüft, ob die mittlere Füllung $\mu_0 = 500[cm^3]$ beträgt. Anhand eine Stichprobe von $n = 20$ Flaschen soll entschieden werden, ob die Maschine neu eingestellt werden muß. Aus Erfahrung weiß man, daß die Füllmengen X_i, $i = 1, \ldots, 20$, normalverteilt sind mit Parameter μ und σ.

(a) Angenommen man weiß $\sigma^2 = 14$ und beobachtet einen Mittelwert von $\bar{x} = 498.34$. Muß aufgrund dieses Resultats die Maschine neu eingestellt werden? (4P)

(b) Man nehme an, daß die Varianz σ^2 aus den Daten geschätzt werden mußte und einen Wert von $s^2 = 13.98$ ergab. Wie lautet dann die Entscheidung der Brauerei? (3P)

(c) Wie lauten für (a) und (b) die zweiseitigen 95%–Konfidenzintervalle für μ? (3P)
