Versicherungsmathematische Analyse des Bonus–Malus Systems in der KFZ–Haftpflichtversicherung

Institut für Statistik
Technische Universität Graz

Betreuer
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Müller

Autor
Katharina Stangl
Grubweg 15a
8580 Köflach

Graz, im April 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Kurze Einführung

Jeder, der schon einmal einen Unfall verursacht hat, fragt sich, ob es sich auszahlt, diesen Unfall der Versicherung zu melden und somit in eine höhere Prämienstufe eingestuft zu werden, oder ob man den Schaden lieber selber zahlen soll. Genau damit beschäftigt sich meine Diplomarbeit.

Im ersten Kapitel erkläre ich die Grundzüge des österreichischen Bonus–Malus Systems mit den zugehörigen Ein– bzw. Umstufungsregelungen. Außerdem wird die Entwicklung des Bonus–Malus Systems in den letzten Jahren beschrieben.
Das zweite Kapitel befasst sich mit dem diskreten, das dritte Kapitel mit dem zeitstetigen Bonus–Malus System. Für beide Fälle werden das Modell und die Kostenfunktion sowohl des Versicherten als auch der Versicherung beschrieben. Den wichtigsten Teil des zweiten Kapitels bildet die diskrete stochastische dynamische Programmierung mit deren Hilfe die optimalen Schwellwerte bestimmt werden können ab denen ein Schaden der Versicherung gemeldet wird.
Um die optimalen Werte für das österreichische Bonus–Malus System so realistisch wie möglich angeben zu können, habe ich versucht, einige wichtige Parameter wie z.B. die Unfallwahrscheinlichkeit zu schätzen. Wie in Kapitel 4 erläutert wird ist das mit den mir zur Verfügung stehenden Daten nicht zufriedenstellend möglich.
Die Hauptquelle meiner Diplomarbeit ist eine Arbeit von Zacks und Levikson [10]. Ausgehend von den in dieser Arbeit angeführten Gleichungen für die Kosten habe ich zuerst versucht das in der Arbeit angeführte Beispiel mit den entsprechend berechneten Kostenwerten nachzuvollziehen. Da ich nicht auf diese Werte gekommen bin, habe ich sowohl die Kosten des Versicherten, als auch die der Versicherung mittels Simulation berechnet. Auf Grund der erhaltenen Kostenwerte bemerkte ist, dass die angegebenen Kostengleichungen nicht richtig sein können, außer die für die Kosten des Versicherten im diskreten BMS. Ich werde daher

in meiner Diplomarbeit an den entsprechenden Stellen darauf hinweisen, wo der Fehler in der Arbeit von Zacks und Levikson gelegen ist. Außerdem werde ich im fünften Kapitel noch genauer auf die Fehler und deren „Entdeckung“eingehen.
Im sechsten Kapitel meiner Diplomarbeit habe ich die aus den vorhergehenden Kapiteln erhaltenen Ergebnisse auf das österreichische Bonus–Malus System angewandt. Weiters habe ich für eine realitätsnahe Parameterwahl sowohl Schwellwerte, als auch erwartete Kosten des Versicherten bzw. der Versicherung bestimmt.

Im Anhang sind neben einer kurzen Einführung über Markov–Ketten und einer Auflistung der in meiner Diplomarbeit verwendeten Verteilungen auch die Mathematica–Programme zu finden, mit denen ich die Schwellwerte und die erwarteten Kosten bestimmt habe.

Achtung: Leider habe ich nach dem Binden meiner Arbeit noch ein paar kleine Fehler entdeckt. Sie wurden in dieser Version von mir korrigiert.

Kapitel 1

Das österreichische Bonus-Malus System

1.1 Einleitung

Da heutzutage beinahe jeder österreichische Haushalt über mindestens ein Auto verfügt, nimmt die KFZ-Haftpflichtversicherung einen sehr großen Stellenwert in den meisten Versicherungsgesellschaften ein. Aus diesem Grund ist es den Versicherungen aber auch den Versicherten ein großes Anliegen gerechte Prämiensätze festzulegen.

Das ursprüngliche österreichische BMS besteht aus 18 Prämienstufen, die mit 0 bis 17 bezeichnet werden, und 9 sogenannten Tarifklassen, welche aus jeweils 2 Prämienstufen gebildet werden. Heutzutage hat jedoch jede Versicherung das Recht zusätzliche Prämienstufen einzuführen (z.B. die Prämienstufen A bis C, die als Superbonusstufen bezeichnet werden) oder aber den jeweiligen stufenabhängigen Prozentsatz (siehe nächster Abschnitt) flexibler zu gestalten. Außerdem steht es einem Versicherungsunternehmen frei Selbstbehalte bei Schadensforderungen zu verlangen. Da es somit viele verschiedene BM–Systeme gibt, habe ich mich dazu entschlossen, für die in meiner Diplomarbeit durchgeführten Berechnungen das ursprüngliche BMS heranzuziehen.

1.2 Um- und Einstufungsregelungen

Beruhend auf bestimmten Merkmalen wie z.B der kW- bzw. PS-Zahl werden die Kraftfahrzeuge in sogenannte Tarifgruppen unterteilt. Jede dieser Tarifgruppen hat eine bestimmte Grundprämie, von der ausgehend man, je nachdem in welcher Prämienstufe man sich befindet, einen bestimmten Prozentsatz bezahlen muss. (siehe nachfolgende Tabelle)

Wie aus der Tabelle ersichtlich, muss jemand, der sich in einer der beiden höchsten Stufen befindet, viermal so viel an Prämie bezahlen, wie jemand aus Stufe 0 oder 1. Ausgehend von der Grundprämie sind also im schlimmsten Fall das Doppelte, im besten Fall hingegen nur die Hälfte zu bezahlen.[8]

Prämienstufe	Prozentsätze
0	50%
1	50%
2	60%
3	60%
4	70%
5	70%
6	80%
7	80%
8	100%
9	100%
10	120%
11	120%
12	140%
13	140%
14	170%
15	170%
16	200%
17	200%

Tabelle 1.1: Prozentsatz der Prämie in der jeweiligen Stufe des ursprünglichen BMS

Die Umstufung folgt folgendem Schema:[9]

Nach schadenfreiem Verlauf jedes Zeitraumes vom 1.Oktober bis zum 30.September des folgenden Jahres (Beobachtungszeitraum) wird die Prämie jeweils zur nächsten Hauptfälligkeit (Monat, in dem der Versicherungsvertrag abgeschlossen wurde) ab dem dem Beobachtungszeitraum folgenden 1.Jänner nach der nächst niedrigeren Prämienstufe bemessen.
Ein Beobachtungszeitraum gilt als schadenfrei verlaufen, wenn kein zu berücksichtigender Versicherungsfall eingetreten ist und der Versicherungsvertrag mindestens neun Monate bestanden hat. Bei Neueinstufung in Stufe 9 erfolgt die

Umstufung bereits wenn nur 6 Monate in den ersten Beobachtungszeitraum fallen.
Für jeden zu berücksichtigenden Versicherungsfall wird die Prämie zur nächsten Hauptfälligkeit ab dem dem Beobachtungszeitraum folgenden 1.Jänner um drei Prämienstufen höher als zuvor bemessen, höchstens jedoch bis zur Stufe 17.
Wenn man eine Malus-Einstufung verhindern will, so muss man dem Versicherer innerhalb von 6 Wochen die erbrachte Schadensleistung rückerstatten. Dies kann sich bei kleineren Schäden durchaus rechnen.

Drei Beispiele zur Erklärung:

1. Wird ein KFZ am 01.04.2005 angemeldet, so genügt der Zeitraum bis 30.09.2005 als Beobachtungszeitraum. Somit kommt der KFZ-Haftpflichtvertrag zur nächsten Hauptfälligkeit am 01.04.2006 bei Schadensfreiheit in die B/M-Stufe 08. Bei weiterer Schadensfreiheit gilt bei der nächsten Hauptfälligkeit am 01.04.2007 die B/M-Stufe 07.

2. Wird das KFZ am 15.04.2005 angemeldet, so genügt der Zeitraum bis 30.09.2005 NICHT als Beobachtungszeitraum. Deshalb wird der Beobachtungszeitraum bis 30.09.2006 verlängert. Bei Schadensfreiheit bis zu diesem Datum kommt der KFZ-Haftpflichtvertrag dann bei der nächsten Hauptfälligkeit am 15.04.2007 (eventuell auch der 01.05.2007) in die B/M-Stufe 08. Bei weiterer Schadensfreiheit gilt bei der nächsten Hauptfälligkeit am 15.04.2008 (eventuell ist das auch der 01.05.2008) die B/M-Stufe 07.

3. Wird das KFZ am 01.10.2005 angemeldet, so ist das Versicherungsjahr ident mit dem Beobachtungszeitraum bis 30.09.2006. Somit kommt der KFZ-Haftpflichtvertrag zur nächsten Hauptfälligkeit am 01.10.2006 bei Schadensfreiheit in die B/M-Stufe 08. Bei weiterer Schadensfreiheit gilt bei der nächsten Hauptfälligkeit am 01.10.2007 die B/M-Stufe 07.

1.3 Entwicklung des Bonus-Malus Systems von 1977 bis 1997

Als das Bonus–Malus System 1977 in Österreich eingeführt wurde, mussten natürlich alle Versicherungsnehmer in der Stufe 9 beginnen. Im darauffolgenden Jahr waren dann auf Grund der Umstufungsregelungen lediglich die Stufen 8, 9, 12, 15 und 17 möglich. Erst 1986 war es den ersten Versicherten möglich, die Bonusstufe 0 zu erreichen. Bis 1997 wurde vom Verband der Versicherungsunternehmen Österreichs die nachfolgende Tabelle erstellt, heutzutage gibt es diese leider nicht mehr. Es wird nur mehr ungefähr ermittelt wie viele Personen in den Bonusstufen bzw. in den Malusstufen zu finden sind, wie groß der Prozentsatz in den Stufen 17 und 16, 8 und 9 bzw. 0 und 1 ist.[1]

Prämienstufe	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1990	1995	1996	1997
17		0,00	0,07	0,17	0,22	0,25	0,25	0,26	0,23	0,22	0,14	0,08	0,07	0,06
16				0,03	0,12	0,18	0,15	0,14	0,16	0,16	0,11	0,06	0,06	0,05
15		0,03	0,25	0,26	0,24	0,33	0,37	0,30	0,27	0,28	0,21	0,14	0,12	0,10
14			0,21	0,43	0,36	0,29	0,39	0,44	0,33	0,28	0,22	0,18	0,15	0,13
13				0,23	0,68	0,45	0,31	0,42	0,50	0,36	0,26	0,20	0,19	0,16
12		1,29	1,75	1,04	1,37	1,87	1,34	1,15	1,24	1,33	1,06	0,74	0,68	0,61
11			3,75	2,09	1,25	1,56	2,23	1,53	1,29	1,40	1,17	0,97	0,85	0,76
10				5,04	2,34	1,31	1,58	2,49	1,61	1,33	1,19	1,11	1,01	1,07
9	100,00	30,07	19,88	18,31	21,72	16,89	16,14	15,88	16,57	15,71	15,62	13,98	13,65	11,75
8		68,61	16,06	7,93	7,50	13,31	7,99	6,92	7,21	8,15	7,26	6,14	5,87	5,38
7			58,03	13,26	6,44	6,01	12,64	6,91	5,73	6,02	5,82	5,64	5,38	4,94
6				51,20	11,52	5,46	5,02	12,38	6,23	4,98	5,07	5,40	5,21	5,35
5					46,22	10,14	4,73	4,37	12,19	5,76	4,89	5,00	4,99	4,79
4						41,94	9,06	4,19	3,85	11,96	5,98	4,72	4,65	4,52
3							37,78	8,19	3,75	3,43	5,10	6,09	5,98	5,64
2								34,44	7,43	3,36	4,36	5,01	5,49	5,26
1									31,40	6,79	4,86	4,40	4,55	4,83
0										28,50	36,69	40,15	41,11	44,61

Tabelle 1.2: Verteilung der Versicherten auf die einzelnen Prämienstufen

Kapitel 2

Das diskrete Bonus–Malus–System

2.1 Modellbildung

Es wird von einem *K+1*–stufigen BMS ausgegangen, in welchem sowohl die Prämien $\pi_i, i = 0, \ldots, K$ als auch die Selbstbehalte $d_i, i = 0, \ldots K$ der einzelnen Stufen fixiert sind. Der Übergang von der einen zur anderen Stufe kann entweder zu dikreten Zeiten oder aber zeitstetig (siehe nächstes Kapitel) vollzogen werden.

Für die Prämien π_i und Selbstbehalte d_i gilt Folgendes:

$$0 < \pi_0 < \pi_1 < \cdots < \pi_K \tag{2.1}$$

und

$$0 \leq d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_K. \tag{2.2}$$

Weiters sei für jede Stufe eine Zeitperiode der Länge $T_k (k = 0, \ldots, K)$ definiert. Wenn sich eine Kunde in der Stufe k befindet und innerhalb der Zeitperiode T_k keine Forderung einreicht, so wechselt er nach Ende dieser Periode in eine niedrigere Stufe. Andererseits wechselt er in eine höhere Stufe, sobald er eine Forderung einreicht. Ein Kunde bleibt in der untersten Stufe solange er nicht fordert, und in der höchsten Stufe K solange er Forderungen einreicht. Erst wenn er nach der letzten Forderung innerhalb einer Periode der Länge T_K nicht fordert, kann er in eine niedrigere Stufe wechseln. Es kann vorkommen, dass sich ein Kunde in der Stufe 0 oder der Stufe K sehr lange aufhält. In den übrigen Stufen 1 bis K-1 ist die Verweildauer jedoch höchstens $T_1, T_2, \ldots, T_{K-1}$ Jahre. Im österreichischen

BMS gilt $T_1 = \cdots = T_{K-1} = 1$. Weiters ist aus dem ersten Kapitel bekannt, dass, wenn man eine Forderung einreicht am Ende des Jahres um 3 Stufen hinaufsteigt, wenn man nicht fordert eine Stufe hinab. Somit erhält man für einen gegebenen Kunden eine Folge von Indizes $\{J_n; n \geq 1\}$, welche die Prämienstufen angibt, d.h. $J_n \in \{0, 1, \ldots, K\}$. Im österreichischen BMS ist $K = 17$ und $J_0 = 9$ die Anfangsstufe. Aus der Struktur des BMS geht hervor, dass $\{J_n; n \geq 1\}$ eine Markov–Kette mit K+1 Zuständen beschreibt. (Definition und allgemeine Eigenschaften von Markovketten siehe Anhang A.)

Angenommen ein Kunde, der sich in der Stufe k befindet, verursacht einen Jahresgesamtschaden in der Höhe von X Einheiten. Nun stellt sich die Frage, ob er diesen der Versicherung melden oder ihn selber bezahlen soll. Wenn X kleiner als der in der Stufe k festgelegte Selbstbehalt ist, dann ist es besser, wenn der Kunde den Schaden selber bezahlt. Wenn jedoch $X > d_k$, dann muss sich der Kunde überlegen, ob er fordert oder nicht. Wenn er den Schaden selber bezahlt, dann wechselt er in eine niedrigere Stufe, in der die Prämie geringer ist. Wenn er fordert, dann wechselt er in eine höhere Stufe mit einer höheren Prämie. Er muss sich somit überlegen, wie groß $X - d_k$ im Verhältnis zu dem erwarteten Verlust durch den Wechsel in eine niedrigere Stufe ist. Es geht nun darum, dass ein Kunde sogenannte Schwellwerte $s_0, s_1, \ldots, s_K$ festlegt ($s_k \geq d_k$ für $k = 0, \ldots, K$). Somit wird ein Kunde in Stufe k eine Forderung einreichen, wenn $X > s_k$. Der Vektor der Schwellenwerte $s = (s_0, \ldots, s_K)^t$ wird Strategie genannt.

Bemerkung: Hier werden nur sehr einfache (stationäre) Strategien betrachtet. I.A. können die Schwellwerte von der Vertragsdauer bzw. der Zeit seit Vertragsabschluss abhängen (oder noch allgemeiner von der gesamten ‘"Geschichte‘"bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt, vgl. Kapitel 2.4).

Sei D_n der totale Schaden eines Versicherten im n–ten Jahr, $F(x)$ die kummulative Verteilungsfunktion von D_n. Es wird angenommen, dass F bekannt und die $D_0, D_1, \ldots$ unabhängig identisch verteilt sind.
Die Wahrscheinlichkeit keines Unfalles bzw. keines Schadens innerhalb eines Jahres sei $F(0) = p_{KU}$. $G(x)$ bezeichne die totale jährliche Schadensverteilung unter der Bedingung, dass ein Schaden aufgetreten ist, $G(0) = 0$.

Somit gilt:

$$F(x) = p_{KU} + (1 - p_{KU})G(x), \qquad (x \geq 0). \tag{2.3}$$

Nach einer empirischen Untersuchung von Lemaire [5] kann G als approximativ Gamma–verteilt angenommen werden, d.h.

$$G(x \mid \nu) = (1/\Gamma(\nu)) \int_0^x u^{\nu-1} e^{-u} \mathrm{d}u. \tag{2.4}$$

Dabei bezeichnet $\nu > 0$ den sogenannten Formparameter. Die Gamma–Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} \mathrm{d}t \tag{2.5}$$

und erfüllt

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu), \tag{2.6}$$

$$\Gamma(\nu+1) = \nu!, \qquad \text{falls } \nu \text{ ganzzahlig ist.} \tag{2.7}$$

Die Übergangsmatrix von $\{J_n\}$ hängt vom Vektor $s = (s_0, \ldots, s_K)$ der Schwellwerte ab. Sie wird mit $P(s)$ bezeichnet. Im österreichischen BMS gilt:

$$P_{ij}(s) = \begin{cases} F(s_i), & \text{falls } 0 \leq i \leq K, j = \max(0, i-1) \\ 1 - F(s_i), & \text{falls } 0 \leq i \leq K, j = \min(i+3, K) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Folgenden werden nun optimale Strategien und ihr Zusammenhang mit den Prämien betrachtet. Es wird von einem zufälligen Kunden einer speziellen Population ausgegangen. Deshalb werden alle Funktionen und Parameter als jene der Population betrachtet und als bekannt angenommen.

2.2 Die Gesamtkosten des Versicherten bei unendlicher Laufzeit

Die Kosten, die sich bei einem Schaden im n–ten Jahr für einen Versicherten in Stufe k ergeben, sind

$$r_k(s_k) = \begin{cases} \pi_k + \alpha D_n, & D_n < s_k \\ \pi_k + \alpha d_k, & D_n \geq s_k \end{cases}$$

wobei man entweder den Schaden selbst bezahlt oder den Selbstbehalt der jeweiligen Stufe plus die Prämienrate. α bezeichnet dabei einen Diskontierungsfaktor

$(0 < \alpha < 1)$. Hinter dem Diskontierungsfaktor steht die wirtschaftliche Idee, dass Kosten, die in der Zukunft auftreten, in ihren gegenwärtigen Wert diskontiert werden. Wenn z.B. Kosten im Wert von 3 Einheiten zur Zeit n auftreten, dann haben sie zum Zeitpunkt 0 den Wert $3\alpha^n$. Diskontierte Kosten ermöglichen somit den Vergleich zu verschiedenen Zeitpunkten. $r_k(s_k)$ sind also die Kosten, die sich im k–ten Jahr ergeben, diskontiert auf den Jahresbeginn (an dem die Prämie π_k fällig ist, nicht aber die am Jahresende fälligen Kosten D_k bzw. d_k). Die jährlich zu erwartenden diskontierten Kosten eines Kunden in Stufe k mit Schwellwert s_k sind

$$\begin{aligned} R_k(s_k) = E[r_k(s_k)] &= \pi_k + \alpha E[D_n I_{\{D_n < s_k\}}] + \alpha E[d_k I_{\{D_n \geq s_k\}}] = \\ &= \pi_k + \alpha \int_0^{s_k} x \mathrm{d}F(x) + \alpha d_k (1 - F(s_k)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aus 2.8 folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} R_k(s_k) &= \pi_k + \alpha d_k - \alpha d_k F(s_k) + \alpha \int_0^{s_k} x \mathrm{d}F(x) \\ &= \pi_k + \alpha d_k - \alpha d_k F(s_k) + \alpha [x F(x) \mid_0^{s_k} - \int_0^{s_k} F(y) \mathrm{d}y] \\ &= \pi_k + \alpha d_k - \alpha d_k F(s_k) + \alpha s_k F(s_k) - \alpha \int_0^{s_k} F(y) \mathrm{d}y \\ &= \pi_k + \alpha d_k - \alpha F(s_k)(d_k - s_k) - \alpha \int_0^{s_k} F(y) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sei $R(s)$ der $K+1$-dimensionale Vektor mit Elementen $R_k(s_k), k = 0, \ldots, K$. Bezeichne $C_i(s)$ die zu erwartenden zukünftigen diskontierten Gesamtkosten, wenn man sich in Stufe i befindet, d.h.

$$C_i(s) = E[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n R_{J_n}(s_{J_n}) | J_0 = i]. \tag{2.10}$$

Dann gilt

$$C_i(s) \quad = \quad R_i(s_i) + E[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n R_{J_n}(s_{J_n}) | J_0 = i]$$

$$
\begin{aligned}
&= R_i(s_i) + \sum_{j\in\{0,\ldots,K\}} P_{ij} E[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n R_{J_n}(s_{J_n}) | J_1 = j] \\
&= R_i(s_i) + \alpha \sum_{j\in\{0,\ldots,K\}} P_{ij} C_j(s).
\end{aligned}
$$

Fasst man die $C_i(s)$ zu einem Vektor $C(s) = (C_0(s), \ldots, C_K(s))$ zusammen, ist das obige Gleichungssystem äquivalent mit der Matrix–Gleichung

$$
(I - \alpha P)C(s) = R(s). \tag{2.11}
$$

Aus der nachfolgenden Proposition 2.1 folgt, dass $I - \alpha P$ für $0 < \alpha < 1$ stets invertierbar ist. Man erhält

$$
C(s) = (I - \alpha P)^{-1} R(s). \tag{2.12}
$$

Proposition 2.1: Ist P die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer endlichen Markovkette und $\alpha \in [0, 1)$, dann ist $I - \alpha P$ stets invertierbar.
Beweis: Mit P ist auch P^n für jedes $n \geq 0$ eine stochastische Matrix und hat daher Zeilensummennorm 1. Daraus folgt, dass für $\alpha \in [0, 1)$ $R = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n$ konvergent ist. Wegen $R(I - \alpha P) = (I - \alpha P)R = I$ ist R zu $I - \alpha P$ invers. *q.e.d.*

Das Gleichungssystem (2.11) ist ident zu dem aus der Arbeit von Zacks, Levikson. Es kann jedoch auch auf eine etwas andere Art hergeleitet werden. Diese im Folgenden beschriebene Methode lässt sich auf das zeitsteige BMS übertragen.

Bezeichne mit S_n den Schaden im n–ten Jahr, X_n die diskontierten Gesamtkosten des Versicherten ab dem Jahr n (diskontiert auf den Beginn des Jahres n) und J_n der Stufe des Versicherten im Jahr n. Dann werden die Kosten des sich in der k-ten Stufe befindenden Versicherten wie folgt bestimmt.

$$
\begin{aligned}
C_k &= \pi_k + E[X_1 | J_1 = k] \\
&= \pi_k + P(S_1 = 0 | J_1 = k) E[\alpha X_2 | S_1 = 0, J_1 = k] \\
&\quad + P(S_1 > s_k | J_1 = k) E[\alpha d_k + \alpha X_2 | S_1 > s_k, J_1 = k] \\
&\quad + P(0 < S_1 \leq s_k | J_1 = k) E[\alpha S_1 + \alpha X_2 | 0 < S_1 \leq s_k, J_1 = k]
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Da $S_1 = 0$, $S_1 > s_k$ und $0 < S_1 \leq s_k$ unabhängig von $J_1 = k$ sind, folgt

$$P(S_1 = 0 | J_1 = k) = P(S_1 = 0) = F(0) \tag{2.14}$$

$$P(S_1 > s_k | J_1 = k) = P(S_1 > s_k) = 1 - F(s_k) \tag{2.15}$$

und

$$P(0 < S_1 \leq s_k | J_1 = k) = F(s_k) - F(0). \tag{2.16}$$

Weiters gilt, dass die Bedingung $S_1 = 0, J_1 = k$ äquivalent mit der Bedingung $J_2 = max(k-1, 0), J_1 = k$ ist und somit gilt auf Grund der Markoveigenschaft

$$E[\cdot | S_1 = 0, J_1 = k] = E[\cdot | J_2 = max(k-1, 0)]. \tag{2.17}$$

Ähnlich dazu überlegt man sich, dass

$$E[\cdot | S_1 > s_k, J_1 = k] = E[\cdot | J_2 = min(k+3, K)] \tag{2.18}$$

und

$$E[\cdot | 0 < S_1 \leq s_k, J_1 = k] = E[\cdot | J_2 = max(k-1, 1)]. \tag{2.19}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} C_k &= \pi_k + F(0)\alpha E[X_2 | J_2 = max(k-1,0)] \\ &\quad + (1 - F(s_k))(\alpha d_k + \alpha E[X_2 | J_2 = min(k+3, K)] \\ &\quad + (F(s_k) - F(0))(\alpha E[S_1 | 0 \leq S_1 \leq s_k] + \alpha E[X_2 | J_2 = max(k-1, 0)] \\ &= \pi_k + F(0)\alpha C_{(k-1)\vee 0} + (1 - F(s_k))(\alpha d_k + \alpha C_{(k+3)\wedge K}) \\ &\quad + (F(s_k) - F(0))(\alpha E[S_1 | 0 \leq S_1 \leq s_k] + \alpha C_{(k-1)\vee 0}) \end{aligned}$$

Als nächster Schritt muss nun noch $E[S_1 | 0 \leq S_1 \leq s_k]$ bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
E[S_1|0 \leq S_1 \leq s_k] &= \frac{1}{P(S_1 \in (0, s_k])} \int_{0 \leq S_1 \leq s_k} S_1 \mathrm{d}P \\
&= \frac{1}{F(s_k) - F(0)} \int_{(0,s_k]} x \mathrm{d}P_{S_1}(x) \\
&= \frac{1}{F(s_k) - F(0)} \int_{(0,s_k]} x \mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{1}{F(s_k) - F(0)} (1-p) \int_{(0,s_k]} x \mathrm{d}G(x)
\end{aligned}
$$

Zusammen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
C_k &= F(s_k)\alpha C_{(k-1)\vee 0} + (1 - F(s_k))\alpha C_{(k+3)\wedge K} \\
&\quad + \pi_k + \alpha(1-p) \int_{(0,s_k]} x \mathrm{d}G(x) + \alpha d_k (1 - F(s_k)). \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Wegen (2.8) folgt daraus wiederum (2.11).

2.3 Die Gesamtkosten der Versicherung bei unendlicher Laufzeit

Ähnlich zu der Bestimmung der Kosten des Versicherten bei unendlicher Laufzeit bezeichne auch hier S_n den Schaden im n–ten Jahr, X_n die diskontierten Gesamtkosten der Versicherung ab dem Jahr n (diskontiert auf das Jahr n) und J_n die Stufe des Versicherten im Jahr n. Dann werden die Kosten für die Versicherung von einem sich in der k-ten Stufe befindenden Versicherten wie folgt bestimmt. Mit den gleichen Überlegungen wie vorhin gilt

$$
\begin{aligned}
V_k &= E[X_1|J_1 = k] \\
&= P(S_1 \leq s_k|J_1 = k)E[X_1|S_1 \leq s_k, J_1 = k] \\
&\quad + P(S_1 > s_k|J_1 = k)E[X_1|S_1 > s_k, J_1 = k] \\
&= F(s_k)E[\alpha X_2|S_1 \leq s_k, J_1 = k] \\
&\quad + (1 - F(s_k))E[\alpha(S_1 - d_k + X_2)|S_1 > s_k, J_1 = k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F(s_k)\alpha E[X_2|J_2 = max(k-1,1)] \\
&\quad +(1-F(s_k))(-\alpha d_k + \alpha E[X_2|J_2 = min(k+1,K)] \\
&\quad +\alpha E[S_1|S_1 > s_k, J_1 = k] \\
&= F(s_k)\alpha V_{(k-1)\vee 1} + \alpha(1-F(s_k))(V_{(k+1)\wedge K} - d_k) \\
&\quad +(1-F(s_k))\alpha E[S_1|S_1 > s_k].
\end{aligned}
$$

Auch hier muss noch $E[S_1|S_1 > s_k]$ bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
E[S_1|S_1 > s_k] &= \frac{1}{P(S_1 > s_k)} \int_{S_1 > s_k} S_1 \mathrm{d}P \\
&= \frac{1}{1-F(s_k)} \int_{s_k}^{\infty} x \mathrm{d}F_{S_1}(x) \\
&= \frac{1-p}{1-F(s_k)} \int_{s_k}^{\infty} x \mathrm{d}G(x)
\end{aligned}
$$

Somit erhält man für $0 \leq k \leq K$

$$
V_k = \alpha F(s_k) V_{(k-1)\vee 0} + \alpha(1-F(s_k))(V_{(k+3)\wedge K} - d_k) + \alpha(1-p)\int_{s_k}^{\infty} x \mathrm{d}G(x) \quad (2.21)
$$

oder

$$
V_k = \alpha F(s_k) V_{(k-1)\vee 0} + \alpha(1-F(s_k)) V_{(k+3)\wedge K} + (R_k(s_k) - \pi_k). \quad (2.22)
$$

In Matrixschreibweise

$$
(I - \alpha P)V(s) = R(s) - \pi \quad (2.23)
$$

oder

$$
V(s) = (I - \alpha P)^{-1}(R(s) - \pi). \quad (2.24)
$$

In der Arbeit von Zacks und Levikson wurde bei der Herleitung des Gleichungssystems (2.21) beim bedingten Erwartungswert $E[S_1|S_1 > s_k]$ der Faktor $\frac{1-p}{1-F(s_k)}$ vergessen. Welche Auswirkungen dies auf die Kosten hatte, wird in Kapitel 5 besprochen.

2.4 Diskrete stochastische dynamische Programmierung

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die stochastische dynamische Programmierung gegeben. Als Quelle diente das Buch von Heyman [3].

2.4.1 Einführung

Die stochastische dynamische Programmierung wird auch Markovsches Entscheidungsproblem (MEP) genannt.

- Zuständen: Sie werden benötigt um die aktuelle Bedingung des Systems zu beschreiben. Der Zustandsraum S ist eine endliche Menge und bezeichnet die Menge aller Systemzustände. Für das BMS sind die Zustände gleich den Stufen des BMS, also $S = \{0 \ldots, K\}$.

- Aktionen: Sie stehen dem Kunden zur Verfügung und hängen vom aktuellen Zustand des Sytems ab. Bezeichne $A_i \neq \emptyset$ die Menge der im Zustand i zur Verfügung stehenden Aktionen. $A = \bigcup_{i \in S} A_i$ bezeichne die Menge aller Aktionen, $D := \bigcup_{i \in S} \{i\} \times A_i$ die Menge der in den Zuständen i gewählten Aktionen. Im BMS gilt $A_i = [d_i, \infty)$. Wenn die Aktion $a \in A_i$ gewählt wird, so bedeutet dies, dass ein Schwellwert a festgelegt wird und nur Jahresgesamtschäden X mit $X \geq a$ gemeldet werden.

- Kosten: Die Kostenfunktion $C : D \to \mathbb{R}$ mit $C(i, a)$ den Einschrittkosten oder jährlichen Kosten, wenn im Zustand i die Aktion a gewählt wird. Im BMS gilt $C(i, a) = R_i(a)$. (Weiters gibt es bei einem Markovschen Entscheidungsproblem sogenannte terminale Kosten $u : S \to \mathbb{R}$, sie sind im BMS jedoch $u \equiv 0$.)

- Übergangswahrscheinlichkeitsverteilung: Sie hängt sowohl vom aktuellen Zustand, als auch von der gewählten Aktion, nicht jedoch von der Zeit ab. Jedem $(i, a) \in D$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung $(P_{ij}(a))_{j \in S}$ zugeordnet (d.h. $P_{ij}(a) \geq 0$, $\sum_{j \in S} P_{ij}(a) = 1$). Im BMS sieht dies wie folgt aus (mit F der Verteilungsfunktion des Jahresgesamtschadens):

$$P_{ij}(a) = \begin{cases} F(a), & j = \max(i-1, 0) \\ 1 - F(a), & j = \min(i+3, K) \\ 0, & sonst \end{cases} \qquad (0 \leq i, j \leq K)$$

- Entscheidungszeitpunkte: Sie geben an, zu welchen Zeitpunkten eine Entscheidung getroffen wird und werden mit $t \in T$ bezeichnet. Wir werden uns mit dem Fall beschäftigen in dem T diskret ist, also $t = 1, 2, \dots N$ für endlichen Zeithorizont bzw. $t = 1, 2, \dots$ für unendlichen Zeithorizont.
- Optimalitätskriterien: Wir werden die diskontierten Gesamtkosten bei eindlichem und unendlichem Zeithorizont als Optimalitätskriterien heranziehen. Zu ihrer Formulierung benötigen wir noch einige Begriffe.

Definition 2.2 *Betrachtet man den Verlauf der Entwicklung bis zum Zeitpunkt n, dann werden nacheinander die Zustände $i_0, i_1, \dots, i_n$ durchlaufen und Aktionen $a_0, \dots, a_{n-1}$ ausgewählt.*

$$(i_0, a_0, \dots, i_{n-1}, a_{n-1}, i_n) \tag{2.25}$$

heißt Vorgeschichte zur Zeit n. Sei $\mathbb{H}_n$ die Menge aller möglichen Vorgeschichten zur Zeit n. Die Auswahl einer Aktion zum Zeitpunkt n wird durch eine Entscheidungsfunktion

$$f : \mathbb{H}_n \to A \tag{2.26}$$

mit $f((i_0, \dots, i_n)) \in A_{i_n}$ beschrieben. Sei $\mathbb{F}_n$ die Menge aller Entscheidungsfunktionen zur Zeit n.

Definition 2.3 *(i) Eine (deterministische) Strategie ist eine Folge $\delta = (\delta_n)_{n \geq 0}$ von Entscheidungsfunktionen $\delta_n \in \mathbb{F}_n$. Die Menge aller Strategien wird mit Δ bezeichnet. Für das BMS bedeutet dies, dass die Schwellwerte in Abhängigkeit der Zeit und der gesamten Vorgeschichte gewählt werden.*
(ii) Eine Strategie heißt Markovsch, wenn die Auswahl der Aktion nur vom Zeitpunkt und vom gegenwärtigen Zustand abhängt, d.h. $\delta = (\delta_n)_{n \geq 0}$ mit

$$\delta_n(i_0, a_0, \dots, i_{n-1}, a_{n-1}, i_n) = \tilde{\delta}_n(i_n) \tag{2.27}$$

mit

$$\tilde{\delta}_n \in \mathbb{F}_0 := \{f : S \to A \text{ mit } f(i) \in A_i \text{ für alle i}\}. \tag{2.28}$$

Im BMS werden die Schwellwerte somit in Abhängigkeit von der Zeit und dem gegenwärtigen Zustand gewählt.

(iii) Eine Strategie heißt stationär, wenn die Auswahl der Aktion nur vom gegenwärtigen Zustand abhängt, d.h. $\delta_n(i_0, \ldots, i_n) = f(i_n)$ für alle $n \geq 1$ mit $f \in \mathbb{F}_0$. Für die Schwellwerte im BMS bedeutet dies, dass sie unabhängig von der Zeit nur in Abhängigkeit von der gegenwärtigen Stufe gewählt werden. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Theorie von MEP´s für unendlichen Zeithorizont.[7]

Angenommen das System (bzw. ein Kunde) befindet sich zur Zeit t im Zustand $i \in S_t$, wobei mit S_t die möglichen Zustände zur Zeit t bezeichnet werden. Wenn das System die Aktion $a \in A_i$ wählt, so erhält das System ein unmittelbares Entgelt und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den nächsten Zustand des Systems ist festgesetzt. Dieses Entgelt wird mit $r_t(i, a)$ bezeichnet. Ein negatives $r_t(i, a)$ wird Kosten genannt. $r_t(i, a)$ wird erwartetes Entgelt genannt, wenn das Entgelt der aktuellen Periode vom Zustand des Systems zum nächsten Entscheidungszeitpunkt abhängt. In diesem Fall bezeichnet $r_t(i, a, j)$ das erhaltene Entgelt zum Zeitpunkt t, wenn der Zustand des Systems zur Zeit t i ist, Aktion $a \in A_i$ gewählt wird und das System zur Zeit $t + 1$ im Zustand j ist. Das erwartete Entgelt zur Zeit t ist

$$r_t(i, a) = \sum_{j \in S_{t+1}} r_t(i, a, j) p_t(j|i, a) \tag{2.29}$$

mit $p_t(j|i, a)$ der Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand $j \in S_{t+1}$ ist, wenn die Aktion $a \in A_{i,t}$ im Zustand i zur Zeit t gewählt wurde. Im österreichischen BMS gilt

$$\sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i, a) = 1. \tag{2.30}$$

Wie in der Definition von stationären Strategien kurz erwähnt, spielen sie eine sehr wichtige Rolle in Problemstellungen für unendlichen Zeithorizont. Das bedeutet, dass die Menge der Zustände, die Menge der für einen bestimmten Zustand erlaubten Aktionen, das Entgelt, die Übergangsfunktionen und die Menge der Entscheidungsfunktionen für jeden Zustand dieselben sind. Somit kann der Index t weggelassen werden. Unter der Voraussetzung, dass alle Daten stationär sind und mit $f \in \mathbb{F}_0$ einer zufälligen Entscheidungsfunktion, seien $r_f(i) = r(i, f(i))$ und $p_f(j|i) = p(j|i, f(i))$ die Ein–Perioden–Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. das Ein–Perioden–Entgelt, wenn sich das System im Zustand i befindet und die mit der Entscheidungsfunktion $f(i)$ zusammenhängende Aktion gewählt wurde. Dann gilt

$$r_f(i) = \sum_{a \in A_i} r(i, a) P(f(i) = a) \tag{2.31}$$

und

$$p_f(j|i) = \sum_{a \in A_i} p(j|i,a) P(f(i) = a). \tag{2.32}$$

Für die n–Schritt Übergangswahrscheinlichkeit gilt, mit X_t einer Zufallsvariablen, die den Zustand des Systems zur Zeit t angibt, und $f(j) = \delta(i, \ldots, j)$ der gewählten stationären Strategie:

$$\begin{aligned} P_{ij}^n(f) &= \sum_{k_1 \in S} P_{ik_1}(f) \sum_{k_2 \in S} P_{k_1 k_2}(f) \cdots \sum_{k_{t-1} \in S} P_{k_{t-1} j}(f) \\ &= P_f(X_n = j \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Das Optimalitätskriterium der erwarteten diskontierten Kosten für endlichen Zeithorizont

Wir betrachten das Entscheidungsproblem nur bis zum Zeitpunkt $N+1$. Sei H_t die Vorgeschichte zur Zeit $t, t = 1, \ldots, N+1$ und $A_t = \bigotimes_{i \in S_t} A_{i,t}$. Dann ist

$$\begin{aligned} H_1 &= \{S_1\}, \\ H_t &= \{S_1, A_1, S_2, \ldots, A_{t-1}, S_t\} \\ &= \{H_{t-1}, A_{t-1}, S_t\}, \qquad t = 2, \ldots N+1. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass H_t induktiv durch Terme von H_{t-1} definiert werden kann und somit für $h_t \in H_t, h_t = (i_1, a_1, i_2, \ldots, a_{t-1}, i_t) = (h_{t-1}, a_{t-1}, i_t)$ mit $h_{t-1} \in H_{t-1}$.

Sei $\delta = (\delta_n)_{n \geq 0}$ eine von der Vorgeschichte abhängige Strategie, mit $\delta_n \in \mathbb{F}_n$. Wenn eine Strategie δ gewählt und eine Vorgeschichte realisiert wird, so bezeichne mit H_t^δ die zugehörige Vorgeschichte. Sei $v_N^\delta(i)$ gleich dem erwarteten Gesamtentgelt über den Planungshorizont, falls die Strategie δ verwendet wurde und sich das System zum ersten Entscheidungszeitpunkt im Zustand i befunden hat. Diese ist gegeben durch

$$v_N^\delta(i) = E_{\delta,i}[\sum_{t=1}^{N} r_t(X_t^\delta, f_t(H_t^\delta)) + r_{N+1}(X_{N+1}^\delta)] \tag{2.33}$$

wobei mit X_t^δ der Zustand des Systems zur Zeit t unter der Strategie δ bezeichnet wird und $E_{\delta,i}$ den Erwartungswert in Abhängigkeit von der Stratgie δ und dem Zustand i beschreibt. Unter der Bedingung, dass $r_t(i,a)$ für $(i,t) \in S_t \otimes A_{i,t}$ begrenzt ist, existiert $v_N^\delta(i)$ und ist für alle Strategien δ und jedes $N < \infty$ begrenzt. Im Fall von diskontierten Kosten ist der Diskontierungsfaktor in obige Summation einzuführen. Dies ändert an den weiteren Aufführungen jedoch nichts.

Die Aufgabe des Kunden ist es nun zum Zeitpunkt 1 eine Strategie $\delta \in \Delta$, mit Δ der Menge aller Strategien, mit größtem erwarteten Entgelt festzulegen. Wenn sowohl S_t als auch $A_{s,t}$ endlich sind, gibt es nur endlich viele Strategien. Somit ist garantiert, dass so eine Strategie existiert und gefunden werden kann. Also besteht die Aufgabe des Kunden nun darin, eine Strategie δ^* zu finden, sodass

$$v_N^{\delta^*}(i) = \max_{\delta\in\Delta} v_N^\delta(i) \equiv v_N^*(i), \qquad i \in S_1. \tag{2.34}$$

Die Strategie δ^* wird optimale Strategie und $v_N^*(i)$ wird optimale Wertfunktion genannt.

Besteht die Aufgabe eines Kunden nun darin, Kosten zu minimieren, wie es im österreichischen BMS der Fall ist, so überlegt man sich folgendes. Sei $V_N^\delta(i) = -v_N^\delta(i)$. Finde δ^* mit

$$-v_N^{\delta^*}(i) = V_N^{\delta^*}(i) = -max(-v_N^\delta(i)) = min(V_N^\delta(i)). \tag{2.35}$$

Sei nun $\delta = (\delta_n)_{n\geq 0}$ eine von der Vorgeschichte abhängige Strategie. Für jedes t definiere das erwartete, zu den Zeitpunkten $t, t+1, \ldots N+1$ erhaltene Entgelt, wenn die Vorgeschichte zur Zeit t $h_t \in H_t$ ist, durch

$$u_t^\delta(h_t) = E_{\delta,h_t}[\sum_{n=t}^{N+1} r_n(X_n^\delta, \delta_n(H_n^\delta))]. \tag{2.36}$$

Man beachte, dass $u_1^\delta = v_N^\delta$. Sei nun

$$u_t^*(h_t) = sup_{\delta\in\Delta} u_t^\delta(h_t). \tag{2.37}$$

Im Fall der Minimierung von Kosten definiert man wie vorhin ein U_t^δ mit $U_t^\delta = -u_t^\delta$, sodass

$$U_t^*(h_t) = inf_{\delta\in\Delta} U_t^\delta(h_t). \tag{2.38}$$

Die Optimalitätsgleichungen der dynamischen Programmierung werden auch als Bellman–Gleichungen bezeichnet und sind Grundlage für den später betrachteten Rückwärts–Induktionsalgorithmus. Sie sind gegeben durch

$$u_t(h_t) = sup_{a\in A_{i,t}}\{r_t(i_t,a) + \sum_{j\in S_{t+1}} p_t(j|i_t,a)u_{t+1}(h_t,a,j)\}. \tag{2.39}$$

Für $U_t^\delta = -u_t^\delta$ gilt

$$U_t(h_t) = inf_{a\in A_{i,t}}\{-r_t(i_t,a) + \sum_{j\in S_{t+1}} p_t(j|i_t,a)U_{t+1}(h_t,a,j)\} \tag{2.40}$$

für $t = 1,\ldots,N$ und $h_t \in H_t$. Falls $t = N+1$ so ist $u_{N+1} = r_{N+1}$ begrenzt. Wenn das Supremum (Infimum) erreicht werden kann, z.B. wenn alle $A_{i,t}$ endlich sind, was im österreichischen BMS der Fall ist, so kann stattdessen das Maximum (Minimum) verwendet werden. Eine Lösung des Gleichungssystems (2.39) ist eine Folge von Funktionen $u_t : H_t \to A_t, t = 1,\ldots,N$ mit der Eigenschaft, dass u_N die N–te Gleichung erfüllt, u_{N-1} die $(N-1)$–te Gleichung mit dem u_N, welches die N–te Gleichung erfüllt auf der rechten Seite der $(N-1)$–ten Gleichung. Diese Gleichungen haben einige wichtige und brauchbare Eigenschaften:

1. Die Lösungen der Optimalitätsgleichungen sind die optimalen Ergebnisse von t an für alle t.
2. Sie bieten hinreichende Bedingungen um zu bestimmen ob eine Strategie optimal ist.
3. Sie liefern ein effizientes Verfahren zur Bestimmung der optimalen Ergebnisfunktionen und Strategien.
4. Sie können dazu verwendet werden um theoretische Eigenschaften von Strategien und Ergebnisfunktionen festzulegen.

Satz 2.4 Angenommen u_t ist eine Lösung von (2.39) für $t = 1,\ldots N$ und $u_{N+1} = r_{N+1}$. Dann gilt

1. $u_t(h_t) = u_t^*(h_t)$ für alle $h_t \in H_t$, $t = 1,\ldots N+1$, und

2. $u_1(i_1) = v_N^*(i_1)$ für alle $i_1 \in S_1$.

Hierbei wurden keine Voraussetzungen an den Zustandsraum gestellt und das Ergebnis ist gültig, wann immer die Summation in (2.39) definiert ist. Das zweite Ergebnis besagt, dass die optimale Wertfunktion beginnend zum Zeitpunkt 1 die optimale Wertfunktion für das N Periodenproblem darstellt.

Der nächste Satz zeigt, wie die Optimalitätsgleichung dazu verwendet werden kann, optimale Strategien zu finden, wenn das Maximum auf der rechten Seite der Optimalitätsgleichung erreicht wird.

Satz 2.5 Angenommen $u_t^*, t = 1, \dots N$ sind Lösungen der Optimalitätsgleichung (2.39) und $u_{N+1} = r_{N+1}$. Definiere die Strategie $\delta^* = (\delta_n^*)_{(1 \leq n \leq N)}$ für $t = 1, \dots N$ durch

$$\begin{aligned} r_t(s_t, \delta_t^*(h_t)) &+ \sum_{j \in S_{t+1}} p_{t+1}(j|i_t, \delta_t^*(h_t)) u_{t+1}^*(h_t, \delta_t^*(h_t), j) \\ &= max_{a \in A_{i,t}} \{ r_t(i_t, a) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i_t, a) u_{t+1}^*(h_t, a, j) \}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Dann:

1. δ^* ist eine optimale Strategie und

$$v_N^{\delta^*}(i) = v_N^*(i), \qquad i \in S_1 \tag{2.42}$$

2. Für jedes $t = 1, 2, \dots N + 1$ sei

$$u_t^{\delta^*}(h_t) = u_t^*(h_t), \qquad h_t \in H_t. \tag{2.43}$$

Die Gleichung (2.41) wird oft ausgedrückt als

$$\delta_t^*(h_t) = argmax_{a \in A_{i,t}} \{ r_t(i_t, a) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i_t, a) u_{t+1}^*(h_t, a, j) \}. \tag{2.44}$$

Dieser Satz besagt, dass eine optimale Politik gefunden werden kann, wenn man zuerst die Optimalitätsgleichungen löst und danach für jede Vorgeschichte eine Entscheidungsfunktion annimmmt, die eine Aktion wählt, welche das Maximum auf der rechten Seite von (2.41) erreicht. Der zweite Teil dieses Satzes ist als „Das Prinzip der Optimalität“bekannt: *Eine optimale Politik hat die Eigenschaft, dass egal wie der Anfangszustand und wie die Anfangsentscheidung lauten, die verbleibenden Entscheidungen eine optimale Politik festlegen müssen unter Berücksichtigung des Zustandes, der durch die erste Entscheidung resultiert.* Die Strategie δ^* erfüllt diese Eigenschaft.

Satz 2.6 Seien $u_t, t = 1, \dots N$ mit $u_{N+1} = r_{N+1}$ Lösungen von (2.39). Wenn $u_{N+1}(h_{N+1})$ von h_{N+1} nur durch i_{N+1} abhängt, so gilt:

1. für jedes $t = 1, \dots N$ hängt $u_t(h_t)$ von h_t nur durch i_t ab, und
2. es existiert eine optimale deterministische Markovsche Strategie.

Die Idee des Beweises, der mittels Induktion geführt wird ist folgende: Wenn für einige n u_{n+1} von der Vorgeschichte nur durch den aktuellen Zustand abhängt, dann hängen die maximierenden Aktionen und u_n von der Vorgeschichte nur vom aktuellen Zustand ab.

Für den nun folgenden Rückwärtsinduktionsalgorithmus wird angenommen, dass das Maximum in (2.39) erreicht wird. Die Ergebnisse aus Satz 2.6 erlauben die Einschränkung auf deterministische Markovsche Strategien.

1. Setze t = N+1 und bestimme
$$u_t(i_t) = r_t(i_t) \qquad i_t \in S_t. \tag{2.45}$$
2. Substituiere *t-1* für *t* und berechne $u_t(i_t)$ für jedes $i_t \in S_t$ durch
$$u_t(i_t) = max_{a \in A_{i,t}} \{r_t(i_t, a) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i_t, a) u_{t+1}(s_t)\}. \tag{2.46}$$
Bestimme $a_{i_t,t}$ durch
$$a_{i_t,t} = argmax_{a \in A_{i_t,t}} \{r_t(i_t, a) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i_t, a) u_{t+1}(i_t)\}. \tag{2.47}$$
3. Falls *t = 1*, STOP. Sonst gehe zurück zu Schritt 2.

Eine unmittelbare Konsequenz von Satz 2.4 ist, dass $u_1 = v_N^*$ und $u_t = u_t^*$ für alle t. Somit findet dieser Algorithmus die optimalen Entgeltfunktionen und alle optimalen Strategien. Eine einzelne optimale Strategie kann gefunden werden, wenn man sich im Schritt 2 darauf beschränkt eine einzige Aktion zu erhalten (an Stelle von allen Aktionen), die das *arg max* erreicht.

Mit $U_t(h_t) = -u_t(h_t)$ kann der Rückwärtsinduktionsalgorithmus auch im Fall der Minimierung verwendet werden.

Das Optimalitätskriterium der erwarteten diskontierten Kosten für unendlichen Zeithorizont

Für den unendlichen Fall wird angenommen, dass die Daten des Problems stationär sind und dass S entweder endlich oder abzählbar sei. Diese Voraussetzungen werden vom österreichischen BMS beide erfüllt.

In einem stationären Markovschen Entscheidungsprozess für unendlichen Zeithorizont, induziert jede Strategie $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots)$ einen bivariaten stochastischen Prozess in diskreter Zeit, $\{[X_t^\delta, r(X_t^\delta, \delta_t(X_t^\delta))]; t = 1, 2, \ldots\}$. Die erste Komponente X_t^δ bezeichne den Zustand des Systems zur Zeit t und die zweite Komponente das zu erhaltende Entgelt, wenn das System im Zustand X_t^δ ist und die Entscheidungsfunktion $\delta_t(X_t^\delta)$ verwendet wurde.

Für die weiteren Ausführungen wird angenommen, dass das Entgelt beschränkt ist:

$$sup_{i \in S} sup_{a \in A_i} |r(i, a)| = M < \infty. \tag{2.48}$$

Da dieses Entgelt auch nach unten beschränkt ist, da es größer gleich 0 ist, ist es beidseitig beschränkt und somit gilt die Beschränkung auch für das $\inf_{i \in S} \inf_{a \in A_i}$. Um eine unendliche Folge von Entgelten oder erwarteten Entgelten zu evaluieren, bedarf es einer gewissen Art der Konvergenz. Solange S als diskret angenommen wird, werden die Grenzwerte punktweise genommen. Eine Methode um einen Wert für eine fixe Strategie zu liefern ist mittels dem erwarteten diskontierten Entgelt einer Strategie δ. Es wird definiert als

$$v_\lambda^\delta(i) = E_{\delta,i}[\sum_{t=1}^{\infty} \lambda^{t-1} r(X_t^\delta, \delta_t(X_t^\delta))] \tag{2.49}$$

für $0 \leq \lambda < 1$. Man beachte, dass $v^\delta = \lim_{\lambda \uparrow 1} v_\lambda^\delta$, wenn der Grenzwert existiert. Aus der Bedingung, dass $r(i, a)$ beschränkt ist, folgt dass $|v_\lambda^\delta(i)| < (1 - \lambda)^{-1} M$ für alle $i \in S$ und $\delta \in \Delta$.

Das Optimalitätskriterium bei unendlichem Zeithorizont im Fall von diskontierten Entgelten sieht folgendermaßen aus: Eine Politik δ^* heißt diskont–optimal, wenn für ein fixes $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$

$$v_\lambda^{\delta^*}(i) \geq v_\lambda^\delta(i) \text{ für alle } i \in S \text{ und alle } \delta \in \Delta. \tag{2.50}$$

Hierbei ist der Wert des MEP´s gleich

$$v_\lambda^*(i) = sup_{\delta \in \Delta} v_\lambda^\delta(i). \tag{2.51}$$

Bezeichne mit $f = (d, d, \ldots) \in \mathbb{F}_0$ die Menge der optimalen stationären Strategien. Die Bellman–Gleichung lautet

$$v(i) = sup_{a \in A_i}\{r(i,a) + \sum_{j \in S} \lambda p(j|i,a) v(j)\}, \qquad i \in S \tag{2.52}$$

und in Vektornotation

$$v = sup_{f \in \mathbb{F}_0}\{r_f + \lambda P_f v\}. \tag{2.53}$$

Auch hier gilt, dass wenn das Supremum erreicht werden kann, z.B. wenn A_i endlich ist, kann es durch das Maximum ersetzt werden. Mit V dem Raum der beschränkten reellwertigen Wertfunktionen auf S mit Supremumsnorm $\parallel v \parallel = sup_{i \in S}|v(i)|$ definieren wir den Operator $T : V \to V$ durch

$$Tv \equiv sup_{f \in \mathbb{F}_0}\{r_f + \lambda P_f v\}, \qquad v \in V \tag{2.54}$$

und für alle $f \in \mathbb{F}_0$ definiert man den Operator $T_f : V \to V$ durch

$$T_f v \equiv r_f + \lambda P_f v. \tag{2.55}$$

Wenn man die beiden Schreibweisen der Bellman´schen Gleichung miteinander vergleicht, dann kann die Optimalitätsgleichung als $v = Tv$ geschrieben werden. Somit ist die Lösung v der Optimalitätsgleichung ein Fixpunkt von T. Die Haupteigenschaften der Optimalitätsgleichung sind die folgenden:

1. Wenn es eine Lösung der Optimalitätsgleichung gibt, so ist sie gleich dem Wert des diskontierten MEP´s.

2. Der Wert des diskontierten MEP´s erfüllt die Optimalitätsgleichung.

3. Die Lösung der Optimalitätsgleichung ist eindeutig.

Proposition 2.7 Für jede stationäre Strategie f ist v_λ^f die eindeutige Lösung von

$$v = r_f + \lambda P_f v = T_f v. \tag{2.56}$$

Weiters gilt

$$v_\lambda^f = (I - \lambda P_f)^{-1} r_f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} P_f^{n-1} r_f. \tag{2.57}$$

Satz 2.8 Angenommen $v \in V$ erfüllt

$$v \geq (\leq) sup_{f \in \mathbb{F}_0} \{r_f + \lambda P_f v\}. \tag{2.58}$$

Dann gilt $v \geq (\leq) v_\lambda^*$.

Solange irgendeine Lösung der Optimalitätsgleichung beide Ungleichungen erfüllt, ist sie gleich der Wertfunktion und somit eindeutig.

Satz 2.9 Wenn die Gleichung $v = Tv$ eine Lösung besitzt, dann ist sie eindeutig und gleich v_λ^*.

Wann existiert nun eine optimale Strategie? Die Bedingungen, dass eine Lösung der Optimalitätsgleichung existiert und dass das Supremum in der Bellman´schen Gleichung erreicht wird, sind hinreichend dafür, dass es eine deterministische stationäre optimale Strategie gibt. Somit kann die Bellman´sche Gleichung geschrieben werden als

$$v = max_{f \in \mathbb{F}_0} \{r_f + \lambda P_f v\}. \tag{2.59}$$

Durch den Operator T ist eine kontrahierende Abbildung auf V definiert und die Lösung der Optimalitätsgleichung ist ein Fixpunkt von T. Der Operator T ist eine kontrahierende Abbildung, da

$$\parallel Tu - Tv \parallel \ \leq \lambda \parallel u - v \parallel \ \text{ für alle } u, v \in V, 0 \leq \lambda < 1. \tag{2.60}$$

Wenn V ein vollständiger normierter linearer Raum (d.h. ein Banach Raum) ist, kann der Banach´sche Fixpunktsatz dazu verwendet werden um folgenden Satz zu erhalten.

Satz 2.10 Der Operator T hat einen eindeutigen Fixpunkt $v^* \in V$ und für jedes $v^0 \in V$ konvergiert die durch $v^{n+1} = Tv^n$ definierte Folge $\{v^n\}$ in der Norm gegen v^*, also $\lim_{n\to\infty} \| v^n - v^* \| = 0$.

Wenn S endlich ist, so ist dies äquivalent zur punktweisen Konvergenz. Aus diesem Satz folgt mit der Bellman´schen Gleichung

Korollar 2.11 Angenommen das Supremum in der Bellman´schen Gleichung wird erreicht. Dann gilt:

1. v_λ^* ist die eindeutige Lösung der Optimalitätsgleichung.
2. Es existieren konservierende Entscheidungsfunktionen f^*, d.h.

$$f^* = argmax_{f\in\mathbb{F}_0}\{r_f + \lambda P_f v^*\} \tag{2.61}$$

bzw.

$$T_{f^*}v^* = Tv^*. \tag{2.62}$$

3. Die stationäre deterministische Markovsche Strategie die eine konservierende Entscheidungsfunktion verwendet ist optimal für die Klasse aller Strategien.

Mit $\tilde{V} = -v$ kann die Bellman´sche Gleichung als

$$T\tilde{V} = \min_{f\in\mathbb{F}_0}\{-r_f + \lambda P_f \tilde{V}\} \tag{2.63}$$

geschrieben werden. Sämtliche Sätze und Korollare bleiben auf Grund der beidseitigen Beschränktheit von $r_t(i,a)$ weiterhin gültig.

2.4.2 Anwendung der DSDP zur Bestimmung der Schwellenwerte

Endlicher Zeithorizont

Für das österreichische BMS gilt:

1. Der Zustandsraum ist $S = \{0, 1, \ldots, K\}$ und somit endlich.
2. Die Menge der Zeitpunkte, zu denen Entscheidungen getroffen werden können, sei ebenfalls endlich mit $T = \{1, 2, \ldots N\}$.
3. Die für den Zustand i definierte Aktion ist es einen Schwellwert $d_i < a < X$, mit X der Höhe des Schadens, festzulegen. Somit gilt $A_i = [d_i, X]$, also endlich. Auf Grund der Endlichkeit von S und A_i gibt es nur endlich viele Strategien.
4. $-r_t(i_t, a)$ bezeichne die jährlich zu erwartenden Kosten eines Versicherten. Somit gilt
$$-r_t(i_t, a) = R_i(s_i) = \pi_i + \alpha d_i - \alpha F(s_i)(d_i - s_i) - \alpha \int_0^{s_i} F(y)\mathrm{d}y. \tag{2.64}$$
Da diese Kosten begrenzt sind existiert das erwartete Gesamtentgelt $v_N^\delta(i)$ und ist für alle Strategien δ und jedes $N < \infty$ begrenzt.
5. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:
$$p_t(j|i_t, a) = P_{ij}(a) = \begin{cases} F(a), & i, j \in S, j = max(i-1, 0) \\ 1 - F(a), & i, j \in S, j = min(i+3, K) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
6. Die Bellman´sche Gleichung lautet:
$$U_t(h_t) = min_{a \in A_{i,t}} \{-r_t(i_t, a) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_t(j|i_t, a) U_{t+1}(h_t, a, j)\}. \tag{2.65}$$
Für das österreichische BMS gilt $U_t^\delta(h_t) = \rho_k^{(t)}$. Da $\rho_k^{(t)}$ von der Vorgeschichte nur vom Zustand k abhängt, existiert laut Satz 2.6 eine optimale deterministische Markovsche Strategie. Die zugehörige Bellman´sche Gleichung lautet also:
$$\begin{aligned} \rho_k^{(t)} &= min_{a \in A_k} \{R_k(a) + \alpha F(a) \rho_{(k-1) \vee 0}^{(t+1)} + \alpha(1 - F(a)) \rho_{(k+3) \wedge K}^{(t+1)}\} \\ &= min_{a \in A_k} Q_k^{(t)}(a), \qquad k = 0, \ldots K. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Somit erfüllt das österreichische BMS alle Voraussetzungen für die Anwendung des Rückwärtsinduktionsalgorithmus.

Sei nun im ersten Schritt $\rho_k^{(N+1)} = 0$. Bestimme im zweiten Schritt $\rho_k^{(N)} = min_{a\in A_k} R_k(a) = R_k(a^*)$. Dieses $a^* \in A_k$ wird durch

$$a_k^* = argmin_{a\in A_k} R_k(a), \qquad k = 0, \dots K, \tag{2.67}$$

bestimmt. Dazu wird

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} R_k(a) = \alpha \frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}(a - d_k) = 0 \tag{2.68}$$

gesetzt. Somit ergibt sich für das letzte Jahr $a_k^{N*} = s_k^N = d_k$ und $\rho_k^{(N)} = Q_k^{(N)}(s_k^{(N)})$. Da $t \neq 1$ wird zu Schritt 2 zurückgegangen und als nächstes

$$\begin{aligned}
\rho_k^{(N-1)} &= min_{a\in A_k}\{R_k(a) + \alpha F(a)\rho_{(k-1)\vee 0}^{(N)} + \alpha(1 - F(a))\rho_{(k+3)\wedge K}^{(N)}\} \\
&= min_{a\in A_k} Q_k^{(N-1)}, \qquad k = 0, \dots K,
\end{aligned}$$

bestimmt. Das optimale $a^{(N-1)*} \in A_k$ mit $a_k^{(N-1)*} = argmin_{a\in A_k} Q_k^{(N-1)}(a)$ erhält man erneut mittels ableiten und Null setzen, also

$$a_k^{(N-1)*} = s_k^{(N-1)} = d_k + (\rho_{(k+3)\wedge K}^{(N)} - \rho_{(k-1)\vee 0}^{(N)}), \qquad k = 0, \dots K, \tag{2.69}$$

und somit $\rho_k^{(N-1)} = Q_k^{(N-1)}(s_k^{(N-1)}), k = 0, \dots, K$. Allgemein gilt bei Anwendung der Rückwärtsinduktionsalgorithmus:

$$\begin{aligned}
\rho_k^{(n)} &= min_{a\in A_k}\{R_k(a) + \alpha F(a)\rho_{(k-1)\vee 0}^{(n+1)} + \alpha(1 - F(a))\rho_{(k+3)\wedge K}^{(n+1)}\} \\
&= min_{a\in A_k} Q_k^{(n)}(a), \qquad k = 0, \dots K.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die optimale Strategie für das *(N-n)*–te Jahr gegeben ist durch

$$a_k^{(n)*} = s_k^{(n)} = d_k + (\rho_{(k+3)\wedge K}^{(n+1)} - \rho_{(k-1)\vee 0}^{(n+1)}), \qquad k = 0, \dots K, \tag{2.70}$$

und

$$\rho_k^{(n)} = Q_k^{(n)}(s_k^{(n)}), \qquad k = 0, \dots K. \tag{2.71}$$

Man kann leicht sehen, dass

$$\rho_0^{(N)} < \dots < \rho_K^{(N)} \tag{2.72}$$

und mittels Induktion über n, dass

$$\rho_0^{(n)} < \dots < \rho_K^{(n)}, \qquad 1 \leq n \leq N \tag{2.73}$$

Daraus folgt, dass $s_{k,n} \geq d_k$ für alle $k = 0, \dots, K$ und alle $n = 1, 2, \dots, N$. Für die minimale Wertfunktion gilt laut Satz 2.5

$$v^*(i) = \rho_i^{(1)}. \tag{2.74}$$

Unendlicher Zeithorizont

Für den unendlichen Zeithorizont seien die minimal zu erwartenden diskontierten Kosten $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_K$ für jemanden, der in Stufe $k = 0, \dots, K$ beginnt. Aus Korollar 2.11 weiß man, dass, wenn das folgende Gleichungssystem

$$\rho_k = inf_{s \geq d_k} \{R_k(s) + \alpha F(s) \rho_{(k-1) \vee 0} + \alpha(1 - F(s)) \rho_{(k+3) \wedge K}\}, \qquad k = 0, \dots K, \tag{2.75}$$

eine Lösung besitzt, dann ist sie eindeutig und kann mit s_k der konservierenden Entscheidungsfunktion

$$s_k = d_k + (\rho_{(k+3) \wedge K} - \rho_{(k-1) \vee 0})^+, k = 0, \dots, K \tag{2.76}$$

geschrieben werden als

$$\rho_k = \pi_k + \alpha d_k + \alpha \rho_{(k+3)\wedge K} - \alpha \int_0^{d_k + \rho_{(k+3)\wedge K} - \rho_{(k-1)\vee 0}} F(t)\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \ldots, K. \tag{2.77}$$

Da der in Satz 2.10 definierte Operator für das österreichische BMS kontrahierend ist, folgt für $k = 0, \ldots K$ und $n \to \infty$

$$\rho_k^{(n)} \to \rho_k \tag{2.78}$$

und somit

$$s_k^{(n)} \to s_k, \tag{2.79}$$

weil $s_k^{(n)} = d_k + (\rho_{(k+3)\wedge K}^{(n+1)} - \rho_{(k-1)\vee 0}^{(n+1)})$.

Kapitel 3

Das zeitstetige Bonus–Malus–System

3.1 Der Poissonprozess

Definition 3.1 *Ein $\mathbb{N}_0$–wertiger stochastischer Prozess $N = \{N_t; t \geq 0\}$ auf (Ω, P) wird Zählprozess genannt, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $t \rightarrow N_t(\omega)$ nicht-fallend ist, nur durch Sprünge steigt, rechtsstetig ist und $N_0(\omega) = 0$ gilt. Ein Zählprozess ist ein Poisson-Prozess, wenn:*

1. *für fast alle ω gilt: jeder Sprung von $t \rightarrow N_t(\omega)$ ist von der Höhe 1;*
2. *für jedes $t, s \geq 0$ ist $N_{t+s} - N_t$ unabhängig von $\{N_u; u \leq t\}$;*
3. *für jedes $t, s \geq 0$ ist die Verteilung von $N_{t+s} - N_t$ unabhängig von* t.

Für einen Poisonprozess $\{N_t; t \geq 0\}$ gibt es eine Konstante $\lambda > 0$, sodass:

1. *$P\{N_t = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, \ldots$ für jedes $t \geq 0$ und allgemeiner $P(N_t - N_s) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}$;*
2. *$E[N_t] = \lambda t$;*
3. *$Var[N_t] = \lambda t$.*

λ wird Intensität genannt, da pro Zeiteinheit genau λ Sprünge erwartet werden. [2] [4]

Sei N ein Poissonprozess mit Intensität λ. Die Funktion $t \to N_t(\omega)$ ist komplett durch ihre Sprungzeiten festgelegt. Diese seien $T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots$. Dann sind $T_1, T_2, \ldots$ die aufeinanderfolgenen (zufälligen) Zeitpunkte der Sprünge. $(T_n)_{n\geq 1}$ heißt Poisson´scher Punktprozess.
Wenn t ein fester Zeitpunkt ist, dann ist nach Definition 3.1 die Wahrscheinlichkeit, dass es keinen Sprung in $(t, t+s]$ gibt, $e^{-\lambda t}$, unabhängig von der Vorgeschichte der Sprünge vor t. Das gleiche Resultat gilt, wenn der Zeitpunkt t durch eine Sprungzeit T_n ersetzt wird.

$$P\{N_{T_n+s} - N_{T_n} = 0 \mid N_u; u \leq T_n\} = e^{-\lambda s} \tag{3.1}$$

wobei $\{N_u; u \leq T_n\}$ die Vorgeschichte des Prozesses bis zur Zeit T_n des n–ten Sprunges ist. Wenn man davon ausgeht, dass das Ereignis $\{N_{T_n+s} - N_{T_n} = 0\}$ dasselbe wie $\{T_{n+1} - T_n > s\}$ ist und dass die Information, die die Vorgeschichte $\{N_u; u \leq T_n\}$ enthält dieselbe ist, die $\{T_1, \ldots, T_n\}$ enthält, gilt

$$P\{T_{n+1} - T_n \leq t \mid T_0, \ldots T_n\} = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \tag{3.2}$$

Mit anderen Worten, die Zwischensprungzeiten $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ sind unabhängige und identisch verteilte Zuvallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung

$$1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0 \tag{3.3}$$

der Exponentialverteilung mit Parameter λ. Sie ist differenzierbar und die Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$\lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Definition 3.2 *Sei* $p \in [0,1]$. *Aus einem Poissonprozess* N *entsteht die* p*–Ausdünnung* N_1 *indem ein in* N *zum Zeitpunkt* t *auftretender Sprung mit Wahrscheinlichkeit* p *beibehalten bzw. mit Wahrscheinlichkeit* $(1-p)$ *gelöscht wird.*

Satz 3.3 Sei N ein Poissonprozess, N_1 eine p-Ausdünnung von N und N_2 der Prozess der gelöschten Punkte, sodass $N = N_1 + N_2$. Dann sind N_1 und N_2 unabhängige Poissonprozesse mit Intensitäten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda p \\ \lambda_2 &= \lambda(1-p) \end{aligned}$$

mit λ der Intensität von N.[3]

Beweis: siehe [3] Seite 25

3.2 Modellbildung

Ein Kunde kann sich zu jeder beliebigen Zeit in einer der K+1 Prämienstufen befinden. Ein neuer Kunde steigt in Stufe i_0 ein. Er legt eine Schwellwertstrategie $s = (s_0, \ldots, s_K), s_k \geq d_k$ fest. In Stufe k wird er einen Schaden nicht melden, wenn dessen Größe X kleiner als s_k ist. Wenn in der Stufe k während $(0, T_k]$ kein Schaden gemeldet wurde, so wechselt der Kunde im österreichischen BMS in die Stufe $(k-1) \vee 0$. Falls jedoch einer gemeldet wurde, in die Stufe $(k+3) \wedge K$. In der Stufe 0 bleibt ein Kunde solange, bis er einen Schaden meldet, in Stufe K solange er Schäden innerhalb einer Periode T_K meldet. Die Umstufung erfolgt allerdings erst, wenn nach dem zuletzt gemeldeten Unfall eine Zeitspanne von T_K vergangen ist.
π_k bezeichnet die Jahresprämie, die anteilig unmittelbar nach jeder Umstufung fällig wird.
Sei $H(x)$ die Verteilungsfunktion für jeden einzelnen Schaden X. Es wird angenommen, dass $H(x)$ nicht von der Prämienstufe abhängt. Dieses $H(x)$ ist nicht dieselbe Verteilung wie $G(x)$ vom letzten Abschnitt. (Diese beschreibt die Verteilung des jährlichen Schadens.)

Wir nehmen an, dass die Schäden nach einem homogenen Poisson´schen Zählprozess $\{N(t); t \geq 0\}$ auftreten, mit Intensität λ (die erwartete Anzahl von Unfällen pro Zeiteinheit): Alle Kunden, die zur selben Tarifklasse gehören, haben dasselbe λ. Mit Hilfe der Ausdünnung von Poissonprozessen wird der Prozess der Schäden $N(t)$ nun in einen Prozess der nicht gemeldeten Schäden $\{N_k^{(1)}(t)\}$ und in einen der gemeldeten Schäden $\{N_k^{(2)}(t)\}$ geteilt. Die Intensitäten dieser beiden Poissonprozesse sind nach Satz 3.3 $\lambda_k^{(1)} = \lambda H(s_k)$ für $\{N_k^{(1)}(t)\}$ und $\lambda_k^{(2)} = \lambda(1 - H(s_k))$ für $\{N_k^{(2)}(t)\}$.

Für $k = 0, \ldots, K$ sei $p_{KU}^{(k)}(T_k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde in Stufe k keinen Schaden verursacht während einer Zeitlänge T_k. Nach Eigenschaft (1) eines Poissonprozesses, gilt

$$p_{KU}^{(k)}(T_k) = \exp\{-\lambda_k^{(2)} T_k\} = \exp\{-\lambda T_k(1 - H(s_k))\}. \tag{3.5}$$

Sei W_k die Verweildauer in Stufe $k (k = 0, \ldots, K)$. Die Verteilungsfunktion von W_k ist nach (3.2)

$$P\{W_k \leq w\} = \begin{cases} 1 - \exp\{-\lambda(1 - H(s_k))w\} & w < T_k \\ 1 & w \geq T_k. \end{cases}$$

3.3 Die Gesamtkosten des Versicherten bei unendlicher Laufzeit

In diesem Abschnitt sind alle zukünftigen Kosten diskontiert, somit ist der gegenwärtige Wert von einer Einheit nach einer Zeiteinheit $e^{-\beta t}, 0 < \beta < \infty$. Ähnlich wie im diskreten Fall ist $\mu_H(s) = \int_0^s x\mathrm{d}H(x)$ der erwartete Verlust eines nicht gemeldeten Schadens bei gegebenem Schwellwert s.

Z_k bezeichne die diskontierten Gesamtkosten, wenn man zum Zeitpunkt 0 in der Stufe k startet, und $Z_{j,k}$ die diskontierten Gesamtkosten, wenn man zum Zeitpunkt τ_j in der Stufe k startet, bis zum Zeitpunkt τ_{j+1}. Y_j sei die Prämienstufe zum Zeitpunkt τ_j. Somit ergibt sich für Z_k

$$Z_k = Z_{0,k} + Z_{1,Y_1} + \ldots = \sum_{j\geq 0} Z_{j,Y_j}, \tag{3.6}$$

wobei

$$Z_{j,k} = \pi_k \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} e^{-\beta u}\mathrm{d}u + A_k(\tau_{j+1}) + d_k e^{-\beta\tau_{j+1}} I_{\{\tau_{j+1}-\tau_j<T_k\}}. \tag{3.7}$$

$Z_{j,k}$ beinhaltet die diskontierte Prämie π_k, die diskontierten Kosten für nicht gemeldete Schäden A_k bis zum Zeitpunkt τ_{j+1}) und den diskontierten Selbstbehalt d_k, der zum Zeitpunkt τ_{j+1} gezahlt werden muss.

Die erwarteten Gesamtkosten C_k erhält man, wenn man den Erwartungswert von Z_k bestimmt

$$\begin{aligned}
C_k &= E[Z_k] = E[\sum_{j\geq 0} Z_{j,Y_j}] = E[Z_{0,k}] + E[\sum_{j\geq 1} Z_{j,Y_j}] \\
&= E[\pi_k \int_0^{\tau_1} e^{-\beta u}\mathrm{d}u + A_0(\tau_1) + d_k e^{-\beta\tau_1} I_{\{\tau_1<T_k\}}] + \\
&\quad + \sum_{l=1}^{K} E[\sum_{j\geq 1} Z_{j,Y_j} I_{\{Y_1=l\}}] \\
&= E[\pi_k \int_0^{W_k} e^{-\beta u}\mathrm{d}u + A_0(T_k \wedge W_k) + d_k e^{-\beta W_k} I_{\{W_k<T_k\}}] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E[\sum_{j\geq 1} Z_{j,Y_j} I_{\{Y_1=k-1\vee 0\}}] + E[\sum_{j\geq 1} Z_{j,Y_j} I_{\{Y_1=k+3\wedge K\}}] \\
= \quad & E[\pi_k \int_0^{W_k} e^{-\beta u}\mathrm{d}u + A_0(T_k \wedge W_k) + d_k e^{-\beta W_k} I_{\{W_k<T_k\}}] + \\
&+E[I_{\{W_k=T_k\}} e^{-\beta T_k} Z'_{(k-1)\vee 0}] + E[I_{\{W_k<T_k\}} e^{-\beta W_k} Z'_{(k+3)\wedge K}]. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Z'_k bezeichnet die diskontierten Gesamtkosten, wenn man zum Zeitpunkt 1 in der Stufe k startet. Diese haben jedoch dieselbe Verteilung wie die Kosten Z_k und somit gilt

$$
E[Z_k] = E[Z'_k] = C_k. \qquad (3.9)
$$

Mit obiger Gleichung und mit

$$
\int_0^t e^{-\beta w}\mathrm{d}w = \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \qquad (3.10)
$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
C_k(s) \quad = \quad & E\{[\frac{\pi_k}{\beta}(1-e^{-\beta W_k}) + e^{-\beta W_k}(d_k + Z_{(k+3)\wedge K}) + A_k(t)] I_{\{W_k<T_k\}} + \\
& [\frac{\pi_k}{\beta}(1-e^{-\beta t}) + A_k(T_k) + e^{-\beta T_k} Z_{(k-1)\vee 0}] I_{\{W_k=T_k\}}\} \\
= \quad & \lambda(1-H(s_k)) \int_0^{T_k} e^{-\lambda(1-H(s_k))t} \\
& [\frac{\pi_k}{\beta}(1-e^{-\beta t}) + e^{-\beta t}(d_k + C_{(k+3)\wedge K}(s)) + A_k(t)]\mathrm{d}t \\
& +p_{KU}^{(k)}(T_k)[\frac{\pi_k}{\beta}(1-e^{-\beta T_k}) + A_k(T_k) + e^{-\beta T_k} C_{(k-1)\vee 0}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Nun müssen noch die erwareten diskontierten Kosten eines nicht gemeldeten Schadens $A_k(t)$ bestimmt werden. Dazu seien Y_t die diskontierten Gesamtkosten des Versicherten ab dem Zeitpunkt t diskontiert auf den Zeitpunkt t, S die Schadenshöhe des 1. gemeldeten Schadens, $S_j, j \geq 1$, die Schadenshöhen der nicht gemeldeten Schäden und η_t die diskontierten Gesamtkosten aller nicht gemeldeten Schäden im Intervall $[0, t]$. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stufe k ein Schaden S_j kleiner als s ist lautet

$$P_k(S_j) \leq s) = \begin{cases} \frac{H(s)}{H(s_k)} & s < s_k \\ 1 & s \geq s_k. \end{cases}$$

Somit gilt

$$A_k(t) = E_k[\eta_t] = \sum_{n\geq 1} E_k[\sum_{j=1}^{n} S_j e^{-\beta\tau_j} | N_k^{(1)}(t) = n] P_k(N_k^{(1)}(t) = n). \tag{3.12}$$

Da S_j sowohl von $e^{-\beta\tau_j}$ als auch von $N_k^{(1)}$ unabhängig ist, folgt $E_k[S_j e^{-\beta\tau_j} | N_k^{(1)}(t) = n] = E_k[S_1] \cdot E_k[e^{-\beta\tau_j} | N_k^{(1)}(t) = n]$. Charakteristisch für den Poissonprozess ist, dass die bedingte Verteilung von $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ gegeben $\{N_k^{(1)}(t) = n\}$ gleich der Verteilung einer geordneten Stichprobe vom Umfang n aus auf $[0, t]$ stetig gleichverteilten Zufallsvariablen ist, d.h.

$$f_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)|N_k^{(1)}(t)=n}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & 0 < t_1 < \ldots < t_n < t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
A_k(t) &= \sum_{n\geq 1} E_k[S_1] \sum_{j=1}^{n} E_k[e^{-\beta\tau_j} | N_k^{(1)} = n] \frac{(\lambda H(s_k)t)^n}{n!} e^{-\lambda H(s_k)t} \\
&= \sum_{n\geq 1} E_k[S_1] \frac{n!}{t^n} \int_{0<t_1<\ldots<t_n<t} \sum_{j=1}^{n} e^{-\beta t_j} \mathrm{d}(t_1, \ldots, t_n) \frac{(\lambda H(s_k)t)^n}{n!} e^{-\lambda H(s_k)t} \\
&= \sum_{n\geq 1} E_k[S_1] \frac{1}{t^n} \int_{(0,t)^n} \sum_{j=1}^{n} e^{-\beta t_j} \mathrm{d}(t_1, \ldots, t_n) \frac{(\lambda H(s_k)t)^n}{n!} e^{-\lambda H(s_k)t} \\
&= E_k[S_1] \frac{1}{\beta t}(1 - e^{-\beta t}) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} (\lambda H(s_k)t)^n e^{-\lambda H(s_k)t} \\
&= E_k[S_1] \frac{1}{\beta t}(1 - e^{-\beta t}) \lambda H(s_k)t.
\end{aligned}$$

Mit

$$E_k[S_1] = \frac{1}{H(s_k)} \int_0^{s_k} s \mathrm{d}H(s) \tag{3.13}$$

folgt

$$A_k(t) = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\lambda \int_0^{s_k} s\mathrm{d}H(s). \tag{3.14}$$

Wie im diskreten Fall wurde auch hier von Zacks und Levikson auf den Faktor $\frac{1}{H(s_k)}$ in der Berechnung von $E[S_1]$ vergessen, weshalb in der Gleichung für $A_k(t)$ $\lambda H(s_k)$ anstelle von λ verwendet wurde. Zu welchem Ergebnis dies führte werde ich in Kapitel 5 schildern.

Um die Kostenfunktion explizit angeben zu können, sind noch ein paar Nebenrechnungen erforderlich:

$$E(I_{\{W_k=T_k\}}) = p^k_{KU}(T_k) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
E(I_{\{W_k<T_k\}}e^{-\beta W_k}) &= \int_0^{T_k} e^{-\beta w} f_{W_k}(w)\mathrm{d}w \\
&= \int_0^{T_k} e^{-\beta w}\lambda_k^{(2)} e^{-\lambda_k^{(2)} w}\mathrm{d}w \\
&= \lambda_k^{(2)} \int_0^{T_k} e^{-w(\beta+\lambda_k^{(2)})}\mathrm{d}w \\
&= \frac{-\lambda_k^{(2)}}{\beta+\lambda_k^{(2)}} e^{-w(\beta+\lambda_k^{(2)})} \Big|_0^{T_k} \\
&= \frac{-\lambda_k^{(2)}}{\beta+\lambda_k^{(2)}} e^{-\beta T_k - T_k\lambda_k^{(2)}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\beta+\lambda_k^{(2)}} \\
&= \frac{\lambda(1-H(s_k))}{\beta+\lambda(1-H(s_k))}[1 - e^{-\beta T_k} p^{(k)}_{KU}(T_k)] \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\frac{1-e^{-\beta W_k}}{\beta}) &= \int_0^{T_k} \frac{1-e^{-\beta w}}{\beta}\lambda_k^{(2)} e^{-\lambda_k^{(2)} w}\mathrm{d}w + (p^{(k)}_{KU}(T_k)\frac{1-e^{-\beta T_k}}{\beta}) \\
&= \frac{\lambda_k^{(2)}}{\beta}\int_0^{T_k} e^{-\lambda_k(2) w}\mathrm{d}w - \int_0^{T_k} e^{-(\beta+\lambda_k^{(2)})w}\mathrm{d}w \\
&\quad + \frac{1-e^{-\beta T_k}}{\beta} p^{(k)}_{KU}(T_k) \\
&= \frac{1-e^{-\lambda_k^{(2)} T_k}}{\beta} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\beta(\beta+\lambda_k^{(2)})}(e^{-(\beta+\lambda_k^{(2)})T_k} - 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1-e^{-\beta T_k}}{\beta} p_{KU}^{(k)}(T_k) \\
= \quad & \frac{(1-p_{KU}^{(k)}(T_k))(\beta+\lambda_k^{(2)})+\lambda_k^{(2)} e^{-\beta T_k} p_{KU}^{(k)}(T_k)}{\beta(\beta+\lambda_k^{(2)})} - \\
& \frac{\lambda_k^{(2)}+(1-e^{-\beta T_k}) p_{KU}^{(k)}(T_k)(\beta+\lambda_k^{(2)})}{\beta(\beta+\lambda_k^{(2)})} \\
= \quad & \frac{1-p_{KU}^{(k)}(T_k) e^{-\beta T_k}}{\beta+\lambda(1-H(s_k))}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Formt man nun (3.11) unter Verwendung obiger Nebenrechnungen um, so erhält man mit $\lambda_k^{(2)} = \lambda(1-H(s_k))$ und $\lambda_k^{(1)} = \lambda H(s_k)$

$$
\begin{aligned}
-p_{KU}^{(k)}(T_k) e^{-\beta T_k} C_{(k-1)\vee 0}(s) + C_k(s) - C_{(k+3)\wedge K} \lambda_k^{(2)} \int_0^{T_k} e^{-(\lambda_k^{(2)}+\beta)t} \mathrm{d}t \quad = \\
\pi_k[\lambda_k^{(2)} \int_0^{T_k} e^{-\lambda_k^{(2)} t} \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \mathrm{d}t + p_{KU}^{(k)}(T_k) \frac{1-e^{-\beta T_k}}{\beta}] + d_k[\lambda_k^{(2)} \int_0^{T_k} e^{-(\lambda_k^{(2)}+\beta)t} \mathrm{d}t] \quad + \\
\mu_H(s_k)\lambda[\lambda_k^{(2)} \int_0^{T_k} e^{-\lambda_k^{(2)} t} \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \mathrm{d}t + p_{KU}^{(k)}(T_k) \frac{1-e^{-\beta T_k}}{\beta}]
\end{aligned}
$$

Noch weiter vereinfacht ergibt dies folgende Gleichung mit $\rho_k(T_k) = p_{KU}^{(k)}(T_k) e^{-\beta T_k}$. Für $k = 0, \dots K$ gilt

$$
\begin{aligned}
-\rho_k(T_k) C_{(k-1)\vee 0}(s) + C_k(s) - \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)}+\beta}(1-\rho_k(T_k)) C_{(k+3)\wedge K}(s) \quad = \\
\frac{\pi_k + \lambda\mu_H(s_k) + \lambda_k^{(2)} d_k}{\lambda_k^{(2)}+\beta}(1-\rho_k(T_k)).
\end{aligned}
$$

In Matrixform lautet dies

$$
(I - e^{-\beta T_k} P) C(s) = R C^{zs}(s) \tag{3.18}
$$

mit

$$
P_{jk} = \begin{cases} p_{KU}^{(k)}(T_k), & k = max(j-1, 0) \\ \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)}+\beta}(e^{\beta T_k} - p_{KU}^{(k)}(T_k)) & k = min(i+3, K) \end{cases}
$$

und

$$RC^{zs}(s) = \frac{\pi_k + \lambda\mu_H(s_k) + \lambda_k^{(2)} d_k}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - \rho_k(T_k)). \tag{3.19}$$

3.4 Die Gesamtkosten der Versicherung bei unendlicher Laufzeit

Ähnlich zu der Herleitung der Kosten der Versicherung im diskreten Fall wird auch hier für einen Kunden in der Stufe k die erwartete Auszahlung definiert durch

$$\mu_H^{zs}(s_k) = \frac{1}{1 - H(s_k)} \int_{s_k}^{\infty} x \mathrm{d}H(x) - d_k, \qquad k = 0, \ldots K \tag{3.20}$$

In der Arbeit von Zacks und Levikson wurde obige erwartete Auszahlung nicht hergeleitet und daher auf den Faktor $\frac{1}{1-H(s_k)}$ vergessen.

Seien nun V_k die erwarteten diskontierten Kosten der Versicherung für einen Versicherungsnehmer, der in Stufe k startet (diskontiert auf den Zeitpunkt 0), W_k die Wartezeit bis zum nächsten gemeldeten Schaden, welche $Exp(\lambda(1 - H(s_k)))$-verteilt ist, und H die Verteilungsfunktion der Schadenshöhe eines Schadens. Dann ist

$$V_k = E[I_{\{W_k \leq T_k\}} e^{-\beta W_k} \mu_H^{zs}(s_k) + V_{(k+3)\wedge K}] + E[I_{\{W_k > T_k\}} e^{-\beta T_k} V_{(k-1)\vee 0}]. \tag{3.21}$$

Wegen

$$E[I_{\{W_k > T_k\}}] = P(W_k > T_k) = e^{-\lambda_k^{(2)} T_k} \tag{3.22}$$

und

$$\begin{aligned} E[I_{\{W_k \leq T_k\}} e^{-\beta W_k}] &= \int_0^{T_k} e^{-\beta u} \lambda_k^{(2)} e^{-\lambda_k^{(2)} u} \mathrm{d}u \\ &= \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - e^{-(\beta + \lambda_k^{(2)}) T_k}) \end{aligned}$$

folgt für $k = 0, \dots, K$, mit $\rho_k(T_k) = p_{KU}^{(k)}(T_k)e^{-\beta T_k}$

$$\begin{aligned} -\rho_k(T_k)V_{(k-1)\vee 0} + V_k - \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - \rho_k(T_k))V_{(k+3)\wedge K} &= \\ \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - \rho_k(T_k))\mu_H^{zs}(s_k). & \end{aligned} \tag{3.23}$$

In Matrixform sieht obiges Gleichungssystem folgendermaßen aus:

$$(I - e^{-\beta T_k}P)V(s) = RV^{zs}(s) \tag{3.24}$$

mit derselben Matrix P wie im Gleichungssystem für die Kosten des Versicherten im zeitsteigen Prozess und

$$RV^{zs}(s) = \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - \rho_k(T_k))\mu_H^{zs}(s_k). \tag{3.25}$$

Kapitel 4

Parameterschätzung

4.1 Die dem österreichischen Bonus–Malus System zugrunde liegende Markovkette

4.1.1 Übergangsmatrix im österreichischen Bonus–Malus System

Wie aus der Einleitung über das Bonus–Malus System bekannt, beginnt man in der Stufe 9, steigt bei schadenfreiem Verlauf nach einem Jahr in die Stufe 8 ab, wird jedoch pro gemeldetem Schaden 3 Stufen hinauf gesetzt, höchstens jedoch bis zur Stufe 17.

Um das Programm nicht zu sehr zu verkomplizieren bzw. um die Übergänge so gut wie möglich nachvollziehen zu können, habe ich folgende Annahmen getroffen:

1. Die Markovkette besteht aus 19 Stufen, da es neben den Versicherungsstufen 00 bis 17 auch noch eine Stufe * gibt, in der sich all diejenigen befinden, die entweder noch kein Auto angemeldet haben, oder aus dem Versicherungsvertrag ausgestiegen sind.

2. Da die Anzahl der Mehrfachschäden relativ gering ist, lasse ich sie in meiner Beobachtung weg. Somit ist es in meinem System völlig gleich, ob man 1 oder 3 Schäden in einem Versicherungsjahr hat, man steigt lediglich einmal die 3 Stufen nach oben. Die Wahrscheinlichkeit für einen oder mehrere

Unfälle innerhalb eines Jahres wird unabhängig von der Stufe mit p bezeichnet. Da dies zu keinem guten Ergebnis geführt hat, habe ich für die Approximation auch ein stufenabhängiges p verwendet (vgl. Kapitel 4.2.2).

3. Man kann von jeder Stufe aus aus dem Vertrag austreten. Die Wahrscheinlichkeit hierfür wird für jede Stufe als dieselbe angenommen und mit a bezeichnet.

4. Der Zustrom findet einzig in Stufe 9 statt, was genau genommen nur für die Gruppe der Führerscheinneulinge gilt. Im Falle einer Prämienanpassung oder eines Wechsels des Versicherungsunternehmens, welcher mit dem Wechsel in eine andere Tarifgruppe gleichzusetzen ist, kann man in das System in jeder beliebigen Stufe einsteigen, je nachdem in welcher Stufe man sich bis dahin befunden hat. Weiters wird für die ersten Jahre eine jeweils andere Anmeldewahrscheinlichkeit angenommen, da man in der Tabelle 1.2 für die ersten Jahre eine andere Wahrscheinlichkeit erkennen kann. Sie werden mit $r_1, \ldots, r_6$ bezeichnet.

5. Der Startvektor hat zwei Einträge, einen für die Stufe * und einen für die Stufe 9. Die Wahrscheinlichkeit sein Auto am Beginn anzumelden ist t.

Warum ich genau diese Annahmen getroffen habe, darauf werde ich im nächsten Abschnitt bei der Interpretation der Ergebnisse näher eingehen. Viele davon wurden nämlich nicht von vornherein getroffen, sondern haben sich im Laufe der Zeit als sinnvoll herausgestellt.

Die Matrix für das erste Jahr sieht folgendermaßen aus:

$$P_{i1} = \begin{cases} 1 - r_1, & i = 1 \\ a & i = 2, \ldots, 19) \end{cases}$$

$$P_{1,11} = r_1$$

$$P_{ij} = \begin{cases} (1-p) \cdot (1-a), & i = 2, \ldots, 19, j = max(i-1, 2) \\ p \cdot (1-a) & i = 2, \ldots, 19, j = min(i+3, 19) \end{cases}$$

4.2 Schätzung und Ergebnisse

4.2.1 Methode der kleinsten Quadrate

Da das Schätzen der Parameter nicht das Hauptaugenmerk dieser Diplomarbeit darstellt und ich als Daten lediglich die Tabelle 1.2 zur Verfügung habe, wurde zur Schätzung die Methode der kleinsten Quadrate verwendet.
Hierbei wird für eine Punktwolke $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ eine Näherungsfunktion $y = f(x)$ so gesucht, dass die Summe der Quadrate der vertikalen Abweichungen ν_i (Approximationsfehler, Residuen) der Werte y_i von den Funktionswerten $f(x_i)$ der Näherungsfunktion ein Minimum ergibt.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}\nu_i^2 \rightarrow min \tag{4.1}$$

In meinem Programm sieht obige Formel wie folgt aus:

$$\sum_{i=2}^{19}(R[i]/(1 - R[1]) - T[i])^2 \rightarrow min \tag{4.2}$$

Das R[i] bezeichnet den i–ten Eintrag in der Matrix R, wobei diese die n–fache Multiplikation der Übergangsmatrix mit sich selbst und mit dem Startvektor darstellt. Die T[i]´s bezeichnen die n–te Spalte der Tabelle 1.2. Der erste Teil in der Summe ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand in der Stufe R[i] ist, unter der Bedingung, dass er sich nicht in der Stufe * befindet. Weiters beginnt die Summe erst ab 2, da die erste Zeile der Übergangsmatrix für die Stufe * steht, über deren Besetzung ich keine Information zur Verfügung habe.

4.2.2 Ergebnisse

Ganz zu Beginn bin ich von einem einzigen Zustromparameter für jedes Jahr ausgegangen, d.h. es hat lediglich ein r_1 gegeben. Damit konnte ich jedoch keine sehr gute Näherung erzielen, da vor allem der Wert in der Stufe 9 nicht sehr gut geschätzt war. Hier hatte ich sogar eine Differenz von 4%, was eine sehr schlechte Näherung darstellt. Daraufhin habe ich versucht, mittels folgender Änderungen bessere Lösungen zu erzielen:

- Zwei verschiedene Parameter p_1, für die sogenannten Bonus–Stufen 0 bis 9, und p_2 für die Malusstufen 10 bis 17.
- Zwei verschiedene Parameter a_1 und a_2, den einen für die Bonus–, den anderen für die Malus–Stufen.
- Einen eigenen Parameter a_0, ..., a_{17} für jede einzelne der Stufen 0 bis 17.
- Lediglich ein Abmeldeparameter a, der für alle Stufen derselbe ist.
- Eine lineare Funktion $i \cdot p$, $i = 1, \ldots, 18$, d.h. jede Stufe hat eine eigene Unfallwahrscheinlichkeit.
- Eine lineare Funktion $i \cdot c \cdot p$, durch die die Unfallwahrscheinlichkeit sowohl von der Stufe i, in der man sich befindet, als auch von einem Skalierungsparameter c abhängt.
- In der Hoffnung eine bessere Approximation zu erzielen, habe ich auch versucht, die Mehrfachschäden in meine Berechnungen miteinzubeziehen. Das hatte jedoch leider sehr wenig Auswirkungen auf das Ergebnis, deswegen habe ich diese Möglichkeit sehr rasch wieder verworfen.
- Verschiedene Zustromparameter r_1 bis r_6 in den ersten sechs Jahren, ab dann gilt jedes Jahr r_6.
- Natürlich habe ich auch mit Kombinationen von den oben angeführten Änderungen gerechnet.

Leider habe ich mit keiner einzigen der oben angeführten Änderungen eine gute Approximation erreicht. Deshalb gebe ich hier nur eine Näherungslösung für eine sehr einfache Wahl der Parameter an. Diese Wahl bedeutet, dass zu Beginn alle Versicherungsnehmer in der Stufe * zu finden sind(da t = 0):

- $p = 0.00571526$
- $r = 0.809818$
- $a_1 = 0.0904168$
- $a_2 = 0.203872$
- $t = 0$

Die linke Spalte aus Tabelle 3.1 gibt die Approximation nach 10 Jahren an, die rechte Spalte die richtigen Werte:

Stufen	L10	T10
00	0.281075	0.285
01	0.0594487	0.0679
02	0.038249	0.0336
03	0.0417431	0.0343
04	0.119758	0.1196
05	0.0714837	0.0576
06	0.0702255	0.0498
07	0.0789537	0.0602
08	0.10328	0.0815
09	0.106329	0.1571
10	0.00980712	0.0133
11	0.00866941	0.014
12	0.00792888	0.0133
13	0.00127243	0.0036
14	0.000824004	0.0028
15	0.000496492	0.0028
16	0.000322265	0.0016
17	0.000133847	0.0022

Tabelle 4.1: Approximation 1. Version

4.2.3 Interpretation der Ergebnisse

Bei einigen Parameterwahlen ist es möglich recht gute Ergebnisse zu erzielen, wenn man dann allerdings von diesen ausgehend Verteilungen für spätere Jahre berechnen will, funktioniert das nicht mehr ganz so gut. Sehen wir uns zunächst die Approximationen für die verschiedenen Parameter an:

1. Die Unfallwahrscheinlichkeit p. Im einfachsten Fall liegt sie bei 0.5%. Jeder, der ein Auto fährt, sieht sofort ein, dass dieser Wert nicht sehr realistisch ist.
   Bei der Verwendung von stufenabhängigen Unfallwahrscheinlichkeiten wurden Werte zwischen 0.5 und 10.78% erreicht. Das würde allerdings für die schlechtesten Autofahrer, nämlich die in Stufe 17 bedeuten, dass auch sie nur alle 10 Jahre einen Unfall bauen. Wenn das wirklich so wäre, würden die Versicherungen bei der KFZ–Haftpflichtversicherung wahrscheinlich nicht so schlecht aussteigen, wie es heutzutage der Fall ist.

2. Die Zustromwahrscheinlichkeit(en) r bzw r_i. Im einfachsten Fall wurde sie mit 80.98% approximiert. Das würde bedeuten, dass jedes Jahr genau so

viele Personen neu in der Stufe 9 einsteigen würden. Eher unrealistisch. Auch andere Parameterkonstellationen erzielten unrealistische Ergebnisse zwischen 100 und 46%, was wiederum nicht wahrheitsgemäß sein kann.

3. Der Abmeldeparameter a. Dieser scheint als einziger realistisch zu sein, mit Werten so um die 9%, außer bei dem oben angeführten Fall, wo ich mit zwei verschiedenen Abmeldeparametern gerechnet habe. Dort lag jener für die Malusstufen bei knapp 20%. Da ich hierzu jedoch keinerlei Informationen von einer Versicherung zur Verfügung habe, fällt es mir sehr schwer diesen Faktor in Bezug auf seine Brauchbarkeit einzuschätzen.

4. Der Parameter für die Anfangsverteilung t. Auch hier wurde fast immer ein Wert um die 80% berechnet, außer beim einfachsten Fall, der anscheinend davon ausgegangen ist, dass zu Beginn alle in der Stufe * sind, was ja nicht ganz so falsch ist. Wie auch beim a kann ich diesen Wert sehr schlecht einschätzen.

Warum hat das alles also nicht besser funktioniert? Was wurde falsch gemacht? Wurden vielleicht sogar falsche Annahmen getroffen? Ich werde nun ein paar mögliche Gründe hierfür anführen:

1. Ein sehr wichtiger Grund, warum keine gute Approximation erzielt werden konnte, liegt darin, dass man nicht genau weiß, wie die Daten aus 1.3 zu Stande gekommen sind. Zu welchem Zeitpunkt wurden sie genommen? Musste jede Versicherung zu einem bestimmten Stichtag ihre Unterlagen einreichen, oder hatte man einen gewissen Zeitraum, in dem dies zu geschehen hatte. Wenn es einen Stichtag gegeben hat, welcher war es? Der 31.Dezember eines Jahres oder der 30. September, das Ende des Beobachtungszeitraumes. Inwieweit kann man sich also auf diese Tabelle verlassen?

2. Die relativ komplizierten Umstufungsregelungen erschweren natürlich das Nachvollziehen dieser Tabelle. In den Berechnungen war es so, dass ich davon ausgegangen bin, dass, wenn man den Unfall innerhalb eines Jahres verursacht, man bereits im nächsten Jahr in eine andere Stufe versetzt wird. Das stimmt jedoch nur teilweise. In Sonderfällen kann es bis zu eineinhalb Jahren dauern, bis man in eine andere Stufe versetzt wird. Das bedeutet für die Tabelle, dass es Fälle gibt, in denen Personen im einen Jahr z.B. in Stufe 8 sind, einen Unfall verursacht haben, laut meiner Übergangsmatrix bereits im nächsten Jahr in Stufe 11 wären, in dieser Tabelle allerdings erst im darauffolgenden Jahr.

3. Man kann natürlich nicht davon ausgehen, dass ein jeder Fahrer derselben Stufe auch dieselbe Unfallwahrscheinlichkeit aufweist. Deswegen gibt es im

österreichischen Bonus–Malus System ja auch verschiedene Tarifgruppen, die sich vor allem durch ihre unterschiedliche Grundprämie voneinander differenzieren. Wenn man das erste Mal ein Auto anmeldet beginnt man in der Stufe 9 in der Tarifgruppe der Führerscheinneulinge. Danach, speziell wenn die Personen ins Berufsleben einsteigen oder auch Familien gründen, gehören sie nicht mehr zu dieser Gruppe und werden bei der Versicherung um einen Wechsel in eine andere Tarifgruppe bitten. Das bedeutet für die Übergangsmatrix, dass sie eigentlich nur für die Tarifgruppe der Führerscheinneulinge gilt. Lediglich hier findet der Zustrom fast ausschließlich in der Stufe 9 statt. Bei allen anderen Tarifgruppen kann man in jede beliebige Stufe einsteigen, je nachdem in welcher man sich gerade befindet.

4. Dies bedeutet aber weiters, dass die Tabelle eine Summe von Markovketten beschreibt, denn sie gibt an, wie viele Personen sich in der jeweiligen Stufe befinden, nicht jedoch zu welcher Tarifgruppe sie gehören. Somit liegt dieser Tabelle eine Summe von Markovketten zu Grunde, welche selbst keine Markov-Kette mehr ist. Um das Problem zu formulieren, müsste man also mehrere Markov–Ketten und somit mehrere Übergangsmatrizen definieren, in denen selber wieder Übergänge stattfinden werden.

5. Die Nachfrage bei Versicherungen bzw. das Lesen von Büchern über Unfallwahrscheinlichkeiten hat außerdem ergeben, dass ein p von 10 bis 15% realistisch ist. In meinen Berechnungen erhielt ich jedoch meistens eines um die 3% bzw. wenn jede Stufe ihr eigenes p besitzt, Werte zwischen 0.5 und 10%.

6. Zu guter Letzt stellte sich noch die Frage, inwieweit die angewandte Schätzmethode für dieses Problem geeignet ist? Dazu simulierte ich die Markovkette zuerst unter Annahme eines Parameters (p) und danach mit mehreren Parametern (p, a, r, t). Anschließend führte ich eine Parameterschätzung aus der durch die Simulation erhaltenen Daten mittels der Methode der kleinsten Quadrate durch. Das Ergebnis war relativ eindeutig: Für einen Parameter scheint die Methode nicht so schlecht zu sein, je mehr Parameter man jedoch damit schätzen muss, desto weniger funktioniert diese Methode. Da die Parameterschätzung jedoch nicht das Hauptthema dieser Arbeit darstellt, bin ich auf die verschiedenen Schätzmethoden nicht näher eingegangen. Schließlich bliebe ja noch immer die Frage, ob aus den mir zur Verfügung stehenden Daten (Tabelle 1.2) überhaupt eine Schätzung möglich ist.

Die Nachfrage bei Versicherungen bzw. das Lesen von Büchern über Unfallwahrscheinlichkeiten hat ergeben, dass je nach Tarifklasse ein p von 10 bis 20% realistisch ist. Somit werde ich in den Prämienkalkulationen, die im nächsten Kapitel folgen, von einer Tarifgruppe mit einem p von 20% ausgehen.

Kapitel 5

Korrektur der Arbeit von Zacks und Levikson

5.1 Modellannahmen und Kostengleichungen

Die Modellannahmen mit denen ich gearbeitet habe stammen zur Gänze aus der Arbeit von Zacks und Levikson [10]. Die einzigen Unterschiede bestehen zum einen in der Bezeichnung der Stufen, $k = 1, \ldots, K$, und zum anderen in der Anzahl der Stufen, die man bei der Meldung eines Schadens hinaufsteigt. Sie ist im österreichischen BMS 3, in der Arbeit von Zacks, Levikson hingegen 1. Alle Bezeichnungen und verwendeten Parameter sind ident.

5.1.1 Kosten im diskreten Modell

Kosten des Versicherten

Die Kosten des Versicherten im diskreten Modell werden in der Arbeit von Zacks, Levikson als Lösungen des Gleichungssystems

$$C(s) = (I - \alpha P(s))^{-1} R(s) \tag{5.1}$$

angegeben. Wie in Kapitel 2.2 gezeigt wurde, ist dieses Gleichungssystem korrekt, mit

$$P_{jk} = \begin{cases} F(a), & k = max(j-1, 1) \\ 1 - F(a) & k = min(i+1, 3). \end{cases}$$

Kosten der Versicherung

Für die Kosten der Versicherung geben Zacks und Levikson folgendes Gleichungssystem an:

$$\begin{aligned}
V_1 &= E[\alpha^{N_1}(\bar{\mu}_1(s_1) + V_2(s))] = \frac{\alpha\bar{F}(s_1)}{1-\alpha F(s_1)}(\bar{\mu}_1(s_1) + V_2(s)) \\
V_k(s) &= \alpha\bar{F}(s_k)[\bar{\mu}_k(s_k) + V_{k+1}(s)] + \alpha F(s_k)V_{k-1}(s), \qquad k = 2, \ldots K-1 \\
V_K(s) &= E[I_{\{N_K>1\}} \sum_{i=1}^{N_{K-1}} \alpha^i \bar{\mu}(s_K) + \alpha^{N_K} V_{K-1}(s)] \\
&= \bar{\mu}(s_K)\alpha\frac{\bar{F}(s_k)}{1-\alpha\bar{F}(s_K)} + V_{K-1}\frac{\alpha F(s_K)}{1-\alpha\bar{F}(s_K)}
\end{aligned}$$

mit

$$\bar{\mu}_k(s) = \int_s^\infty x \mathrm{d}G(x) - d_k, \qquad k = 1, \ldots, K \tag{5.2}$$

Der Hauptfehler in der Arbeit liegt in der Gleichung für die erwartete Auszahlung der Versicherung. Die genaue Herleitung des Gleichungssystems ist in Kapitel 2.3 zu finden. Das korrigierte GLGS lautet:

$$(I - \alpha P)V(s) = R_V^{neu}(s) \tag{5.3}$$

mit

$$R_V^{neu}(s) = \alpha(1-p)\int_{s_k}^\infty x\mathrm{d}G(x) - \alpha(1 - F(s_k))d_k, \qquad k = 1, \ldots, K \tag{5.4}$$

und P derselben Matrix wie für die Kosten des Versicherten.

5.1.2 Kosten im zeitstetigen Modell

Kosten des Versicherten

Die Kosten für den Versicherten im zeitstetigen Modell werden von Zacks und Levikson als die Lösungen folgenden Gleichungssystems angegeben:

$$\begin{aligned}
C_1(s) &= E[\pi_1 \frac{1-e^{-\beta W_1}}{\beta} + A_1(W_1) + e^{-\beta W_1}(d_1 + C_2(s))], \\
C_k(s) &= E[\pi_k \frac{1-e^{-\beta W_k}}{\beta} + I_{\{W_k<T_k\}}(d_k + C_{k+1}(s))e^{-\beta W_k} \\
&\quad I_{\{W_k=T_k\}}(A_k(T_k) + e^{-\beta T_k} C_{k-1}(s))], \qquad k = 2, \dots K-1 \\
C_K(s) &= E[\pi_K \frac{1-e^{-\beta W_K}}{\beta} + I_{\{W_K<T_K\}}(d_K + C_K(s) + A_K(t))e^{-\beta W_K} \\
&\quad I_{\{W_K=T_K\}}(A_K(T_K) + e^{-\beta T_K} C_{K-1}(s))]. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

mit

$$A_k(t) = \frac{1}{\beta}\mu_H(s_k)\lambda H(s_k)(1-e^{-\beta t}) \qquad (5.6)$$

wobei

$$\mu_H(s) = \int_0^s x \mathrm{d}H(x). \qquad (5.7)$$

Wie in Kapitel 3.3 gezeigt wird liegt der Fehler in der Arbeit von Zacks und Levikson bei

$$\mu_H^1(s) = \frac{1}{H(s_k)} \int_0^s x \mathrm{d}H(x). \qquad (5.8)$$

Dann kann $A_k(t)$ geschrieben werden als

$$A_k(t) = \frac{1}{\beta}\mu_H(s_k)\lambda(1-e^{-\beta t}). \qquad (5.9)$$

Das korrigierte GLGS ist

$$(I - e^{-\beta T_k} P)C(s) = RC_{zs}^{neu}(s) \tag{5.10}$$

mit

$$P_{jk} = \begin{cases} p_{KU}^{(k)}(T_k), & k = max(j-1,1) \\ \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)}+\beta}(e^{\beta T_k} - p_{KU}^{(k)}(T_k)) & k = min(i+1,3) \end{cases}$$

und

$$RC_{zs}^{neu}(s) = \frac{\pi_k + \lambda\mu_H(s_k) + \lambda_k^{(2)} d_k}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - \rho_k(T_k)). \tag{5.11}$$

Kosten der Versicherung

Diese werden in der Arbeit von Zacks und Levikson als Lösungen des folgenden Gleichungssystems angegeben, mit $\rho_k(T_k) = p_{KU}^{(k)}(T_k)e^{-\beta T_k}$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(s) &= E[(\tilde{\mu}_1(s_1) + \tilde{V}_2(s))e^{-\beta W_1}] \\ &= (\tilde{\mu}_1(s_1) + \tilde{V}_2(s))\frac{\lambda(1 - H(s_1))}{\beta + \lambda(1 - H(s_1))} \\ \tilde{V}_k(s) &= E[I_{\{W_k < T_k\}}(\tilde{\mu}_k(s_k) + \tilde{V}_{(k+1)\wedge K}(s)) + I_{\{W_k = T_k\}} e^{-\beta T_k} \tilde{V}_{k-1}(s)] \\ &= \rho_k(T_k)\tilde{V}_{k-1} + \frac{\lambda(1 - H(s_k))}{\beta + \lambda(1 - H(s_k))}(1 - \rho_k(T_k))(\tilde{\mu}_k(s_k) + \tilde{V}_{(k+1)\wedge K}(s)), \\ &\quad k = 2, \dots K \end{aligned}$$

und mit

$$\tilde{\mu}_k(s) = \int_s^\infty x \mathrm{d}H(x) - d_k, \qquad k = 1, \dots K. \tag{5.12}$$

Das korrigierte GLGS lautet:

$$(I - e^{-\beta T_k} P)\tilde{V}(s) = RV_{zs}(s), \tag{5.13}$$

wobei P dieselbe Matrix wie im GLGS für die Kosten des Versicherten ist und

$$RV_{zs}(s) = \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(2)} + \beta}(1 - e^{-(\beta+\lambda(1-H(s_k)))T_k})\tilde{\mu}_k^{neu}(s_k) \tag{5.14}$$

mit

$$\tilde{\mu}_k^{neu}(s_k) = \frac{1}{1 - H(s_k)} \int_{s_k}^{\infty} x\mathrm{d}H(x) - d_k, \qquad k = 1, \dots K. \tag{5.15}$$

5.2 Richtige Werte des in der Arbeit angeführten Beispiels

Es wird von einem 3–stufigen BMS ausgegangen, mit

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 850, \quad \pi_2 = 1000, \quad \pi_3 = 1250[\$/\text{Jahr}] \\ d_1 &= 200, \quad d_2 = 250, \quad d_3 = 300[\$] \\ p_{KU} &= 0.8, \quad \alpha = 0.945 \end{aligned}$$

Nach [5] wird für die Schadensverteilung G die Gammaverteilung verwendet, mit Skalierungsparameter $\gamma = 7582.94[Euro]$ und Formparameter $\nu = 0.63$. D.h.

$$G(x) = G(\frac{x}{\gamma}|\mu), \qquad x > 0 \tag{5.16}$$

mit

$$G(x \mid \nu) = (1/\Gamma(\nu)) \int_0^x u^{\nu-1}e^{-u}\mathrm{d}u. \tag{5.17}$$

Diese Verteilung hat einen Erwartungswert von $\mu = \gamma \cdot \nu = 4777.25$[Euro].

Es gelte weiters

$$F(x) = \begin{cases} p_{KU}, & \text{falls } x = 0 \\ p_{KU} + (1 - p_{KU})G(\frac{x}{\gamma} \mid \nu), & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

und

$$
\begin{aligned}
R_k(s) &= \pi_k + \alpha d_k + \alpha(s-d_k)(p_{KU} + (1-p_{KU})G(\frac{s}{\gamma} \mid \nu)) - \alpha s p_{KU} \\
&\quad -\alpha(1-p_{KU})(sG(\frac{s}{\gamma} \mid \nu) - \nu\gamma G(\frac{s}{\gamma} \mid 1+\nu)). \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Damit die Kosten des diskreten mit denen des zeitstetigen Modells verglichen werden können, wurde auch für den zeitstetigen Prozess $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ Jahr verwendet. Außerdem wurde zur Berechnung der Kosten im zeitstetigen Prozess die stationäre Strategie verwendet, die für den diskreten Prozess bei unendlicher Laufzeit als Optimallösung bestimmt wurde. Zusätzlich mussten auch einige Parameter angepasst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr kein Schaden gemeldet wird ist im diskreten Modell p und im stetigen Modell $e^{-\lambda}$. Diese Wahrscheinlichkeiten sind gleich, wenn $e^{-\lambda} = p = 0.8$ gesetzt wird, d.h. $\lambda = 0.223144$. Der jährliche Diskontierungsfaktor ist in beiden Modellen gleich, wenn $e^{-\beta} = \alpha = 0.945$, d.h. $\beta = 0.0565$. Setzt man $H(x) = G(\frac{x}{\gamma_1}|\nu)$ wobei $\nu = 0.63$ gleich wie im zeitdiskreten Modell gesetzt wird, dann ist die mittlere Schadenshöhe in einem Jahr im diskreten Modell $(1-p)\cdot\gamma\cdot\nu$ und im zeitstetigen Modell $\lambda\cdot\gamma_1\cdot\nu$. Sie sind gleich, wenn $\gamma_1 = \frac{1-p}{\lambda}\gamma = 6796.45$.

Bereits in der Angabe der Parameter haben Zacks und Levikson nicht genau gearbeitet, denn bei ihnen lautet $\mu = 2985.8$ und γ_1 wird ohne weitere Überlegungen gleich γ gesetzt.

Für diese Wahl der Parameter ergibt sich laut [10] die Strategie
$s = (420.46, 905.06, 734.60)$ und ein $\rho_2^{(20)} = 11543.92$ als die minimal zu erwartenden diskontierten Kosten eines Versicherten in Stufe 2 bei einer Restlaufzeit von 20 Jahren. Diese Werte können mittels des Mathematica–Programms zur Bestimmung der Schwellwerte und der minimalen Risiken nachvollzogen werden.

Als nächstes werden von Zacks und Levikson die Kosten der Versicherung für einen Kunden in Stufe 2 im zeitdiskreten Modell angegeben, $V^2(s_2) = 9973.31$. Ich habe bis jetzt keine Ahnung wie dieser Wert erreicht worden ist, denn egal welche Änderungen ich auch in dem GLGS aus [10] vorgenommen habe, diesen Wert habe ich nie erhalten. Mit dem angeführten GLGS ergibt sich $V^2(s_2) = 15043.8$. Die erwarteten Kosten des Versicherten bei unendlicher Laufzeit werden gar nicht erst angegeben, sie sind jedoch $C^2(s_2) = 16962.2$. Warum diese nicht angegeben werden, kann ich nicht verstehen, denn schließlich ist nur ein Vergleich der Kosten bei gleicher Laufzeit (in diesem Fall unendlicher) sinnvoll. Zacks und Levikson hingegen vergleichen $V^2(s_2)$ mit $\rho_2^{(20)}$, sprich Kosten bei unendlicher Laufzeit mit Kosten bei einer Restlaufzeit von 20 Jahren. Als Quotienten erhalten sie mit den von ihnen angegebenen Werten $11543.92/9973.31 = 1.16$. Wenn ich jedoch den Wert für die Kosten der Versicherung einsetze, den das GLGS liefert, so ergibt sich ein Quotient von $0.77 < 1$, der den Konkurs der Versicherung bedeuten würde.

Aus diesem Grund habe ich ein Simualtionsprogramm geschrieben, welches sowohl die Kosten des Versicherten, als auch die Kosten der Versicherung im zeitdiskreten Modell simuliert. Für 10000 Wiederholungen und 300 Jahre ergeben sich

$$\begin{aligned} C_2^{sim} &= 16800.9 \\ V_2^{sim} &= 15610.6 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der mittels GLGS berechnete Wert für die Kosten des Versicherten richtig ist, da er sehr nahe am simulierten Wert liegt. Der für die Kosten der Versicherung scheint hingegen nicht wahrheitsgemäß zu sein. Nach der in Kapitel 5.1 beschriebenen Änderung bzw. Richtigstellung des GLGS erhielt ich $V^2(s_2) = 15685.5$. Der Quotient $\frac{E[KostendesVersicherten]}{E[KostenderVersicherung]}$ ist jetzt auch gleich $1.08 > 1$.

Danach beschäftigte ich mich mit den Kosten im zeitstetigen Modell. Hier stimmten die Werte, die in der Arbeit angeführt waren, mit denen die das GLGS lieferte überein, $\tilde{C}_2 = 16502.35$ und $\tilde{V}_2 = 14276.73$. Die nach all den vielen Fehlern aufgekommene Skepsis veranlasste mich dazu auch für den zeitstetigen Prozess ein Simulationsprogramm zu schreiben. Dieses Programm lieferte

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2^{sim} &= 16642.3 \\ \tilde{V}_2^{sim} &= 15947.4. \end{aligned}$$

Mit den korrigierten Gleichungssystemen für die Kosten des Versicherten bzw. der Versicherung (vgl.Kapitel 5.1) erhielt ich, für $\gamma_1 = 6796.45$,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 &= 16639.1 \\ \tilde{V}_2 &= 16050.8. \end{aligned}$$

Hätte ich wie in der Arbeit von Zacks und Levikson angenommen $\gamma_1 = \gamma = 7582.94$ gesetzt, so wären bei Verwendung des korrigierten GLGS $\tilde{C}_2 = 16654.8$ und $\tilde{V}_2 = 18003.7$ und der Quotient $\frac{E[KostendesVersicherten]}{E[KostenderVersicherung]} = 0.93$ gewesen. Mit den oben angeführten Werten ergibt sich hier ein Quotient von 1.04.

Kapitel 6

Problemstellung angewandt auf das österreichische Bonus–Malus System

6.1 Herleitung der verschiedenen Funktionen und Gleichungssysteme

Zuerst werde ich noch einmal kurz das zugrunde liegende Modell erläutern:
Ein Versicherter startet in der Stufe 9 und wechselt in die Stufe 8, wenn er innerhalb eines Jahres keinen Unfall verursacht bzw. keinen Schaden gemeldet hat. Er wechselt jedoch in die Stufe 12, wenn er einen Schaden meldet. Danach wird er nach einem Jahr entweder in eine um 1 niedrigere Stufe eingestuft, wenn er nicht meldet, oder in eine um 3 höhere Stufe, wenn er einen Schaden meldet.

Die Prämien der einzelnen Stufen ergeben sich prozentuell aus der Grundprämie, die sowohl auf Grund von technischen Daten des Autos, als auch auf Grund von Charakteristiken des Versicherten (Alter, Berufsstand,...) festgesetzt wird.

Wie in der Arbeit von Zacks und Levikson [10] habe ich für die Schadensverteilung G die Gammaverteilung verwendet, mit Skalierungsparameter $\gamma = 7582.94[Euro]$ und Formparameter $\nu = 0.63$. D.h.

$$G(x) = G(\frac{x}{\gamma}|\mu), \qquad x > 0 \tag{6.1}$$

mit

$$G(x \mid \nu) = (1/\Gamma(\nu)) \int_0^x u^{\nu-1} e^{-u} \mathrm{d}u. \tag{6.2}$$

Diese Verteilung hat einen Erwartungswert von $\mu = \gamma \cdot \nu = 4777.25$[Euro].

Es gelte weiters

$$F(x) = \begin{cases} p_{KU}, & \text{falls} x = 0 \\ p_{KU} + (1 - p_{KU}) G(\frac{x}{\gamma} \mid \nu), & \text{falls} x > 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} R_k(s) &= \pi_k + \alpha d_k + \alpha(s - d_k)(p_{KU} + (1 - p_{KU}) G(\frac{s}{\gamma} \mid \nu)) - \alpha s p_{KU} \\ &\quad -\alpha(1 - p_{KU})(s G(\frac{s}{\gamma} \mid \nu) - \nu\gamma G(\frac{s}{\gamma} \mid 1 + \nu)). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Anmerkung: Mit den selben Überlegungen wie im letzten Kapitel gilt auch hier:

1. $T_0 = \cdots = T_{17} = 1$ Jahr
2. Zur Berechnung der Kosten im zeitstetigen Prozess wurde die stationäre Strategie verwendet, die für den diskreten Prozess bei unendlicher Laufzeit als Optimallösung bestimmt wurde.
3. $e^{-\lambda} = p$
4. $e^{-\beta} = \alpha = 0.945$, d.h. $\beta = 0.0565$
5. Setzt man $H(x) = G(\frac{x}{\gamma_1} | \nu)$, wobei $\nu = 0.63$ gleich wie im zeitdiskreten Modell gesetzt wird, dann ist die mittlere Schadenshöhe in einem Jahr im diskreten Modell $(1 - p) \cdot \gamma \cdot \nu$ und im zeitstetigen Modell $\lambda \cdot \gamma_1 \cdot \nu$. Sie sind gleich, wenn $\gamma_1 = \frac{1-p}{\lambda} \gamma$.

Sowohl die optimalen Schwellwerte, als auch die minimal zu erwarteten diskontierten Kosten $\rho_k^{(n)}$ eines Versicherten in Stufe k bei einer Restlaufzeit von n Jahren (die „minimalen Risiken“) werden mittels der diskreten dynamischen Programmierung bestimmt. Deren Lösung als auch die Ergebnisse für die verschiedenen Kosten werden im nächsten Abschnitt besprochen.

Die Kostenfunktionen im diskreten Fall bei unendlicher Laufzeit

Nach (2.11) gilt für die erwarteten diskontierten Kosten eines Versicherten, $C(s) = (C_0(s), \ldots, C_{17}(s))$

$$(I - \alpha P(s))C(s) = R(s) \tag{6.4}$$

und nach (2.23) gilt für die erwarteten diskontierten Kosten der Versicherung, $V(s) = (V_0(s), \ldots, V_{17}(s))$

$$(I - \alpha P(s))V(s) = R(s) - \pi. \tag{6.5}$$

Die Kostenfunktionen im zeitstetigen Fall bei unendlicher Laufzeit

Nach (5.10) gilt für die erwarteten diskontierten Kosten eines Versicherten, $C(s) = (C_0(s), \ldots, C_{17}(s))$

$$(I - e^{-\beta T_k} P(s))C(s) = RC^{zs}(s) \tag{6.6}$$

und nach (3.24) gilt für die erwarteten diskontierten Kosten der Versicherung, $V(s) = (V_0(s), \ldots, V_{17}(s))$

$$(I - e^{-\beta T_k} P(s))V(s) = RV^{zs}(s). \tag{6.7}$$

6.2 Numerische Werte

Für die zu Beginn von Kapitel 6.1 angegebenen Parameter werden zuerst optimale Schwellwerte berechnet.

6.2.1 Schwellwerte und Risiken für eine Wahl der Parameter

Die Jahresprämie π sei 1000 Euro, die Wahrscheinlichkeit, keinen Schaden zu fordern sei $p = 0.85$ und die Selbstbehalte seien für jede Stufe Null, d.h. $d_i = 0, i = 0, \ldots, 17$. Der Diskontierungsfaktor α ist 0.945. Mit $e^{-\lambda} = p$ folgt $\lambda = 0.162519$, und $e^{-\beta} = \alpha = 0.945$, d.h. $\beta = 0.0565$. Weiters erhät man nach $\gamma_1 = \frac{1-p}{\lambda}\gamma = 6998.82$.

Unter Verwendung der diskreten stochastischen dynamischen Programmierung bzw. des von mir mittels Mathematica geschriebenen Programmes erhält man folgende optimalen Schwellwerte bei einer Laufzeit von 40 Jahren bzw. bei unendlicher Laufzeit. $s_{n,k}$ gibt den Schwellwert in Stufe k bei einer Restlaufzeit von n Jahren an.

n k	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	100.	200.	200.	200.	200.	300.
3	207.36	307.36	401.36	401.36	413.30	513.30
4	230.19	420.89	514.59	601.43	612.36	732.28
5	271.71	462.22	632.48	719.01	808.7	927.13
6	288.57	517.43	687.05	839.68	928.61	1118.20
7	316.33	543.67	751.88	903.68	1050.13	1238.77
8	322.93	578.70	785.25	975.16	1120.36	1359.7
9	336.56	591.01	825.68	1013.92	1195.89	1433.80
10	341.02	609.51	842.69	1058.30	1238.47	1511.48
15	361.24	641.78	903.03	1140.03	1368.64	1676.12
20	365.14	651.81	917.13	1164.7	1400.5	1726.28
25	366.58	653.92	921.65	1170.61	1410.42	1738.62
30	366.86	654.67	922.63	1172.54	1412.81	1742.54
35	366.98	654.83	922.98	1172.96	1413.60	1743.48
40	367.	654.89	923.06	1173.12	1413.78	1743.8
∞	367.01	654.91	923.09	1173.17	1413.86	1743.9

Tabelle 6.1: Optimale Schwellwerte $s_{k,n}$ für die Stufen 0 bis 5

n k	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0
2	300.	400.	400.	400.	400.	500.
3	595.44	695.44	789.57	789.57	800.80	900.80
4	815.25	984.84	1078.76	1162.58	1172.57	1286.37
5	1035.56	1206.16	1359.82	1444.26	1525.68	1638.55
6	1225.58	1424.43	1578.97	1714.15	1796.37	1969.27
7	1410.77	1608.87	1792.56	1929.17	2053.36	2227.81
8	1531.01	1787.58	1970.76	2135.82	2261.63	2470.45
9	1650.45	1906.58	2142.5	2307.73	2459.88	2670.87
10	1726.87	2023.76	2259.41	2472	2624.75	2859.54
15	1959.68	2306.34	2626.97	2899.15	3149.29	3450.07
20	2022.265	2396.18	2736.17	3047.47	3325.29	3676.25
25	2041.59	2419.88	2770.38	3088.78	3382.49	3744.47
30	2046.32	2427.28	2779.28	3101.65	3397.84	3765.92
35	2047.85	2429.08	2782.09	3104.97	3402.62	3771.54
40	2048.21	2429.67	2782.77	3106.02	3403.84	3773.29
∞	2048.38	2429.87	2783.06	3106.38	3404.36	3773.92

Tabelle 6.2: Optimale Schwellwerte $s_{k,n}$ für die Stufen 6 bis 11

n k	12	13	14	15	16	17
1	0	0	0	0	0	0
2	500.	600.	600.	300.	300. 0	
3	948.99	1048.99	1093.49	793.49	544.74	244.74
4	1340.13	1453.72	1502.89	1009.3	756.18	248.15
5	1688.92	1808.71	1847.69	1355.26	935.24	22.06
6	2023.21	2125.96	2173.34	1508.10	1085.62	429.22
7	2321.99	2429.30	2448.44	1783.93	1210.32	550.42
8	2569.82	2700.60	2726.03	1922.56	1346.53	555.57
9	2792.46	2929.42	2963.62	2160.87	1461.82	667.27
10	2986.46	3134.76	3176.63	2276.11	1574.91	672.53
15	3649.96	3843.55	3914.69	2873.37	1951.99	898.2
20	3912.12	4151.1	4253.88	3122.65	2137.078	974.36
25	4000.23	4253.45	4375.28	3227.07	2206.09	1018.94
30	4025.62	4285.69	4412.38	3254.27	2227.31	1027.33
35	4033.31	4294.64	4423.43	3264.14	2233.63	1031.7
40	4035.34	4297.33	4426.51	3266.36	2235.46	1032.31
∞	4036.18	4298.32	4427.75	3267.44	2236.19	1032.79

Tabelle 6.3: Optimale Schwellwerte $s_{k,n}$ für die Stufen 12 bis 17

Bei der Berechnung der optimalen Schwellwerte werden die minimal zu erwartenden diskontierten Kosten $\rho_k^{(n)}$ eines Versicherten in Stufe k bei einer Restlaufzeit von n Jahren (die „minimalen Risiken“) berechnet. Ihre numerischen Werte sind in den folgenden Tabellen aufgelistet.

n k	0	1	2	3	4	5
1	500.	500.	600.	600.	700.	700.
2	986.04	998.9	1098.9	1193.4	1293.4	1400.26
3	1459.13	1471.46	1594.82	1689.32	1880.02	1986.05
4	1909.06	1932.03	2054.46	2180.77	2371.28	2564.52
5	2339.37	2362.	2502.86	2627.94	2856.80	3049.05
6	2748.08	2774.96	2915.13	3064.41	3291.75	3526.84
7	3137.67	3164.15	3312.32	3460.6	3716.37	3949.4
8	3506.63	3536.24	3683.63	3843.19	4097.64	4361.92
9	3856.94	3886.28	4039.5	4197.95	4466.45	4728.96
10	4188.51	4219.36	4372.05	4538.63	4805.74	5084.43
15	5600.08	5632.06	5790.04	5961.84	6246.1	6538.42
20	6668.14	6700.75	6859.41	7033.92	7320.29	7619.77
25	7474.26	7506.94	7666.04	7840.86	8128.50	8428.76
30	8082.09	8114.82	8273.95	8449.02	8736.78	9037.6
35	8540.26	8572.99	8732.16	8907.24	9195.12	9495.98
40	8885.58	8918.31	9077.48	9252.58	9540.47	9841.38

Tabelle 6.4: Minimale Risiken $\rho_k^{(n)}$ für die Stufen 0 bis 5

n k	6	7	8	9	10	11
1	800.	800.	1000	1000	1200.	1200.
2	1500.26	1606.70	1806.70	1995.70	2195.70	2396.27
3	2196.25	2301.68	2612.3	2801.3	3181.09	3380.45
4	2773.48	2989.47	3298.41	3600.07	3979.64	4349.29
5	3342.53	3556.55	3975.01	4274.63	4766.97	5135.51
6	3818.81	4114.54	4530.52	4937.61	5427.67	5907.1
7	4287.48	4580.96	5076.07	5480.41	6075.06	6551.72
8	4697.55	5039.08	5531.44	6012.37	6604.13	7181.57
9	5097.8	5436.42	5977.93	6455.83	7121.56	7695.83
10	5451.17	5824.09	6362.39	6889.9	7552.45	8197.76
15	6939.20	7338.4	7940.54	8514.91	9276.45	9994.92
20	8025.47	8438.11	9049.55	9649.17	10427.89	11186.22
25	8837.45	9251.82	9868.59	10471.46	11260.11	12024.49
30	9446.57	9862.16	10479.52	11084.5	11874.26	12642.51
35	9905.19	10320.87	10938.74	11543.91	12334.5	13103.11
40	10250.61	10666.39	11284.28	11889.65	12680.3	13449.24

Tabelle 6.5: Minimale Risiken $\rho_k^{(n)}$ für die Stufen 6 bis 11

n k	12	13	14	15	16	17
1	1400.	1400.	1700.	1700.	2000	2000
2	2596.27	2796.51	3096.51	3345.26	3645.26	3890.
3	3774.89	3973.87	4467.46	4720.58	5228.61	5476.76
4	4742.67	5125.75	5618.19	6038.21	6551.38	6973.44
5	5689.16	6071.	6736.24	7158.73	7815.12	8244.34
6	6459.69	6990.97	7655.48	8229.09	8888.99	9439.41
7	7211.89	7742.04	8545.51	9121.54	9912.5	10468.07
8	7839.17	8472.24	9275.	9974.04	10768.59	11435.86
9	8449.92	9080.58	9981.10	10682.3	11584.68	12257.21
10	8948.9	9671.13	10569.78	11358.38	12264.	13028.98
15	10888.57	11712.52	12798.06	13718.5	14821.31	15721.47
20	12108.04	12993.95	14123.	15126.54	16288.31	17284.46
25	12961.9	13857.98	15012.04	16031.99	7225.9	18244.28
30	13582.02	14484.04	15641.64	16670.76	17870.26	18899.96
35	14044.11	14946.83	16106.67	17136.98	18339.68	19371.18
40	14390.35	15293.64	16453.7	17484.8	18687.87	19720.45

Tabelle 6.6: Minimale Risiken $\rho_k^{(n)}$ für die Stufen 12 bis 17

6.2.2 Strategien für verschiedene Parameterwahlen

Wie im numerischen Beispiel des letzten Abschnittes leicht gesehen werden kann, stellen die Schwellwerte des 40. Jahres bereits eine sehr gute Approximation der Schwellwerte bei unendlicher Laufzeit dar. Aus diesem Grund habe ich mich dazu entschlossen in den weiteren Ausführungen die Schwellwerte des 40. Jahres als die optimalen anzugeben.

s	$\pi = 1000$ $p = 0.85$ $d_i = 0.3 * \pi_i$	$\pi = 1000$ $p = 0.8$ $d_i = 0$	$\pi = 1000$ $p = 0.8$ $d_i = 0.3 * \pi_i$	$\pi = 1100$ $p = 0.8$ $d_i = 0$	$\pi = 1100$ $p = 0.8$ $d_i = 0.3 * \pi_i$
s_0	516.58	448.71	597.45	484.44	647.09
s_1	806.09	781.08	931.55	844.24	1008.17
s_2	1105.8	1085.34	1267.68	1173.08	1371.56
s_3	1356.61	1364.98	1548.25	1474.99	1674.02
s_4	1627.76	1631.76	1845.84	1762.61	1995.07
s_5	1959.38	1984.55	2200.98	2144.86	2379.29
s_6	2295.4	2305.81	2554.73	2493.07	2762.68
s_7	2679.62	2699.36	2952.42	2921.5	3194.94
s_8	3095.4	3059.63	3376.99	3314.12	3657.57
s_9	3420.99	3383.36	3705.08	3668.3	4015.72
s_{10}	3782.07	3674.98	4062.96	3989.02	4408.36
s_{11}	4157.12	4029.45	4427.76	4381.37	4810.77
s_{12}	4491.72	4246.73	4724.59	4631.72	5147.64
s_{13}	4775.42	4438.92	4948.08	4860.04	5409.92
s_{14}	5026.41	4467.06	5109.33	4911.95	5609.17
s_{15}	3856.25	3251.98	3877.94	3586.18	4268.33
s_{16}	2899.77	2195.28	2887.05	2426.46	3183.61
s_{17}	1669.35	994.19	1646.24	1101.91	1817.88

Tabelle 6.7: Schwellwerte des 40–igsten Jahres

s	$\pi = 900$ $p = 0.85$ $d_i = 0$	$\pi = 900$ $p = 0.85$ $d_i = 0.3 * \pi_i$	$\pi = 800$ $p = 0.85$ $d_i = 0$	$\pi = 800$ $p = 0.85$ $d_i = 0.3 * \pi_i$	$\pi = 800$ $p = 0.9$ $d_i = 0$
s_0	334.86	470.1	302.01	422.93	242.07
s_1	597.01	734.1	538.11	660.98	443.96
s_2	841.64	1007.47	758.78	907.55	634.69
s_3	1070.08	1236.92	965.17	1115.17	814.79
s_4	1290.35	1484.94	1164.59	1339.59	989.26
s_5	1591.23	1787.68	1435.84	1612.91	1237.3
s_6	1868.84	2094.1	1686.17	1889.25	1468.85
s_7	2215.51	2443.72	1997.6	2203.78	1765.23
s_8	2536.32	2821.39	2285.69	2542.88	2042.19
s_9	2829.37	3117.02	2548.15	2808.13	2299.11
s_{10}	3098.58	3443.71	2788.43	3100.04	2539.14
s_{11}	3430.93	3781.82	3083.43	3400.88	2840.91
s_{12}	3660.67	4077.35	3281.41	3657.76	3073.46
s_{13}	3886.4	4322.8	3472.07	3866.08	3321.95
s_{14}	3989.42	4534.9	3550.79	4041.01	3487.09
s_{15}	2937.18	3471.91	2607.79	3086.69	2599.27
s_{16}	2006.48	2606.63	1777.95	2313.51	1798.9
s_{17}	924.68	1498.78	817.57	1328.56	843.57

Tabelle 6.8: Schwellwerte des 40–igsten Jahres

s	$\pi = 700$ $p = 0.9$ $d_i = 0$	$\pi = 700$ $p = 0.9$ $d_i = 0.3 * \pi_i$	$\pi = 600$ $p = 0.9$ $d_i = 0$	$\pi = 600$ $p = 0.9$ $d_i = 0.3 * \pi_i$
s_0	213.75	319.73	185.03	276.21
s_1	391.76	499.3	338.9	431.64
s_2	560.23	690.17	484.8	596.95
s_3	719.55	850.48	623.02	736.22
s_4	874.22	1026.93	757.51	889.59
s_5	1093.49	1247.66	947.59	1081.2
s_6	1298.32	1474.84	1125.29	1278.3
s_7	1559.83	1738.38	1351.53	1506.58
s_8	1804.29	2026.68	1563.08	1756.01
s_9	2030.83	2254.76	1758.89	1953.44
s_{10}	2242.22	2509.91	1941.34	2173.69
s_{11}	2507.05	2777.5	2168.96	2404.06
s_{12}	2707.65	3025.69	2338.05	2614.11
s_{13}	2919.67	3247.25	2514.55	2798.77
s_{14}	3056.6	3460.71	2624.74	2974.1
s_{15}	2274.43	2671.9	1949.34	2291.98
s_{16}	1571.86	2023.63	1345.13	1733.48
s_{17}	736.02	1173.7	628.86	1004.36

Tabelle 6.9: Schwellwerte des 40–igsten Jahres

6.2.3 Erwartete Kosten bei unendlicher Laufzeit

In der folgenden Tabelle werden sowohl die Kosten des Versicherten (C), als auch die der Versicherung (V) sowohl für den diskreten, als auch den zeitstetigen Prozess angegeben. Weiters kann das Verhältnis zwischen den Kosten des Versicherten und denen der Versicherung abgelesen werden.

	$E[C]^9_{diskret}$	$E[V]^9_{diskret}$	$q = \frac{E[C]}{E[V]}$	$E[C]^9_{zeitstetig}$	$E[V]^9_{zeitstetig}$	$q = \frac{E[C]}{E[V]}$
$\pi = 1000, p = 0.85, d_i = 0$	13691.4	11663.5	1.17386	12653.2	11657.5	1.08541
$\pi = 1000, p = 0.85, d_i = 0.3 * \pi_i$	14074.8	11138.6	1.2636	13014.1	11208.2	1.16112
$\pi = 1000, p = 0.8, d_i = 0$	13899.	15434.1	0.900541	13725.2	15713.8	0.873451
$\pi = 1000, p = 0.8, d_i = 0.3 * \pi_i$	14316.5	14887.8	0.96163	14205.1	15103.7	0.940505
$\pi = 1100, p = 0.8, d_i = 0$	15185.9	15337.	0.990147	14992.	15600.3	0.961011
$\pi = 1100, p = 0.8, d_i = 0.3 * \pi_i$	15630.7	14752.2	1.05955	15502.5	14948.5	1.03706
$\pi = 900, p = 0.85, d_i = 0$	12417.2	11732.3	1.05838	11438.4	11727.6	0.975334
$\pi = 900, p = 0.85, d_i = 0.3 * \pi_i$	12775.5	11245.8	1.13603	11774.2	11313.9	1.04068
$\pi = 800, p = 0.85, d_i = 0$	11132.2	11802.	0.943247	10217.3	11799.	0.865946
$\pi = 800, p = 0.85, d_i = 0.3 * \pi_i$	11464.	11355.5	1.00955	10526.	11421.5	0.921598
$\pi = 800, p = 0.9, d_i = 0$	11031.6	7914.33	1.39388	9505.23	7743.89	1.22745
$\pi = 700, p = 0.9, d_i = 0$	9751.05	7956.73	1.22551	8338.88	7780.17	1.07181
$\pi = 700, p = 0.9, d_i = 0.3 * \pi_i$	10033.4	7565.12	1.32628	8523.12	7562.67	1.127
$\pi = 600, p = 0.9, d_i = 0$	8454.99	7999.08	1.05699	7168.18	7815.62	0.917161
$\pi = 600, p = 0.9, d_i = 0.3 * \pi_i$	8711.3	7649.93	1.13874	7331.39	7625.	0.961493

Tabelle 6.10: Erwartete Kosten bei unendlicher Laufzeit im dirkreten und im zeitstetigen Modell für einen Kunden in Stufe 9

6.3 Vergleich der Werte und Interpretation der Ergebnisse

6.3.1 Schwellwerte, Risiken und Strategien

Für den im letzten Kapitel betrachteten Fall ($\pi = 1000, p = 0.85, d_i = 0$) sieht die optimale Schwellwertstrategie für unendlichen Zeithorizont wie folgt aus:

$$\begin{aligned} s_{optimal} &= (367.01, 654.91, 923.09, 1173.17, 1413.86, 1743.9, \\ &\quad 2048.38, 2429.87, 2783.06, 3106.38, 3404.36, 3773.92, \\ &\quad 4036.18, 4298.32, 4427.75, 3267.44, 2236.19, 1032.79). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass ein Kunde, der sich in Stufe 0 befindet, bereits einen Schaden in der Höhe von knapp 367 Euro, einer in Stufe 9 einen in der Höhe von 3106 Euro und ein sich in der Stufe 17 befindender Kunde einen Schaden in der Höhe von 1032 Euro melden soll. Wenn man bedenkt, dass ich in meinen Berechnungen von einer mittleren Schadenshöhe von 4777 Euro ausgegangen bin, so sagt die optimale Strategie, dass in der Stufe 14 fast die Hälfte der Schäden nicht gemeldet werden soll.

Die Risiken geben die Kosten des Versicherten für eine endliche Laufzeit an. Diese Kosten sehen für den im letzten Kapitel betrachteten Fall für 40 Jahre folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \rho^{(40)} &= (10074.6, 10108.4, 10270.1, 10450.2, 10745.8, 11057.8, \\ &\quad 10250.61, 10666.39, 11284.28, 11889.65, 12680.3, 13449.24, \\ &\quad 14390.35, 15293.64, 16453.7, 17484.8, 18687.87, 19720.45). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass auf einen Versicherten in der Stufe 9 in den nächsten 40 Jahren mittlere diskontierte Kosten in der Höhe von 11889.65 Euro zukommen. Im Vergleich dazu die Kosten bei unendlicher Laufzeit (im diskreten Prozess):

$$\begin{aligned} C^{(\infty)} &= (10390., 10435.9, 10617.4, 10820.9, 11141.5, 11479.4, \\ &\quad 11928., 12385.1, 13044.8, 13691.4, 14522.1, 15329.6, \\ &\quad 16306.7, 17242.5, 18430.3, 19479.1, 20686., 21698.5). \end{aligned}$$

Hier kann man erkennen, dass auf einen Versicherten in der Stufe 9 bei unendlicher Laufzeit 13691.4 Euro zukommen.

Wenn man die Strategien genauer betrachtet, so kann man sehen, dass die einzelnen Schwellwerte bei Verwendung eines Selbstbehaltes natürlich höher sind, als wenn keine Selbstbehalte vorhanden sind (bei Gleichheit der anderen Parameter). Außerdem sind die Schwellwerte für beinahe jede Wahl der Parameter, außer für eine Grundprämie von mehr als 1000 Euro, geringer als die von mir angenommene mittlere Schadenshöhe. Dazu muss man sagen, dass für ein Auto, das mit einer Jahresprämie von 1000 Euro versichert wird, die mittlere Schadenshöhe wahrscheinlich höher als die von mir angenommene ist. Schließlich wird die Jahresprämie unter anderem auch durch die technischen Daten eines Fahrzeuges bestimmt. Zusammengefasst kann festgestellt werden, dass es sich für Versicherte, die in einer der Stufen 6 bis 16 zu finden sind, durchaus lohnen könnte ihre Schäden selber zu bezahlen.

6.3.2 Kosten des Versicherten und der Versicherung

Damit ich ein Gefühl für die Höhe der Kosten bekomme, habe ich diese für 15 Fälle berechnet. Meine erste Wahl der Parameter war $\pi = 1000, p = 0.85, d_i = 0$. Dies schien mir eine relativ gute Wahl zu sein, da der Quotient aus den Kosten des Versicherten und den Kosten der Versicherung sowohl im diskreten ($q_d = 1.174$), als auch im zeitsteigen ($q_{zs} = 1.085$) Prozess größer, jedoch nicht viel größer als 1 war. Dies bedeutet, dass auf die Versicherung weniger Kosten zukommen als auf den Versicherten. Trotzdem ist es einigermaßen fair, weil der Versicherte nicht soviel mehr zahlt als die Versicherung.

Das machte mich neugierig was sich im Falle von Selbstbehalten ($d_i = 0.3 * \pi_i$) ändern würde. Das Ergebnis war einleuchtend: Die Kosten des Versicherten sind etwas gestiegen, die der Versicherung etwas gesunken und somit sind auch die Quotienten ($q_d = 1.264$ bzw. $q_{zs} = 1.161$) größer geworden.

Wenn jetzt also die Versicherung weniger Kosten hat als der Versicherte, wie würde es aussehen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden gefordert wird, kleiner wird. Dazu betrachtete ich den Fall $\pi = 1000, p = 0.8, d_i = 0$. Das stellte sich jedoch als keine gute Wahl für ein Versicherungsunternehmen heraus, da die Quotienten $q_d = 0.901$ und $q_{zs} = 0.873$ beide kleiner als 1 wurden.

Da, wie aus der 2. Wahl der Parameter bekannt, im Falle von Selbstbehalten die Kosten des Versicherten steigen und die der Versicherung sinken, wollte ich sehen, ob das Versicherungsunternehmen bei dieser Wahl der Parameter durch die Einführung von Selbstbehalten gerettet werden kann. Dies gelang leider nicht, weil $q_d = 0.962$ und $q_{zs} = 0.941$.

Als nächstes fragte ich mich, ob eine Erhöhung der Grundprämie von 1000 auf 1100 Euro ausreichen würde, damit die Kosten des Versicherten wieder höher als jene der Versicherung sind. Für $p = 0.8$ und $d_i = 0$ war das nicht der Fall ($q_d = 0.99$ bzw. $q_{zs} = 0.961$). Hätte das Versicherungsunternehmen jedoch Selbstbehalte ($d_i = 0.3 * \pi_i$) eingeführt, so wären seine Kosten geringer als die des Versicherten geworden. ($q_d = 1.06, q_{zs} = 1.04$)

Für die 1. Wahl der Parameter waren die Kosten des Versicherten klar höher als die der Versicherung. Somit interessierte mich, ob dies noch immer so war, wenn die Grundprämie statt 1000 nur noch 900 Euro betragen würde. Es stellte sich heraus, dass dies im diskreten Prozess noch immer zutraf ($q_d = 1.058$), im zeitstetigen Prozess hingegen die Kosten des Versicherten niedriger waren als jene der Versicherung ($q_{zs} = 0.975$). Dies ließ sich jedoch durch die Einführung von Selbstbehalten leicht ändern und somit waren $q_d = 1.136$ und $q_{zs} = 1.041$.

Wenn nun im zuletzt besprochenen Fall $q_d = 1.041$, was wäre falls die Grundprämie nochmal verringert werden würde. Für $\pi = 800, p = 0.85$ waren sowohl ohne, als auch mit Selbstbehalten die Kosten der Versicherung im zeitstetigen Modell höher als die des Versicherten. Im diskreten Modell hingegen konnte der Quotient durch Einführung von Selbstbehalten größer als 1 gemacht werden.

Somit interessierte mich was passieren würde, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden gefordert wird, erhöht wird. Also untersuchte ich den Fall $\pi = 800, p = 0.9, d_i = 0$. Hier waren die Quotienten am größten ($q_d = 1.394, q_{zs} = 1.227$).

Deswegen verringerte ich die Grundprämie noch einmal auf 700 Euro. Die Quotienten verringerten sich ein wenig, blieben jedoch größer als 1 ($q_d = 1.226, q_{zs} = 1.072$). Dennoch führte ich noch Selbstbehalte ein. Dies erhöhte, wie bereits bekannt, $q_d = 1.326$ und $q_{zs} = 1.127$ wieder ein wenig.

Zu guter Letzt habe ich die Grundprämie erneut auf 600 Euro verringert. Mit $p = 0.9$ und $d_i = 0$ erhielt ich $q_d = 1.057$ bzw. $q_{zs} = 0.917$. Da der Quotient für den zeitsteigen Prozess kleiner als 1 war, führte ich erneut Selbstbehalte ($d_i = 0.3 * \pi_i$) ein, doch auch hiermit konnte ich nicht erreichen, dass $q_{zs} = 0.961$ größer als 1 wurde ($q_d = 1.139$).

Kapitel 7

Schlussfolgerungen

Die Auseinandersetzung mit diesem Thema hat mir einiges über das österreichische BMS klargemacht. Zuerst einmal scheint es nicht sehr einfach zu sein klare Aussagen über den Weg eines Versicherten innerhalb des BMS zu machen. Dies zeigt sich bei meiner Diplomarbeit vorallem im 4. Kapitel, in dem es mir nicht gelungen ist wichtige Parameter wie die Unfallwahrscheinlichkeit oder die Austrittswahrscheinlichkeit anhand von allgemein zugänglichen Daten zu schätzen. Auch wenn man versucht, den Weg eines Versicherten im BMS zu simulieren und danach die Parameter zu schätzen, so kommt man auf keine realistischen Parameterwerte (zumindest nicht mit der von mir verwendeten Schätzmethode).

Weiters haben mich die optimalen Schwellwerte sehr verwundert. Für einige Stufen, speziell für die Stufe 0, kann es je nach Schadenshöhe besser sein, den Schaden zu melden. Aber für andere Stufen, vorallem für die Stufe 14, müssten bei dem von mir angenommenen Erwartungswert für die Schadenshöhe beinahe die Hälfte der Schäden nicht gemeldet werden.

Wenn man sich die erwarteten Kosten, die auf einen Versicherten bzw. auf eine Versicherung zukommen, genauer ansieht, so kann man sagen, dass das österreichische BMS ein einigermaßen faires System ist. Wenn man die Parameter gut wählt, so kann man erreichen, dass die Kosten des Versicherten zwar höher sind als die der Versicherung, aber nicht um allzu viel.

Anhang A

Theorie der Markovketten

Sei Ω ein Ergebnisraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Sei $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ ein stochastischer Prozess mit einem abzählbarem Zustandsraum E, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ und $\omega \in \Omega$ ist $X_n(\omega)$ ein Element dieser abzählbaren Menge E. $x_n = j$ bedeutet der Prozess ist im Zustand j zur Zeit n. Daher wird mit X_n der Zustand des Prozesses X zur Zeit n bezeichnet; die Menge E wird Zustandsraum des Prozesses X genannt. [6]

Definition A.1 Ein stochastischer Prozess $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ heißt ***Markov–Kette***, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j \in E$ gilt

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0, \ldots, X_n\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n\} \tag{A.1}$$

Somit ist eine Markov–Kette eine Folge von Zufallsvariablen, in der für jedes n X_{n+1} unabhängig von $X_0, \ldots, X_{n-1}$ bei gegebenem X_n ist. Das bedeutet, dass der folgende Zustand X_{n+1} im Prozess nicht von den früheren Zuständen $X_0, \ldots, X_{n-1}$ abhängt, sondern lediglich vom aktuellen Zustand X_n.

Definition A.2 Die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P(i, j) \tag{A.2}$$

sind für alle $i, j \in E$ unabhängig von n. Sie werden ***Übergangswahrscheinlichkeiten*** für die Markov–Kette X genannt. Eine Markov–Kette die A.2 erfüllt, wird zeitstetig genannt. Die Matrix $P = (P(i,j))_{i,j \in E}$ wird als ***Übergangsmatrix*** bezeichnet. Jeder Eintrag einer Übergangsmatrix ist nicht–negativ, jede Spaltensumme beträgt 1.

Definition A.3 Sei P eine quadratische Matrix mit Einträgen $P(i,j)$, die für alle $i, j \in E$ definiert sind. Dann wird P ***Markov–Matrix über E*** genannt, wenn gilt:

$$\forall i, j \in E : P(i,j) \geq 0 \tag{A.3}$$

$$\forall i \in E : \sum_{j \in E} P(i,j) = 1 \tag{A.4}$$

Daher ist Die Übergangsmatrix einer Markov–Kette eine Markov–Matrix.

Satz A.4 Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 0$ und $i_0, \ldots, i_m \in E$ gilt:

$$P\{X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0\} = P(i_0, i_1)P(i_1, i_2) \cdots P(i_{m-1}, i_m) \tag{A.5}$$

Mit $n = 0$ und der Definition A.2 der bedingten Wahrscheinlichkeiten folgt folgendes Korollar:

Korollar A.5 Sei π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E und sei $P\{X_0 = i\} = \pi(i)$ für alle $i \in E$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $i_0, \ldots, i_m \in E$

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m\} = \pi(i_0)P(i_0, i_1) \cdots P(i_{m-1}, i_m) \tag{A.6}$$

Dieses Korollar zeigt, dass die gemeinsame Verteilung von $X_0, \ldots, X_m$ für jedes m festgelegt ist, sobald die Startverteilung π und die Übergangsmatrix P bekannt sind.

Proposition A.6 Für jedes $m \in \mathbb{N}$, für alle $i, j \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = P^m(i, j) \tag{A.7}$$

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j in m Schritten zu gelangen genau dem *(i,j)*–ten Eintrag der m–ten Potenz der Übergangsmatrix entspricht. Daraus folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$P^{m+n} = P^m P^n \tag{A.8}$$

woraus man durch Auflösen die *Chapman–Kolmogorov Gleichung*

$$P^{m+n}(i, j) = \sum_{k \in E} P^m(i, k) P^n(k, j); \quad i, j \in E \tag{A.9}$$

erhält. Das bedeutet, dass, wenn der Prozess X im Zustand i startet und sich nach $m + n$ Schritten im Zustand j befindet, er nach dem m–ten Schritt im Zustand k war und von dort aus mittels der restlichen n Schritte in den Zustand j gelangt ist.[2]

Anhang B

Einige in der Diplomarbeit verwendete Verteilungen

B.1 Diskrete Verteilungen

B.1.1 Geometrische Verteilung

Parameter: $p, 0 < p < 1$
Dominierendes Maß: Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$
Dichte: $f_X(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, (x \in \mathbb{N}_0)$
Kenngrößen: $E(X) = \frac{1-p}{p}$ $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

B.1.2 Poissonverteilung

Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$
Dominierendes Maß: Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$
Dichte: $f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^a}{x!}(x \in \mathbb{N}_0)$
Kenngrößen: $E(X) = \lambda, Var(X) = \lambda$

B.2 Stetige Verteilungen

B.2.1 Exponentialverteilung

Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$
Dominierendes Maß: Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$
Dichte: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)(x \in \mathbb{R})$
Kenngrößen: $E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

B.2.2 Gammaverteilung

Parameter: $a, \lambda \in \mathbb{R}, a > 0, \lambda > 0$
Dominierendes Maß: Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$
Dichte: $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)(x \in \mathbb{R})$
Kenngrößen: $E(X) = \frac{a}{\lambda}, Var(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Anhang C

Mathematica–Programme

C.1 Programm zur Bestimmung der Schwellwerte und Risiken

$\Gamma[x\_, v\_] := \frac{N[\int_0^x u^{v-1} e^{-u} \mathrm{d}u]}{N[Gamma[v]]}$

$\Gamma[0, v\_] := 0;$

$Zero[\_\_\_] := 0;$

$P1[s\_, p\_, \gamma\_, \nu\_] := p + (1-p)\Gamma[\frac{s}{\gamma}, \nu];$

$P2[s\_, \gamma\_, \nu\_] := s\Gamma[\frac{s}{\gamma}, \nu] - \nu\gamma\Gamma[\frac{s}{\gamma}, \nu+1];$

$P[\alpha\_, d\_, s\_, p\_, pi\_, \gamma\_, \nu\_] := \pi + \alpha d + \alpha(s-d)P1[s, p, \gamma, \nu] - \alpha sp - \alpha(1-p)P2[s, \gamma, \nu];$

OptimalStrategy[N_]:=Module[$\{\alpha, d, s, p, \pi, \gamma, \nu, K, \rho, pr, n, k\}$,
$\alpha = 0.945;$
$\gamma = 7582.94;$
$K = 18;$
$\nu = 0.63;$
$p = 0.85;$
$pr = 1000;$
$\pi = \{0.5*pr, 0.5*pr, 0.6*pr, 0.6*pr, 0.7*pr, 0.7*pr, 0.8*pr, 0.8*pr, pr, pr,$
$1.2*pr, 1.2*pr, 1.4*pr, 1.4*pr, 1.7*pr, 1.7*pr, 2*pr, 2*pr\};$
$d = Array[Zero, K];$
$s = Array[Zero, \{N, K\}];$

$\rho = Array[Zero, \{N, K\}]$;
$For[i = 1, i \leq K, i++, s[[1, i]] = d[[i]]]$;
$For[i = 1, i \leq K, i++,$
$\rho[[1, i]] = P[\alpha, d[[i]], s[[1, i]], p, \pi[[i]], \gamma, \nu]]$;
$For[n = 2, n \leq N, n++,$
$For[k = 1, k \leq K, k++,$
$s[[n, k]] = d[[k]] + (\rho[[n-1, \min[k+3, K]]] - \rho[[n-1, \max[k-1, 1]]])$;
$\rho[[n, k]] = P[\alpha, d[[k]], s[[n, k]], p, \pi[[k]], \gamma, \nu] + \alpha * P1[s[[n, k]], p, \gamma, \nu] *$
$\rho[[n-1, \max[k-1, 1]]] +$
$\alpha * (1 - P1[s[[n, k]], p, \gamma, \nu]) * \rho[[n-1, \min[k+3, K]]]$;
];
];
$Return[\{Table[s[[n, k]], \{n, 1, N\}, \{k, 1, K\}], Table[\rho[[n, k]], \{n, 1, N\}, \{k, 1, K\}]\}]$;
]

OS=OptimalStrategy[40];

str=Part[OS[[1]] ,40]

C.2 Programm zur Bestimmung der Kosten des Versicherten und der Versicherung für das diskrete Stopproblem

$\alpha = 0.945$;

$\gamma = 7582.94$;

$K = 18$;

$\nu = 0.63$;

$p = 0.85$;

$pr = 1000$;

$\pi = \{0.5 * pr, 0.5 * pr, 0.6 * pr, 0.6 * pr, 0.7 * pr, 0.7 * pr, 0.8 * pr, 0.8 * pr, pr, pr, 1.2 * pr, 1.2 * pr, 1.4 * pr, 1.4 * pr, 1.7 * pr, 1.7 * pr, 2 * pr, 2 * pr\}$;

$d = Array[Zero, K]$;

$F[x\_] := 0.8 + 0.2 * \Gamma[(x/7582.94), 0.63];$

$\mu_2[s\_] := s * \Gamma[s/7582.94, 0.63] - N[Integrate[\Gamma[x/7582.94, 0.63], \{x, 0, s\}]];$

$\mu_1[s\_] := 1/N[Gamma[\nu]] \int_s^\infty (x/\gamma)^{\nu-(x/\gamma)} x;$

$q[i\_, s\_] := \pi[[i]] + \alpha(1-p)\mu_2[s] + \alpha(1-F[s])d[[i]];$

$malus = 3;$

$bonus = 1;$

$Pd = Array[Zero, \{K, K\}];$

$For[i = 1, i \leq K, i++,$
$\quad Pd[[i, \max[i - bonus, 1]]] = -\alpha F[str[[i]]];$
$\quad Pd[[i, \min[i + malus, K]]] = -\alpha(1 - F[str[[i]]]);$
$\quad Pd[[i, i]] = 1];$

$Pd[[1, 1]] = 1 - \alpha F[str[[1]]];$

$Pd[[K, K]] = 1 - \alpha(1 - F[str[[K]]]);$

RKd=Table[q[i,str[[i]]],{i,1,18}];

RVd=Table[Zero,{K}];

For[i=1,i$\leq K, i++,$
$\quad RVd[[i]] = \alpha(1-p)\mu_1[str[[i]]] - \alpha(1 - F[str[[i]]])d[[i]]];$

Cd=LinearSolve[Pd,RKd];

Vd=LinearSolve[Pd,RVd];

C.3 Programm zur Bestimmung der Kosten des Versicherten und der Versicherung für das zeitstetige Stopproblem

$\beta = -\log[\alpha];$

$\lambda = -\log[p];$

$\gamma = 6796.45;$

$H[x\_] := \Gamma[(x/\gamma), \nu];$

$\rho_1[s\_] := (\lambda * (1 - H[s]))/(\beta + \lambda * (1 - H[s]));$

$\Phi_1[i\_, s\_] := (-(\lambda(1 - H[s]) + \beta) * T[[i]]);$

$\mu_1[s\_] := s * H[s] - N[Integrate[H[x], \{x, 0, s\}]];$

$D_1[i\_, s\_] := (1 - \Phi_1[i, s])/(\lambda(1 - H[s]) + \beta);$

$\phi_1[i\_, s\_] := (\pi[[i]] + \mu_0[s] * \lambda + d[[i]] * \lambda * (1 - H[s])) * D_1[i, s];$

$\mu_2[s\_] := 1/N[Gamma[\nu]] \int_s^\infty (x/\gamma)^{\nu-(x/\gamma)} x;$

$\phi_2[i\_, s\_] := (1/(1 - H[s]) * \mu_2[s] - d[[i]]) * (1 - \Phi_1[i, str[[i]]]) * \rho_1[str[[i]]];$

$T = Table[1, \{18\}];$

$malus = 3;$

$bonus = 1;$

$Ps = Array[Zero, \{K, K\}];$

$For[i = 1, i \leq K, i++,$
$\quad Ps[[i, \max[i - bonus, 1]]] = -\Phi_1[i, str[[i]]];$
$\quad Ps[[i, \min[i + malus, K]]] = -\lambda(1 - H[str[[i]]]) * D_1[i, str[[i]]];$
$\quad Ps[[i, i]] = 1];$

$Ps[[1, 1]] = 1 - \Phi_1[1, str[[1]]];$

$Ps[[K,K]] = 1 - \lambda(1 - H[str[[K]]]) * D_1[K, str[[K]]];$

RKs=Table[$\phi_1[i, str[[i]]], \{i, 1, 18\}$];

$RVs = Table[\phi_2[i, str[[i]]], \{i, 1, 18\}];$

Cst=LinearSolve[Ps,RKs];

Vst=LinearSolve[Ps,RVs];

C.4 Simulationsprogramm für das diskrete Modell

Needs[Statistics‘ContinuousDistributions‘]

RandomGamma[$\nu\_, \gamma\_$] := $Random[GammaDistribution[\nu, \gamma]]$

Simulation[K_,M_]:=Module[{s,$\pi, d, p, i, j, S, Co, V, CoSum, VSum\}$,
$s = \{420.46, 905.06, 734.6\};$
$\pi = \{850, 1000, 1250\};$
$d = \{200, 250, 300\};$
$p = 0.8;$
$S = 2;$
$Co[0] = 0;$
$V[0] = 0;$
$\alpha = 0.945;$
$CoSum = 0;$
$VSum = 0;$
$For[j = 1, j \leq K, j++,$
$For[i = 1, i \leq M, i++,$
$Co[i] = 1/\alpha * Co[i-1] + \pi[[S]];$
$V[i] = 1/\alpha * V[i-1];$
$R = Random[];$
$G = RandomGamma[0.63, 7582.94];$
$If[R > p,$
$If[G \leq s[[S]],$
$\{Co[i] = Co[i] + \alpha * G, S = \max[S-1, 1]\},$

```
          {Co[i] = Co[i] + α ∗ d[[S]], V[i] = V[i] + α ∗ (G − d[[S]]),
          S = min[S + 1, 3]}],
        S = max[S − 1, 1]];
    ];
    CoSum = CoSum + Co[M];
    VSum = VSum + V[M];
  ];
  CoMittel = α(M − 1) ∗ CoSum/K;
  VMittel = α(M − 1) ∗ VSum/K;
  Return[{CoMittel, VMittel}];
]
```

KS=Simulation[10000,300]

C.5 Simualtionsprogramm für das zeitstetige Modell

Needs[Statistics‘ContinuousDistributions‘]

RandomGamma[ν_, γ_] := Random[GammaDistribution[ν, γ]]

```
Simulation[K_,M_]:=Module[{s,π, d, p, α, β, λ, T, S, Co, V, CoSum, VSum},
  s = {420.46, 905.06, 734.6};
  π = {850, 1000, 1250};
  d = {200, 250, 300};
  T = {1, 1, 1};
  p = 0.8;
  α = 0.945;
  β = − log[α];
  λ = − log[p];
  CoSum = 0;
  VSum = 0;
  For[j = 1, j ≤ K, j + +,
    Co = 0;
    V = 0;
    S = 2;
    Tsum = 0;
    Tlast = 0;
    While[Tsum < M,
      W = Random[ExponentialDistribution[λ]];
```

$If[Tsum + W > Tlast + T[[S]],$
$\{If[Tlast + T[[S]] < M,$
$\{W = Tlast + T[[S]] - Tsum, Tsum = Tlast + T[[S]]\},$
$\{W = M - Tsum, Tsum = M\}],$
$Co = Co + \pi[[S]] * (\exp[-\beta * Tlast] - \exp[-\beta * Tsum])/\beta,$
$S = \max[S - 1, 1],$
$Tlast = Tsum\},$
$\{If[Tsum + W \geq M,$
$\{W = M - Tsum,$
$Tsum = M,$
$Co = Co + \pi[[S]] * (\exp[-\beta * Tlast] - \exp[-\beta * Tsum])/\beta\},$
$\{Tsum = Tsum + W,$
$G = RandomGamma[0.63, 6796.45],$
$If[G > s[[S]],$
$\{Co = Co + \pi[[S]] * (\exp[-\beta * Tlast] - \exp[-\beta * Tsum])/\beta +$
$+ d[[S]] * \exp[-\beta * Tsum],$
$V = V + (G - d[[S]]) * \exp[-\beta * Tsum],$
$S = \min[S + 1, 3],$
$TLast = Tsum\},$
$Co = Co + G * \exp[-\beta * Tsum]]\}]\}]];$
$CoSum = CoSum + Co;$
$VSum = VSum + V;$
$];$
$CoMittel = CoSum/K;$
$VMittel = VSum/K;$
$Return[\{CoMittel, VMittel\}];$
$]$

KS=Simulation[10000,300]

Literaturverzeichnis

[1] Statistik Austria. Entwicklung des bonus-malus systems. 1997.

[2] Erhan Cinlar. *Introduction to stochastic processes.* Prentice-Hall, 1975.

[3] Sobel M.J. Heyman, D.P. *Stochastic Models.* North-Holland, 1990.

[4] J. Lamperti. *Stochastic Processes.* Springer–Verlag, 1977.

[5] J. Lemaire. *Bonus–Malus Systems in automobile insurance.* Kluwer - Nijhoff, 1995.

[6] M. Nettekoven. *Bonushunger in der KFZ-Haftpflichtversicherung.* PhD thesis, Wirtschaftsuniversität Wien, 1998.

[7] Manfred Schäl. *Markoffsche Entscheidungsprozesse.* B.G. Teubner Stuttgart, 1990.

[8] G. Thanner. *Schadenmodelle und Strukturanalyse des BMS in der KFZ–Haftpflichtversicherung.* PhD thesis, Institut für Mathematik an der JKU Linz, 1995.

[9] Köllner Versicherung. *http://www.koellner.at/bonusmalus.shtml*, 2006.

[10] S. Zacks and B. Levikson. Claiming strategies and premium levels for bonus malus systems. *Scand. Actuarial J. No.1/2004, p.14-27.*