

Günther Sieghartsleitner

**Fondsgebundene
Lebensversicherungsverträge mit
garantierten Auszahlungen**

Diplomarbeit

Technische Mathematik
Studienzweig Operations Research, Statistik, Finanz- und
Versicherungsmathematik

Verfasst am

*Institut für Statistik
Technische Universität Graz*

unter Anleitung von
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Müller

Graz, im August 2005

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst, andere als angegebene Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

Günther Sieghartsleitner

Inhaltsverzeichnis

1	Stochastische Prozesse und Finanzmathematik	3
1.1	Grundlagen zeitstetiger Prozesse	3
1.2	Das stochastische Integral	6
1.3	Itô-Prozesse und der Itô-Kalkül	10
1.4	Der Finanzmarkt	13
1.4.1	Das N-Periodenmodell eines Finanzmarktes	14
1.4.2	Das Black-Scholes Modell	17
2	Vertragsmodelle	23
2.1	Ein-Perioden Modell	23
2.1.1	Explizite Berechnung einer Hedge	26
2.2	Jährliche Aufteilung eines Überschusses	27
2.2.1	Verträge ohne Zwischenkonto	27
2.2.2	Verträge mit Zwischenkonto	32
2.3	Verträge mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto	44
2.3.1	Simulationsergebnisse für die indirekte Methode	46
2.3.2	Simulationsergebnisse für die direkte Methode	51
3	Stochastische Zinsraten	55
3.1	Allgemeines	55
3.2	Diffusionsmodelle für die short rate	57
3.3	Das Vasicek Modell	62
3.3.1	Explizite Darstellung der Preise	63
3.3.2	Der Prozess (r_t, β_t, δ_t)	67
3.4	Das Heath-Jarrow-Morton Modell	74
3.4.1	Heath-Jarrow-Morton und das Diffusionsmodell für die short rate	77
4	Vertragsmodelle in Verbindung mit einer stochastischen Zinsrate	80
4.1	Ein-Perioden-Modell	80
4.1.1	Hedging	84
4.2	Jährliche Aufteilung eines Überschusses	86
4.2.1	Verträge ohne Zwischenkonto	86
4.2.2	Verträge mit Zwischenkonto	91
4.3	Verträge mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto	96
4.3.1	Indirekte Methode	96
4.3.2	Direkte Methode	100

C-Code der Simulationen	103
Literaturverzeichnis	128

Einleitung

Traditionelle Lebensversicherungsprodukte versprechen dem Inhaber der Polizza eine fixe Auszahlung zum Zeitpunkt der Fälligkeit des Vertrages. Aufgrund der mittlerweile sehr niedrigen Zinsraten ist auch der zur Kalkulation dieser Verträge verwendete Rechnungszins relativ niedrig. In Österreich beträgt dieser laut Höchstzinssatzverordnung 2003 der Finanzmarktaufsichtsbehörde seit 1. Jänner 2004 2,75%, soll aber ab 2006 auf 2,25% gesenkt werden. Zusätzlich erhalten bei den traditionellen Produkten die Kunden noch eine Beteiligung an einem Teil des Unternehmensgewinns.

Aufgrund der niedrigen Zinsraten brachten bzw. bringen viele Versicherungen fondsgebundene Produkte auf den Markt, bei denen der Kunde zusätzlich zu einer fixen Auszahlung am Ende noch einen Anteil an überschüssigem Gewinn erhält. Überschüssiger Gewinn bedeutet, dass die Versicherung durch Investition des vom Kunden einbezahlten Kapitals mehr Gewinn erwirtschaftet, als sie diesem als Auszahlung zusichert. Diese positive Differenz wird dann zwischen Versicherung und Kunde aufgeteilt, wobei es verschiedene Arten der Aufteilung gibt.

Da die Versicherung nur einen möglichen Überschuss, nicht aber einen allfälligen Verlust, mit dem Kunden teilt, spricht man bei der vertraglich fixierten Auszahlung von einem *garantiertem Mindestgewinn* bzw. einer *garantierten Mindestverzinsung*.

In Skandinavien und Großbritannien beispielsweise sind solche Produkte schon sehr lange am Markt. In Österreich kamen diese erst in den letzten Jahren in Mode, wobei meist eine Kapitalgarantie gegeben wird.

Früher wurde der, in einem mathematischem Sinn, korrekten Bewertung von Versicherungsverträgen nur wenig Beachtung geschenkt. Das lag zum einen daran, dass aufgrund der damals herrschenden Zinsraten die angebotenen Produkte so weit „out-of-the-money“ schienen, dass man der Meinung war, sich diesen Aufwand ersparen zu können (zum Beispiel haben britische Versicherungen in den 1970er und 1980ern bei einer Marktzinsrate von um die 10% Garantien von ca. 8% gegeben [21]). Andererseits standen aber auch die mathematischen Werkzeuge dazu teilweise noch nicht zur Verfügung [11].

Da die Versicherungen jedoch heutzutage für ihre Investitionen einerseits erheblich weniger Rendite bekommen als früher, wodurch diese bereits laufenden Verträge deutlich „in-the-money“ gekommen sind, und sie sich andererseits trotz dieser Tatsache teilweise sehr viel Zeit ließen, neue Verträge an die neuen Marktbedingungen ausreichend anzupassen, gerieten viele Unternehmen in Liquiditätsschwierigkeiten oder schlitterten in den Konkurs. Ein konkretes Beispiel ist die *Nissan Mutual life insurance group* aus

Japan. Diese ging in Konkurs, da sie Zinsgarantien in der Höhe von 4,7% p.a. nicht einhalten konnte, die Summe der ungedeckten Verbindlichkeiten belief sich auf \$2,56 Mrd. [11].

Auch in den USA waren die Folgen teilweise katastrophal: 1987 gingen 19, 1989 40 und 1991 58 Versicherungsunternehmen konkurs. Ebenso gab es einige große Pleiten in Kanada [6]. Natürlich blieb auch Europa davon nicht verschont, wo vor allem Großbritannien und Dänemark betroffen waren [11].

Als Konsequenz dieser Entwicklung wurde das Risikomanagement der Versicherungen einer erhöhten Aufmerksamkeit von Behörden, Fachpresse und Wissenschaft unterzogen. In weiterer Folge entstanden viele Arbeiten zu dieser Thematik, siehe zum Beispiel [1], [4] oder [25].

In dieser Arbeit werden, nach einer kurzen Einführung bzw. Wiederholung der stochastischen und finanzmathematischen Grundlagen in Kapitel 1, verschiedene Modelle von Vertragsformen von Lebensversicherungen mit garantierter Mindestverzinsung und Aufteilung von überschüssigem Gewinn vorgestellt. All diesen Modellen ist gemeinsam, dass sie einem gewissen Sinne *fair* sind, und dass die Rendite eines Referenz-Fonds als Grundlage für die Berechnung von überschüssigem Gewinn herangezogen wird. Die Vertragsmodelle unterscheiden sich durch die Art, wie überschüssiger Gewinn aufgeteilt wird.

Des weiteren wird in Kapitel 3 in die Theorie der stochastischen Zinsraten eingeführt. Es werden explizite Lösungen für das Modell von Vasicek hergeleitet, welche in Kapitel 4 in die vorgestellten Vertragsmodelle eingebaut werden.

An dieser Stelle möchte ich Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Müller für die gewissenhafte Betreuung danken. Meinen Eltern, die mich während meiner gesamten Ausbildung immer unterstützt haben, möchte ich besonders danken. Ebenso gilt mein Dank meiner Freundin Maria und allen anderen, die auf verschiedene Weise zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Kapitel 1

Einführung in die stochastischen Prozesse und Finanzmathematik

In diesem Kapitel werden wir jene mathematischen Werkzeuge und Begriffe kennenlernen, die wir benötigen, um finanzielle Forderungen bewerten zu können. Beginnen wollen wir mit Grundlagen aus dem Bereich der stochastischen Prozesse. Als Referenz sei auf [16] verwiesen.

1.1 Grundlagen zeitstetiger Prozesse

Definition 1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T = [0, \infty]$.

- (i) Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie $X = (X_t)_{t \in T}$ von Zufallsvariablen, die alle auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definiert sind und Werte in einem Messraum (E, \mathcal{E}) annehmen. (E, \mathcal{E}) heißt *Zustandsraum*.
- (ii) Für $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$, die T auf E abbildet, eine *Realisation* (bzw. ein *Pfad*) des Prozesses.
- (iii) Unter der *Verteilung eines stochastischen Prozesses* $X = (X_t)_{t \in T}$ versteht man die Verteilung der E^T -wertigen Zufallsvariable X , das heißt $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$ ($A \in \mathcal{E}^T$).
- (iv) Für $S = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ und $|S| < \infty$ heißt $P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(A) = P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A)$ mit $A \in \mathcal{E}^S$ eine *endlichdimensionale Randverteilung* von X .
- (v) Ein *Gaußscher Prozess* ist ein stochastischer Prozess, dessen endlichdimensionale Randverteilungen stets Normalverteilungen sind. Das heißt, für $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ ist $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ein n -dimensional normalverteilter Zufallsvektor.

Bemerkung 1.1. Sämtliche endlichdimensionale Randverteilungen eines Gaußschen Prozesses sind durch die Funktionen $m(t) := E[X_t]$, $t \geq 0$ und $\rho(s, t) := Cov[X_s, X_t]$, $s, t \geq 0$ festgelegt.

Definition 1.2. (i) Eine aufsteigende Folge von Untersigma-Algebren $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ heißt *Filtration*. \mathcal{F} erfüllt die üblichen Bedingungen, wenn

- \mathcal{F}_0 enthält alle \mathbb{P} -Nullmengen, d.h. alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) = 0$ und
- \mathcal{F} rechtsstetig ist, d.h. $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \forall t > 0$.

(ii) $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt *adaptiert*, wenn X_t für alle $t \geq 0$ \mathcal{F}_t -messbar ist. Jeder Prozess ist an seine kanonische Filtration $\mathcal{F}^0 := (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s | s \leq t)$ adaptiert.

(iii) Eine Zufallsvariable $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Stoppzeit*, wenn $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0$.

Bemerkung 1.2. Ein Prozess ist genau dann adaptiert, wenn X_t aus der zum Zeitpunkt t bekannten Information berechnet werden kann. $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ heißt, dass keine Information bekannt ist.

Definition 1.3. (i) Ein adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ integrierbarer Zufallsvariablen heißt *Martingal*, wenn

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad P - f.s. \text{ für } 0 \leq s < t$$

gilt.

(ii) Ein adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ integrierbarer Zufallsvariablen heißt *lokales Martingal*, wenn es eine Folge von Stoppzeiten $T_n \nearrow \infty$ gibt, sodass die gestoppten Prozesse $(X_{t \wedge T_n})_{0 \leq t \leq T}$ Martingale sind. Hierbei ist $t \wedge T_n = \min(t, T_n)$.

Bemerkung 1.3. Ein Martingal ist ein lokales Martingal aber nicht umgekehrt.

Die Brown'sche Bewegung

Ein in der Finanzmathematik besonders wichtiger stochastischer Prozess ist die Brown'sche Bewegung. Sie wird unter anderem dazu verwendet, die Dynamik von Aktienkursen und Zinsraten zu modellieren.

Definition 1.4 (Erste Definition der Brown'schen Bewegung). Ein reellwertiger stochastischer Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ heißt (eindimensionale, standardisierte) *Brown'sche Bewegung*, wenn er folgende Eigenschaften hat:

- (i) $B_0 = 0$
- (ii) Der Prozess hat unabhängige Zuwächse $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, die normalverteilt sind mit Mittel 0 und Varianz $t_j - t_{j-1}$. Das heißt, für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ gilt:

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

sind unabhängig, und

$$B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \sim N(0, t_j - t_{j-1}).$$

(iii) Alle Pfade sind stetig.

Satz 1.1. *Ein Gaußscher Prozess ist genau dann eine Brown'sche Bewegung, wenn*

(i) *alle Pfade stetig sind und $X_0 = 0$*

(ii) *$m(t) = 0$ und $\rho(s, t) = \min(s, t)$.*

Definition 1.5 (Zweite Definition der Brown'schen Bewegung). Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration. Ein reellwertiger Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ heißt Brown'sche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wenn gilt:

(i) B ist adaptiert.

(ii) $B_0 = 0$ (P-f.s.)

(iii) Für $0 \leq s < t < \infty$ ist der Zuwachs $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s und

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s).$$

(iv) Die Pfade von B sind (P-f.s.) stetig.

Die Brown'sche Bewegung ist also ein stetiger stochastischer Prozess mit unabhängigen, stationären und normalverteilten Zuwächsen. Man kann zeigen, dass die Pfade einer Brown'schen Bewegung fast sicher an keiner Stelle differenzierbar sind.

Lemma 1.2. *Eine Brown'sche Bewegung im Sinn der ersten Definition ist eine Brown'sche Bewegung im Sinn der zweiten Definition bezüglich der kanonischen Filtration*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s \mid s \leq t).$$

Satz 1.3. *Ist $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, dann sind folgende Prozesse Martingale mit stetigen Pfaden:*

(i) $(B_t)_{t \geq 0}$

(ii) $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$

(iii) $(\exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t))_{t \geq 0}$ mit $\theta \in \mathbb{C}$ (Exponentialmartingal)

Definition 1.6. (i) Eine Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn

$$V(f)_T = \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ zu erstrecken ist.

- (ii) Ein Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt von beschränkter Variation, wenn seine Pfade P-f.s. von beschränkter Variation sind.
- (iii) Existiert für einen Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ der Grenzwert

$$\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{p} \langle X, X \rangle_t$$

wenn die Feinheit der Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ von $[0, t]$ gegen Null strebt, dann heißt

$$\langle X, X \rangle = (\langle X, X \rangle_t)_{0 \leq t \leq T}$$

die *quadratische Variation* von X .

Für die Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ von $[0, t]$ wird das Maximum der Längen der Teilintervalle $[t_i, t_{i-1})$ als Feinheit der Zerlegung bezeichnet. Das heißt, die Feinheit der Zerlegung ist

$$\max_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Lemma 1.4. *Die Brown'sche Bewegung hat quadratische Variation*

$$\langle B, B \rangle_t = t.$$

Daraus folgt, dass die Brown'sche Bewegung nicht von beschränkter Variation ist. Denn: Ist $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ stetig und von beschränkter Variation, dann ist

$$\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \leq \underbrace{(\sup |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|}_{\leq V(X)_t < \infty}$$

woraus $\langle X, X \rangle = 0$ folgt.

1.2 Das stochastische Integral

Ziel ist die Definition des Integrals

$$\int_0^t H_s dB_s$$

wobei $(H_s)_{s \geq 0}$ ein geeigneter stochastischer Prozess und $(B_s)_{s \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung ist.

Naheliegender ist der Definitionsversuch über Riemann-Summen. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ eine Zerlegung von $[0, t]$ und $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$. Dann stellt sich die Frage, ob

$$\sum_{j=1}^n H_{t_j^*} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \rightarrow \int_0^t H_s dB_s \tag{1.1}$$

wenn der Grenzwert existiert und wenn die Feinheit der Zerlegung von $[0, t]$ gegen Null geht.

Beim Riemann-Integral ist der Grenzwert unabhängig von der Wahl von t_j^* . In (1.1) hängt der Grenzwert jedoch bereits bei einfachen Beispielen (z.B. $H_s = B_s$) von der Wahl von t_j^* ab. Jede Wahl von t_j^* liefert einen anderen Integralbegriff. Zum Beispiel führt die Wahl $t_j^* = t_{j-1}$ zum Itô-Integral und $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j-1})$ zum Stratonovitch-Integral.

Beispiel 1.1. Wir berechnen das Itô-Integral von $\int_0^t B_s dB_s$. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ eine Zerlegung von $[0, t]$. Nun berechnen wir folgende Riemann-Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j}^2 - B_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2} (B_t^2 - B_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.4 strebt die rechte Seite in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, wenn die Feinheit der Zerlegung gegen Null strebt. Es folgt $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

Integration einfacher Prozesse

Um dem Ausdruck $\int_0^t H_s dB_s$ eine Bedeutung zu geben, definieren wir dieses stochastische Integral zunächst für einfache Prozesse.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Brown'sche Bewegung und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ die Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s | s \leq t\} \cup \mathcal{N})$. Dann ist B eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathcal{F} und \mathcal{F} erfüllt die üblichen Bedingungen, das heißt \mathcal{F} ist rechtsstetig und enthält alle \mathbb{P} -Nullmengen.

Definition 1.7. (i) Ein stochastischer Prozess $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt einfach, wenn er eine Darstellung der Form

$$H_t = \Phi_0 \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$$

besitzt, wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Zerlegung von $[0, T]$ ist und Φ_j beschränkte, $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -messbare Zufallsvariablen sind. Zusätzlich sei Φ_0 beschränkt und \mathcal{F}_0 -messbar.

(ii) Das stochastische Integral eines einfachen Prozesses $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist der Prozess

$$\left(\int_0^t H_u dB_u \right)_{0 \leq t \leq T}$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_0^t H_u dB_u &= \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \Phi_k(B_t - B_{t_{k-1}}), \quad t_{k-1} < t < t_k \\ &= \sum_{j=1}^n \Phi_j(B_{t_j \wedge t} - B_{t_{j-1} \wedge t}). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.4. (i) Die Definition des stochastischen Integrals ist unabhängig von der Darstellung von H .

(ii) Der zweiten Darstellung entnimmt man, dass das stochastische Integral stetige Pfade besitzt.

(iii) Ein einfacher Prozess ist adaptiert.

Proposition 1.5. *Sei H ein einfacher Prozess, dann gilt:*

(i) Das Itô-Integral $(\int_0^t H_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein Martingal mit stetigen Pfaden.

(ii)

$$E \left[\int_0^t H_s dB_s \right] = 0$$

und

$$\text{Var} \left[\int_0^t H_s dB_s \right] = E \left[\left(\int_0^t H_s dB_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

Erste Erweiterung des Integralbegriffs

Für einfache Prozesse haben wir das stochastische Integral somit definiert. Wir erweitern nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von adaptierten Prozessen, nämlich auf die Klasse

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T} \mid H \text{ adaptiert und } E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < \infty \right\}.$$

Bei der Erweiterung des stochastischen Integrals von einfachen Prozessen auf Prozesse aus \mathcal{H} werden folgende zwei Eigenschaften benutzt:

- Mit dem Skalarprodukt

$$\langle H, J \rangle = E \left[\int_0^T H_s J_s ds \right]$$

und der Norm

$$\|H\|^2 = E \left[\int_0^T H_s^2 ds \right]$$

ist \mathcal{H} ein Hilbertraum.

- Die Menge der einfachen Prozesse ist dicht in \mathcal{H} .

Proposition 1.6 (1. Erweiterung des Itô-Integrals). *Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung I von \mathcal{H} in die Menge der Martingale mit stetigen Pfaden mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) Für einen einfachen Prozess H gilt

$$I(H) = \left(\int_0^t H_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}$$

- (ii) Für $H \in \mathcal{H}$ und $0 \leq t \leq T$ gilt

$$\begin{aligned} E[I(H)_t] &= 0 \\ E[(I(H)_t)^2] &= E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] \quad (\text{Isometrie}). \end{aligned}$$

Wir schreiben:

$$\int_0^t H_s dB_s = I(H)_t.$$

Zweite Erweiterung des Integralbegriffs

Die Voraussetzung $E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$ ist für viele praktische Anwendungen zu einschränkend. Durch Lokalisierung gelingt die Erweiterung auf Integranden aus

$$\tilde{\mathcal{H}} := \left\{ H = (H_t)_{t \geq 0} \mid H \text{ adaptiert, messbar und } \int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \quad P - f.s. \right\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$. Das Itô-Integral für Prozesse aus $\tilde{\mathcal{H}}$ ist im Allgemeinen kein Martingal mehr, sondern nur ein lokales Martingal.

Proposition 1.7 (2. Erweiterung des Itô-Integrals). *Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung \tilde{I} von $\tilde{\mathcal{H}}$ in die Menge der lokalen Martingale mit P -f.s. stetigen Pfaden, mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) Für $H \in \mathcal{H}$ gilt

$$\tilde{I}(H) = \left(\int_0^t H_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}$$

- (ii) *Stetigkeitseigenschaft:* Ist $(H^{(n)})_{n \geq 1}$ eine Folge von Prozessen aus $\tilde{\mathcal{H}}$ und gilt

$$\int_0^t (H_s^{(n)})^2 dB_s \rightarrow 0$$

dann folgt

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{I}(H_t^{(n)})| \rightarrow 0.$$

Wir schreiben:

$$\int_0^t H_s dB_s = \tilde{I}(H)_t.$$

1.3 Itô-Prozesse und der Itô-Kalkül

Wir lernen nun einen Differentialkalkül, den Itô-Kalkül, kennen, der auf dem stochastischen Integral basiert. Er wird uns zur berühmten Itô-Formel führen, die es uns ermöglicht, Funktionen $t \mapsto f(B_t)$ zu differenzieren (wobei f zweimal stetig differenzierbar ist).

Zuerst definieren wir jene Klasse von Prozessen, auf die die Itô-Formel angewendet werden kann.

Eindimensionale Itô-Prozesse

Definition 1.8. Sei $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Ein reellwertiger Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt *Itô-Prozess*, wenn er eine Darstellung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

besitzt, wobei gilt:

- X_0 ist \mathcal{F}_0 -messbar
- Die Prozesse $K = (K_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $H = (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ sind adaptiert
- $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ $P - f.s.$
- $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ $P - f.s.$

Bemerkung 1.5. (i) Die Darstellung ist eindeutig. Das heißt, wenn

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} X_0 &= X'_0 & P - f.s. \\ H &= H' & \lambda \otimes P - f.s. \\ K &= K' & \lambda \otimes P - f.s. \end{aligned}$$

(ii) Ein Itô-Prozess ist genau dann ein lokales Martingal, wenn $K = 0$ $\lambda \otimes P - f.s.$.

Die Integration nach einem Itô-Prozess ist wie folgt definiert:

Definition 1.9 (Integration nach einem Itô-Prozess). Sei $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein adaptierter reellwertiger Prozess und X ein Itô-Prozess, dann definiert man

$$\int_0^t Y_s dX_s := \int_0^t Y_s K_s ds + \int_0^t Y_s H_s dB_s$$

wann immer die rechte Seite definiert ist, das heißt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^T |Y_s K_s| ds &< \infty & P - f.s. \\ \int_0^T (Y_s K_s)^2 ds &< \infty & P - f.s. \end{aligned}$$

Folgende Proposition stellt den Zusammenhang von Itô-Integralen und Riemann-Summen her.

Proposition 1.8. *Ist $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein adaptierter reellwertiger Prozess mit P -f.s. stetigen Pfaden und existiert $\left(\int_0^t Y_s dX_s\right)_{0 \leq t \leq T}$, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n Y_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \xrightarrow{p} \int_0^t Y_s dX_s$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{p} \int_0^t Y_s H_s^2 ds$$

wenn die Feinheit der Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ von $[0, t]$ gegen Null strebt.

Aus Proposition 1.8 folgt für die quadratische Variation eines Itô-Prozesses:

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Zum Beispiel ist die Brown'sche Bewegung ein Itô-Prozess mit $K_s = 0$ und $H_s = 1$ ($B_t = B_0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dB_s$). Für die quadratische Variation der Brown'schen Bewegung folgt daher

$$\langle B, B \rangle_t = \int_0^t 1^2 ds = t.$$

Nun können wir die Itô-Formel angeben. Diese bildet die Erweiterung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung auf das stochastische Integral.

Satz 1.9 (Itô-Formel). *Ist $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Itô-Prozess und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann ist auch $f(X) := (f(X_t))_{0 \leq t \leq T}$ ein Itô-Prozess und es gilt*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (1.2)$$

Bemerkung 1.6. Wegen

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

gilt

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Korollar 1.10 (Produktregel). *Sind $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ Itô-Prozesse, dann auch $(X_t Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ und es gilt*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t. \quad (1.3)$$

Beispiel

Wir berechnen $\int_0^t B_s dB_s$ mit Hilfe der Itô-Formel. Wendet man die Itô-Formel auf $f(x) = x^2$ und $X_t = B_t$ an, dann erhält man:

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2d \underbrace{\langle B, B \rangle}_s \\ &= 2 \int_0^t B_s dB_s + t. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Mit Hilfe der Itô-Formel kann man auch folgenden Satz beweisen:

Satz 1.11. Für eine deterministische, auf $[0, T]$ integrierbare Funktion $f(t)$ ist der Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, definiert durch

$$X_t := \int_0^t f(s) dB_s$$

ein Gaußscher Prozess mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^t f(s)^2 ds$.

Mehrdimensionale Itô-Prozesse

Definition 1.10. Sei $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung, das heißt die B_t^i sind unabhängige eindimensionale Brown'sche Bewegungen bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Ein reellwertiger Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt eindimensionaler Itô-Prozess bezüglich $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, wenn er eine Darstellung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^j dB_s^j$$

besitzt, wobei

- X_0 ist \mathcal{F}_0 -messbar
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $(H_t^j)_{0 \leq t \leq T}$ sind adaptiert
- $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ und $\int_0^T (H_s^j)^2 ds < \infty$ P-f.s.

Analog zur quadratischen Variation definieren wir nun die Kovariation bzw. Kreuzvariation von zwei Itô-Prozessen X und Y .

Definition 1.11. Sind X und Y Itô-Prozesse bezüglich $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, dann existiert stets der Grenzwert

$$\sum_{j=1}^n (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) \xrightarrow{p} \langle X, Y \rangle_t$$

wenn die Feinheit der Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ von $[0, t]$ gegen Null strebt. Der Prozess

$$\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_t)_{0 \leq t \leq T}$$

heißt *Kovariation* von X und Y .

Daraus ergeben sich folgende Rechenregeln:

- $\langle X, Y \rangle$ ist symmetrisch und linear in beiden Argumenten
- $\langle A, Y \rangle = 0$, wenn A beschränkte Variation hat
- $\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}t$
- $\left\langle \int_0^t H_s dX_s, \int_0^t H'_s dX'_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s d\langle X, X' \rangle_s$

Sei $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ ein n -dimensionaler Itô-Prozess bezüglich $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, das heißt die X_t^i sind Itô-Prozesse mit der Darstellung

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i du + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^{ij} dB_s^j,$$

dann folgt aus den obigen Rechenregeln:

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{l=1}^d \int_0^t H_s^{il} H_s^{jl} ds.$$

Satz 1.12 (Mehrdimensionale Itô-Formel). Sei $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ ein n -dimensionaler Itô-Prozess bezüglich der d -dimensionalen Brown'schen Bewegung $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ und ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $f(X) = (f(X_t^1, \dots, X_t^n))_{0 \leq t \leq T}$ ein eindimensionaler Itô-Prozess bezüglich B und es gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Korollar 1.13. Ist $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein eindimensionaler Itô-Prozess bezüglich einer eindimensionalen Brown'schen Bewegung $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ und ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s. \tag{1.4}$$

1.4 Der Finanzmarkt

Nachdem wir nun über die hier benötigten Grundlagen stochastischer Prozesse Bescheid wissen, wollen wir zum Finanzmarkt übergehen. Anhand des zeitdiskreten N -Periodenmodells führen wir grundlegende Begriffe ein, bevor wir uns dem stetigen Black-Scholes Modell zuwenden.

1.4.1 Das N-Periodenmodell eines Finanzmarktes

Zuerst betrachten wir einen Finanzmarkt mit $d + 1 \geq 2$ Finanzgütern (Aktien, Anleihen, Währungen...), die nur zu den Zeitpunkten $0, \dots, N$ gehandelt werden. Das Finanzgut 0 bezeichne eine Einheit einer risikolosen Anleihe mit Zinsrate $\rho > 0$. Die Preise werden als zufällig modelliert. Dem Marktmodell liegt also ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ zugrunde.

- Definition 1.12.** (i) Die Zufallsvariable $S_{n,j}$ bezeichne den Preis des Finanzgutes j zum Zeitpunkt n . Sei $S_n^T = (S_{n,0} \dots S_{n,d})$, dann heißt $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$ der *Preisprozess*. Der Preis von Finanzgut 0 ist dabei $S_{n,0} = (1 + \rho)^n$.
- (ii) Der Prozess $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ mit $\tilde{S}_n = S_{n,0}^{-1} S_n$ ist der *diskontierte Preisprozess*. Diskontierte Preise ermöglichen den Preisvergleich zu verschiedenen Zeitpunkten.

Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt n die Preise S_0, S_1, \dots, S_n bekannt sind und damit auch der Wert aller messbaren Funktionen $h(S_0, S_1, \dots, S_n)$. Das sind nach dem Faktorisierungslemma der Maßtheorie genau die $\sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$ -messbaren Zufallsvariablen. Im allgemeinen wird der Informationsverlauf durch eine aufsteigende Folge von σ -Algebren $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ beschrieben, also durch eine Filtration.

Somit wird das allgemeine N-Periodenmodell festgelegt durch

- einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$,
- eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ und
- einen an $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ adaptierten und quadratisch integrierbaren Preisprozess $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Definition 1.13. (i) x mit $x^T = (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt *Portfolio*. Sein Wert zum Zeitpunkt n ist $x^T S_n = x_0 S_{n,0} + \dots + x_d S_{n,d}$.

- (ii) Eine *Handelsstrategie* X ist ein an $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ adaptierter, quadratisch integrierbarer \mathbb{R}^{d+1} -wertiger Prozess $X = (X_n)_{0 \leq n < N}$.

Interpretation: Man bildet zum Zeitpunkt n das Portfolio X_n und hält es bis zum Zeitpunkt $n + 1$. Dann wird das neue Portfolio X_{n+1} gebildet.

Adaptiert bedeutet, dass zur Bildung von X_n nur die zum Zeitpunkt n zur Verfügung stehende Information benutzt werden darf.

Zusätzlich definiert man $X_{-1} := 0$ und $X_N := 0$.

- (iii) Der Prozess $\delta(X) = (\delta_n(X))_{0 \leq n \leq N}$ mit

$$\delta_n(X) = (X_{n-1} - X_n)^T S_n$$

heißt *Entnahmeprozess*.

$$\delta_n(X) \begin{cases} > 0 & \delta_n(X) \text{ Einheiten werden entnommen} \\ = 0 & \text{der Wert des Portfolios } X_{n-1} \text{ wird g\u00e4nzlich neu investiert} \\ < 0 & \text{zum Aufbau des neuen Portfolios } X_n \text{ m\u00fcssen } |\delta_n(X)| \\ & \text{Einheiten zugef\u00fchrt werden} \end{cases}$$

Speziell ist $\delta_0(X) = -X_0^T S_0$ und $\delta_N(X) = X_{N-1}^T S_N$.

- (iv) Eine Handelsstrategie $X = (X_n)_{0 \leq n < N}$ hei\u00dft *selbstfinanzierend*, wenn $\delta_n(X) = 0$ f\u00fcr $1 \leq n \leq N - 1$ ist. Das hei\u00dft, das Anfangsportfolio X_0 wird zum Preis $X_0^T S_0$ gebildet und dann zu jedem Zeitpunkt ohne Geldzufuhr umgeschichtet. Die Handelsstrategie liefert dann den Endwert $\delta_N(X) = X_{N-1}^T S_N$.
- (v) Eine Handelsstrategie X hei\u00dft *Handelsarbitrage*, oder kurz *Arbitrage*, wenn $\delta_n(X) \geq 0$ f\u00fcr $0 \leq n \leq N$ gilt und es ein n mit $P(\delta_n(X) > 0) > 0$ gibt. Ein Modell hei\u00dft *arbitragefrei*, wenn es keine Handelsarbitrage gibt.

Definition 1.14. Zwei Wahrscheinlichkeitsma\u00dfe auf (Ω, \mathfrak{A}) hei\u00dfen \u00e4quivalent, wenn \mathbb{P} absolut stetig bez\u00fcglich \mathbb{Q} ($\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$) und \mathbb{Q} absolut stetig bez\u00fcglich \mathbb{P} ($\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$) ist. Das hei\u00dft

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

\mathbb{P} und \mathbb{Q} haben also die gleichen Nullmengen. Wir schreiben $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Satz 1.14. \mathbb{P} ist genau dann absolut stetig bez\u00fcglich \mathbb{Q} , wenn es eine nichtnegative Zufallsvariable Z auf (Ω, \mathfrak{A}) gibt, sodass

$$P(A) = \int_A Z(\omega) dQ(\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

gilt. Z wird als Dichte von \mathbb{P} bez\u00fcglich \mathbb{Q} bezeichnet und man schreibt $Z = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

Satz 1.15 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie). Im N -Periodenmodell eines Finanzmarktes sind folgende Aussagen \u00e4quivalent:

- (i) Das Modell ist arbitragefrei.
- (ii) Es existiert ein zu \mathbb{P} \u00e4quivalentes Wahrscheinlichkeitsma\u00df \mathbb{Q} , sodass der diskontierte Preisprozess \tilde{S} bez\u00fcglich \mathbb{Q} ein Martingal ist. (\mathbb{Q} hei\u00dft dann ein risikoneutrales Ma\u00df oder ein Martingalma\u00df f\u00fcr \tilde{S} .)

Optionen und Claims

Eine europäische Call-Option (Put-Option) ist das Recht, nicht die Pflicht, eine Einheit des Finanzgutes j zum Zeitpunkt N zu einem vereinbarten Ausübungspreis K zu kaufen (zu verkaufen). Die Call-Option wird durch die Auszahlung $C_N = (S_{N,j} - K)^+$ und die Put-Option durch die Auszahlung $P_N = (K - S_{N,j})^+$ zum Zeitpunkt N beschrieben. Allgemeiner ist ein Claim (Forderung) ein Vertrag, der zum Zeitpunkt n die Auszahlung C_n garantiert ($1 \leq n \leq N$). C_n muss aus der zum Zeitpunkt n zur Verfügung stehenden Information berechenbar sein.

Definition 1.15. (i) Ein *Claim* ist ein adaptierter, quadratisch integrierbarer Prozess $C = (C_n)_{1 \leq n \leq N}$.

(ii) Ein Claim heißt *absicherbar*, wenn es eine Handelsstrategie X gibt, mit

$$C_n = \delta_n(X) \quad \text{für} \quad 1 \leq n \leq N.$$

X wird dann als *Hedge* oder *replizierendes Portfolio* bezeichnet.

(iii) Ein Modell heißt *vollständig*, wenn jeder Claim absicherbar ist.

(iv) Ist C ein absicherbarer Claim in einem arbitragefreien Modell und X eine Hedge für C , dann heißt

$$s(C) = s_0(C) := X_0^T S_0$$

der *faire Preis* von C .

(v) Ist C ein absicherbarer Claim mit Hedge X , dann heißt der Prozess $V(C) = (V_n(C))_{0 \leq n \leq N}$ mit $V_n(C) = X_n^T S_n$ der *Wertprozess* von C . Insbesondere ist $V_0(C) = s_0(C)$ und $V_N(C) = 0$.

Bemerkung 1.7. Wird der Claim zu einem Preis $s \neq s_0(C)$ gehandelt, ergibt sich (formal im um den Handel mit C erweiterten Modell) eine Arbitragemöglichkeit:

1. $s > s_0(C)$: Verkaufe C zum Preis s , erwerbe X_0 zum Preis $X_0^T S_0 = s_0(C)$ und investiere $s - s_0(C)$ im risikofreien Finanzgut. Der risikolose Gewinn ist $(1 + \rho)^N (s - s_0(C))$.
2. $s < s_0(C)$: Der Besitzer des Portfolios X_0 hat eine Arbitragemöglichkeit: Er verkauft X_0 zum Preis $X_0^T S_0 = s_0(C)$ und investiert $s_0(C) - s$ im risikofreien Finanzgut. Sein risikoloser Gewinn ist $(1 + \rho)^N (s_0(C) - s)$.

Satz 1.16. In einem arbitragefreien Modell ist der faire Preis eines absicherbaren Claims C gegeben durch

$$s_0(C) = E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{n=1}^N \tilde{C}_n \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

wobei \mathbb{Q} ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß für \tilde{S} ist. Ist $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, dann gilt

$$s_0(C) = E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{n=1}^N \tilde{C}_n \right]$$

Satz 1.17 (2. Fundamentalsatz der Preistheorie). *Ein arbitragefreies Modell (mit endlichem Ω) ist genau dann vollständig, wenn das äquivalente Martingalmaß für \tilde{S} auf \mathcal{F}_N eindeutig bestimmt ist.*

Satz 1.18. *Es gilt*

$$\tilde{V}_n(C) = E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=n+1}^N \tilde{C}_j \mid \mathcal{F}_n \right].$$

Bemerkung 1.8. Aus dem Wertprozess lässt sich die Hedge eines Claims konstruieren, wie später am Beispiel des Black-Scholes Modells gezeigt werden wird.

1.4.2 Das Black-Scholes Modell

Black und Scholes behandelten in [3] das Problem, Europäische Optionen auf eine Aktie, die keine Dividenden ausbezahlt, zu bewerten und zu hedgen. Sie kamen zu einer expliziten Formel, deren Einfachheit wegen das Black-Scholes Modell zum Referenzmodell schlechthin wurde.

Hier soll das Modell in seinen Grundzügen vorgestellt werden. Weiters wird die Black-Scholes Optionspreisformel angegeben und gezeigt, wie man explizit eine Hedge bestimmt.

Das Modell von Black und Scholes ist ein zeitstetiges Modell mit einem risikolosen Finanzgut (Anleihe, Bond) und einem risikobehafteten Finanzgut, zum Beispiel eine Aktie.

Der Preis des risikolosen Finanzgutes zum Zeitpunkt t (S_t^0) genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

Dabei ist $r > 0$ die (stetige) risikolose Zinsrate. Wird zu Beginn $S_0^0 = 1$ investiert, erhalten wir als eindeutige Lösung für S_t^0

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad t \geq 0.$$

Der Preis des risikobehafteten Finanzgutes zum Zeitpunkt t (S_t^1) ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t) \tag{1.5}$$

gegeben, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ Konstanten sind und $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine standard Brown'sche Bewegung ist. μ wird als erwartete Returnrate und σ als Volatilität bezeichnet.

Das Modell gilt auf dem Intervall $[0, T]$, wobei T das Fälligkeitsdatum der Option ist. Die explizite Lösung von (1.5) lautet

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right).$$

Das kann man zum Beispiel mit der Formel von Itô (1.4) nachprüfen, indem man $S_t^1 = f(t, B_t)$ setzt.

Als Filtration wählen wir die vollständige kanonische Filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}'_t \cup \mathcal{N})$$

wobei $\mathcal{F}'_t = \sigma(B_s \mid s \leq t)$ und \mathcal{N} die Menge aller \mathbb{P} -Nullmengen ist.

Handelsstrategien

Nun übertragen wir einige Definitionen aus dem zeitdiskreten Fall auf das Black-Scholes Modell:

Definition 1.16. (i) Eine *Handelsstrategie* ist ein adaptierter \mathbb{R}^2 -wertiger Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $X_t = (X_t^0, X_t^1)$.

(ii) Der *Wertprozess* $V(X) = (V(X)_t)_{0 \leq t \leq T}$ einer Handelsstrategie X ist durch

$$V(X)_t = X_t^0 S_t^0 + X_t^1 S_t^1$$

definiert.

(iii) Die durch $\tilde{S}_t = (S_t^0)^{-1} S_t$ und $\tilde{V}(X)_t = (S_t^0)^{-1} V(X)_t$ definierten Prozesse heißen *diskontierter Preisprozess* und *diskontierter Wertprozess*.

(iv) Der *Wertzuwachs* (capital gain) einer Handelsstrategie X ist definiert durch

$$G(X)_t = \int_0^t X_t^0 dS_t^0 + \int_0^t X_t^1 dS_t^1.$$

(v) Eine Handelsstrategie X heißt *selbstfinanzierend*, wenn

$$G(X)_t = V(X)_t - V(X)_0 \quad \forall t \in [0, T]$$

bzw.

$$dV(X)_t = X_t^0 dS_t^0 + X_t^1 dS_t^1.$$

Lemma 1.19. X ist genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$d\tilde{V}(X)_t = X_t^1 d\tilde{S}_t^1.$$

Das äquivalente Martingalmaß

Zur Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes im Black-Scholes Modell, benötigen wir folgenden Satz:

Satz 1.20 (Satz von Girsanov). Sei B eine Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $H \in \tilde{\mathcal{H}}$. Weiters sei der Exponentialprozess $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$, definiert durch

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \right),$$

ein Martingal. Dann ist der um den Drift $\int_0^t H_s ds$ verschobene Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$W_t = B_t + \int_0^t H_s ds$$

eine standard Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{Q}_T)$. Dabei ist \mathbb{Q}_T das durch $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = Z_T$ festgelegte Wahrscheinlichkeitsmaß. \mathbb{Q}_T ist äquivalent zu \mathbb{P} .

Bemerkung 1.9. Man beachte, dass $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ stets ein lokales Martingal ist. Falls

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 ds \right) \right] < \infty$$

gilt, kann man zeigen, dass $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ auch ein Martingal ist. Diese Bedingung wird *Novikov-Bedingung* genannt.

Um nun ein äquivalentes Martingalmaß für den diskontierten Preisprozess zu bestimmen, berechnet man $d\tilde{S}_t^1$. Es gilt

$$d\tilde{S}_t^1 = \sigma \tilde{S}_t^1 dW_t$$

mit

$$W_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t.$$

Nach dem Satz von Girsanov (1.20) ist $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine standard Brown'sche Bewegung, wenn man von \mathbb{P} zum äquivalenten Maß \mathbb{Q}_T mit $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = Z_T$ übergeht. Dabei ist $H_s = \frac{\mu - r}{\sigma}$ zu setzen. In diesem Fall ist $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ das Exponentialmartingal der Brown'schen Bewegung B .

Somit ist $(\tilde{S}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{Q}_T)$ ein Martingal. Man beachte, dass \tilde{S}_t^1 und S_t^1 bezüglich \mathbb{Q}_T nicht von μ abhängen.

Bewertung von Optionen im Black-Scholes Modell

Definition 1.17. (i) Ein *Claim* mit Ausübungszeitpunkt T ist eine nichtnegative, \mathcal{F}_T -messbare und integrierbare Zufallsvariable C_T . Im Fall eines europäischen Calls gilt

$$C_T = f(S_T^1) = (S_T^1 - K)^+.$$

(ii) Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie X heißt *zulässig*, wenn

$$E_{\mathbb{Q}_T} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (\tilde{V}(X)_t)^2 \right] < \infty.$$

- (iii) Der Claim C_T heißt *absicherbar*, wenn es eine zulässige (selbstfinanzierende) Handelsstrategie X gibt mit

$$V(X)_T = C_T.$$

X wird dann als *Hedge* bezeichnet.

$$s_0(C_T) = V(X)_0$$

heißt der *faire Preis* von C_T zum Zeitpunkt 0.

Satz 1.21. *Jeder bezüglich $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_T$ quadratisch integrierbare Claim C_T ist absicherbar. Der diskontierte Wertprozess einer Hedge X ist ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Es gilt*

$$\tilde{V}(X)_t = E_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} C_T | \mathcal{F}_t] \quad (1.6)$$

und speziell

$$s_0(C_T) = V(X)_0 = E_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} C_T]. \quad (1.7)$$

Bewertung von Claims der Form $C_T = f(S_T^1)$ mit $E_{\mathbb{Q}} [C_T^2] < \infty$

Aus (1.6) folgt

$$V(X)_t = E_{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} f(S_T^1) | \mathcal{F}_t].$$

Aus $S_T^1 = S_t^1 \exp\left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)$ folgt

$$V(X)_t = E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} f \left(S_t^1 \exp \left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

Mit

$$F(t, x) = E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} f \left(x \exp \left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) \right) \right]$$

erhält man

$$V(X)_t = F(t, S_t^1) \quad \text{und}$$

$$s_0(C_T) = F(0, S_0^1).$$

Angewendet auf den europäischen Call $C_T = (S_T^1 - K)^+$ ergibt sich als Lösung für $F(t, x)$ die berühmte Black-Scholes Formel

$$F(t, x) = x \phi \left(d + \sigma \sqrt{T-t} \right) - e^{-r(T-t)} K \phi(d)$$

mit

$$d = \frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (1.8)$$

Explizite Berechnung einer Hedge für $C_T = f(S_T^1)$

Ein replizierendes Portfolio muss zu jeder Zeit t den Wert

$$\tilde{V}(X)_t = e^{-rt} F(t, S_t)$$

haben, wobei F wie zuvor definiert ist. Wenn wir

$$\tilde{F}(t, x) = e^{-rt} F(t, e^{rt}x)$$

setzen, dann folgt

$$\tilde{V}(X)_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t^1).$$

Ist \tilde{F} (bzw. F) zweimal stetig differenzierbar nach x und einmal stetig differenzierbar nach t , kann die Formel von Itô auf $\tilde{F}(t, x)$ angewendet werden und wir erhalten

$$d\tilde{V}(X)_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, \tilde{S}_t^1)dt + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t^1)d\tilde{S}_t^1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(t, \tilde{S}_t^1)(d\tilde{S}_t^1)^2.$$

Aus $d\tilde{S}_t^1 = \sigma \tilde{S}_t^1 dW_t$ folgt $(d\tilde{S}_t^1)^2 = \sigma^2 (\tilde{S}_t^1)^2 dt$ und damit

$$d\tilde{V}(X)_t = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, \tilde{S}_t^1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(t, \tilde{S}_t^1) \sigma^2 (\tilde{S}_t^1)^2 \right) dt + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t^1) d\tilde{S}_t^1.$$

Da $(\tilde{V}(X)_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} ist folgt, dass der dt -Term gleich Null ist. Damit vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$d\tilde{V}(X)_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t^1) d\tilde{S}_t^1.$$

Nach Lemma 1.19 wählen wir für den Hedging-Prozess

$$X_t^1 := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t^1) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t^1).$$

Setzen wir zusätzlich

$$X_t^0 := \tilde{F}(t, \tilde{S}_t^1) - X_t^1 \tilde{S}_t^1,$$

dann ist das Portfolio $X = (X_t^0, X_t^1)$ selbstfinanzierend mit

$$\tilde{V}(X)_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t^1)$$

beziehungsweise

$$V(X)_t = X_t^0 S_t^0 + X_t^1 S_t^1 = S_t^0 \tilde{F}(t, \tilde{S}_t^1) = F(t, S_t^1).$$

Betrachten wir den Europäischen Call, so folgt mit (1.8)

$$X_t^1 = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \phi \left(d + \sigma \sqrt{T-t} \right).$$

Zuletzt fassen wir das Ergebnis zusammen:

Satz 1.22. Ist $C_T = f(S_T^1)$ und ist $F(t, x)$ einmal stetig nach t und zweimal stetig nach x differenzierbar, dann ist $X_t = (X_t^0, X_t^1)$ mit

$$X_t^1 = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t^1) \quad \text{und}$$

$$X_t^0 = e^{-rt} (F(t, S_t^1) - X_t^1 S_t^1)$$

eine Hedge.

Kapitel 2

Vertragsmodelle

Im folgenden werden verschiedene Vertragsmodelle vorgestellt. Allen Modellen ist gemeinsam, dass der Kunde zum Zeitpunkt des Inkraft-Tretens des Vertrages eine Einzahlung tätigt, die von der Versicherung für die Dauer der Vertragslaufzeit investiert wird. Im Vertrag wird dem Kunden eine jährliche Mindestverzinsung garantiert. Weiters wird ein Benchmark-Fonds spezifiziert. Dessen Rendite entscheidet darüber, ob es zu zusätzlichen Auszahlungen an den Kunden kommt. Die Versicherung ist allerdings nicht verpflichtet tatsächlich in diesen Fond zu investieren.

Für die Simulationen der Vertragsmodelle wird eine risikolose Zinsrate von $r = 3.5\%$ angenommen. Diese Annahme entstand nach Vergleich verschiedener in Österreich angebotener festverzinslicher Produkte. Da viele Pensions- und Zukunftsvorsorgefonds eine 3-Jahres-Volatilität von um die 10% haben, wird für die Simulation eine Volatilität von $\sigma = 10\%$ verwendet und zum Vergleich eine Volatilität von $\sigma = 20\%$.

2.1 Ein-Perioden Modell

Der Kunde leistet zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Einzahlung X . Die Versicherung garantiert ihm dafür eine jährliche Verzinsung von g und investiert X in einen Fond S mit Preis $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $S_0 = 1$. Die garantierte Auszahlung am Ende der Vertragslaufzeit, also zum Zeitpunkt T , beträgt somit Xe^{gT} . Hat zu diesem Zeitpunkt der Fond mehr erwirtschaftet als dem Kunden garantiert wurde, erhält der Kunde am Überschuss $(XS_T - Xe^{gT})^+$ einen Anteil α .

Von der Tatsache, dass die Feststellung, ob überschüssiger Gewinn vorhanden ist oder nicht, nur einmal, und zwar am Ende, erfolgt und hierfür die gesamte Laufzeit quasi als eine Periode betrachtet wird, leitet sich auch der Name des Modells ab.

Der Vertrag wird beschrieben durch die Forderung

$$A_T = Xe^{gT} + \alpha (X S_T - Xe^{gT})^+ = X \left(e^{gT} + \alpha (S_T - e^{gT})^+ \right). \quad (2.1)$$

Unter der Annahme einer konstanten risikolosen Zinsrate $r \geq 0$ und der Vollständigkeit

des Marktmodells für den Benchmark-Fond, ist der faire Preis der Forderung A_T zum Zeitpunkt $t = 0$ nach (1.7) durch

$$V_0(A_T) = E_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_T \right]$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\tilde{A}_T = e^{-rT} A_T$ die diskontierte Forderung A_T und \mathbb{Q} das (eindeutig bestimmte) risikolose Maß. Der Vertrag ist fair, wenn $V_0(A_T) = X$ bzw.

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = 1$$

ist. In diesem Fall kann die Versicherung das Vermögen X (mit Hilfe einer geeigneten Hedge) so anlegen, dass sie am Ende der Laufzeit genau die benötigten A_T Geldeinheiten zur Abdeckung der Vertragsverpflichtungen erwirtschaftet hat.

Mit Hilfe der Formel von Black-Scholes können wir $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ leicht ausdrücken, denn $(S_T - e^{gT})^+$ ist nichts anderes als ein europäischer Call mit Ausübungspreis e^{gT} . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= V_0(e^{gT}) + V_0 \left(\alpha (S_T - e^{gT})^+ \right) \\ &= e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} [e^{gT}] + \alpha V_0 \left((S_T - e^{gT})^+ \right) \\ &= e^{T(g-r)} + \alpha F(t, x)_{t=0, x=1} \end{aligned}$$

wobei $F(t, x)$ die Black-Scholes Formel (1.8) für einen europäischen Call ist. Für $t = 0$ und $x = S_0 = 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(0, 1) &= \phi \left(\frac{\left(r - g - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} + \sigma \sqrt{T} \right) - e^{T(g-r)} \phi \left(\frac{\left(r - g - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &= \phi \left(\frac{r - g + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{T} \right) - e^{T(g-r)} \phi \left(\frac{r - g - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{T} \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung für einen fairen Vertrag lautet also

$$e^{T(g-r)} + \alpha \left(\phi \left(\frac{r - g + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{T} \right) - e^{T(g-r)} \phi \left(\frac{r - g - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{T} \right) \right) = 1 \quad (2.2)$$

Die Abb. 2.1 und 2.2 zeigen Kombinationen von α und g für $T = 10$ und $T = 25$ bei denen Bedingung (2.2) erfüllt ist.

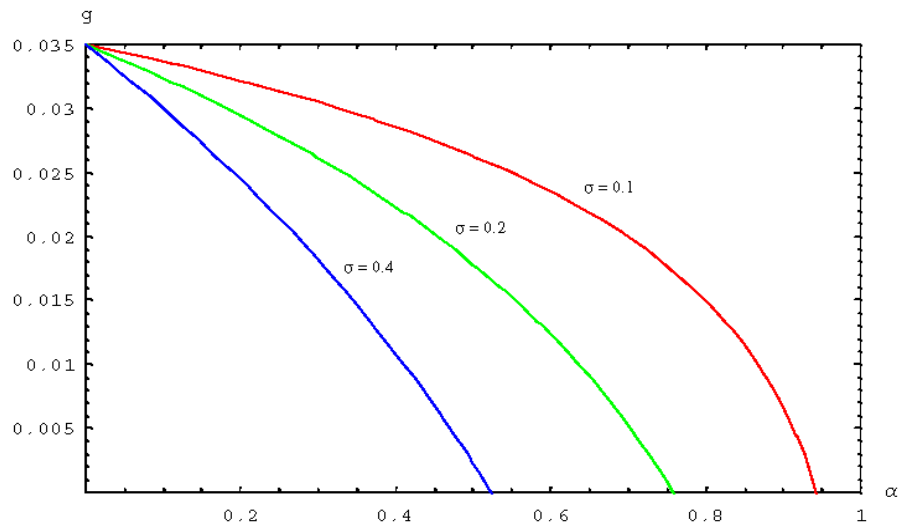


Abbildung 2.1: Kombinationen von α und g für verschiedene Volatilitäten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $T=10$ fair ist

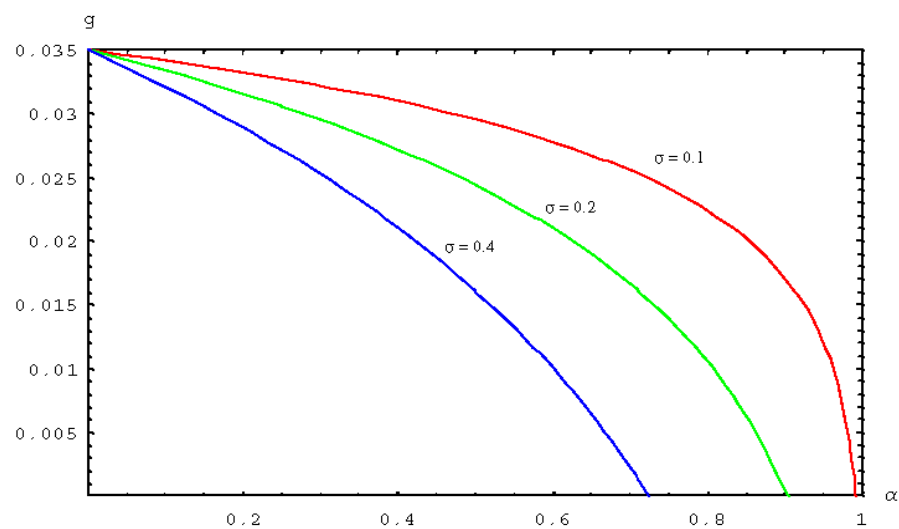


Abbildung 2.2: Kombinationen von α und g für verschiedene Volatilitäten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $T=25$ fair ist

Wie zu erwarten ist α höher je niedriger die Volatilität ist. Ausserdem ist α bei längerer Laufzeit verhältnismäßig höher. Generell ist α bei Garantien, die nahe bei r sind auch noch relativ gross, was, wie wir anschließend sehen werden, bei den anderen Vertragsmodellen nicht so ist. Da bei diesem Modell aber während der Laufzeit nie zusätzliche Zahlungen stattfinden, muss der Vertrag für den Kunden durch ein verhältnismäßig hohes α attraktiv gemacht werden, da zum Beispiel ein „schlechtes“ letztes Jahr dazu führen kann, dass wirklich nur die Garantie ausbezahlt wird, obwohl während der anderen Jahre vielleicht immer Überschuss vorhanden gewesen wäre.

2.1.1 Explizite Berechnung einer Hedge

Analog dazu, wie wir die Hedge im Black-Scholes Modell berechnet haben (siehe S 21) können wir auch hier vorgehen. Dazu schreiben wir $\frac{A_T}{X}$ als

$$\frac{A_T}{X} = K + \alpha f(S_T)$$

mit $K = e^{gT}$ und $f(x) = (x - K)^+$.

Sei H eine Hedge, dann ist

$$\tilde{V}(H)_t = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\tilde{A}_T}{X} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V(H)_t &= E_{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}(K + \alpha f(S_T)) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} K + \alpha \underbrace{E_{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t]}_{=F(t, S_t)}. \end{aligned}$$

Also können wir schreiben:

$$V(H)_t = G(t, S_t) = e^{-r(T-t)} K + \alpha F(t, S_t),$$

wobei $F(t, x)$ die Black-Scholes Formel (1.8) ist.

Damit ist nach Satz (1.22) $H_t = (H_t^0, H_t^1)$ mit

$$H_t^1 = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t^1) = \alpha \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t^1)$$

$$H_t^0 = e^{-rt} (G(t, S_t^1) - H_t^1 S_t^1)$$

eine Hedge.

2.2 Jährliche Aufteilung eines Überschusses

Dieses Modell wurde von Miltersen und Persson in [18] vorgestellt.

Wiederum leistet der Kunde eine Einzahlung X . Die Versicherung garantiert ihm für jedes Jahr eine Verzinsung von g_i , $i = 1 \dots T$. Im Unterschied zum Modell in Kapitel 2.1 wird nun aber jährlich die Rendite δ_i des Benchmark-Fonds mit g_i verglichen. Ist $\delta_i > g_i$ wird die Differenz $(\delta_i - g_i) > 0$ zwischen Kunde und Versicherung aufgeteilt. Andernfalls bekommt der Kunde im Jahr i nur seine ihm vertraglich zugesicherte Verzinsung g_i , was bedeutet, dass die Versicherung die Differenz $(g_i - \delta_i)$ decken muss.

Für die Aufteilung von Überschuss gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder $(\delta_i - g_i) > 0$ wird zur Gänze aufgeteilt, das heißt der Kunde bekommt daran den Anteil α und die Versicherung den verbliebenen Teil.

Oder man teilt nicht alles auf, der Kunde bekommt den Anteil $\alpha > 0$, die Versicherung $\beta > 0$ und der nicht aufgeteilte Rest kommt auf ein eigenes Zwischenkonto. Von diesem wird in Jahren, in denen $\delta_i < g_i$ ist, Geld auf das Konto des Kunden transferiert, um die Verpflichtung des Mindestgewinns zu erfüllen.

Ist am Ende der Vertragslaufzeit, also zum Zeitpunkt T , noch Geld auf diesem Konto vorhanden, wird es dem Kunden gutgeschrieben. Andernfalls muss die Versicherung das Defizit abdecken (Kapitel 2.2.2).

Wir bezeichnen mit A das Konto des Kunden, mit C das Konto der Versicherung und B das Zwischenkonto, falls verwendet. Entsprechend bezeichnen wir mit A_t , C_t und B_t das Guthaben am jeweiligen Konto zum Zeitpunkt t .

2.2.1 Verträge ohne Zwischenkonto (einfacher Aufteilungsmechanismus)

Im Fall des einfachen Überschuss-Aufteilungsmechanismus wird der Vertrag durch die Forderung

$$A_T = X e^{\sum_{i=1}^T g_i + \alpha(\delta_i - g_i)^+}$$

des Kunden beschrieben. Unter der Annahme einer konstanten risikolosen Zinsrate $r > 0$ und der Vollständigkeit des Marktmodells für den Benchmark-Fond, ist der faire Preis der Forderung A_T zum Zeitpunkt $t = 0$ nach (1.7) durch

$$V_0(A_T) = E_{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_T]$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\tilde{A}_T = e^{-rT} A_T$ die diskontierte Forderung A_T und \mathbb{Q} das (eindeutig bestimmte) risikolose Maß. Der Vertrag ist fair, wenn $V_0(A_T) = X$ bzw.

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = 1 \tag{2.3}$$

ist. In diesem Fall kann die Versicherung das Vermögen X (mit Hilfe einer geeigneten Hedge) so anlegen, dass sie am Ende der Laufzeit genau die benötigten A_T Geldeinheiten zur Abdeckung der Vertragsverpflichtungen erwirtschaftet hat.

Angenommen, die Dynamik des Fonds sei

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

mit Volatilität σ und einer Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ bezüglich \mathbb{Q} . Dann ist hierfür

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

eine Lösung. Damit kommt man auf eine jährliche Rendite des Fonds von

$$\begin{aligned} \delta_t &= \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log \left(\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-1) - \sigma W_{t-1}\right) \right) = \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(W_t - W_{t-1}). \end{aligned}$$

Setzt man $u_t := (W_t - W_{t-1})$, dann ist $u_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ und man kann δ_t schreiben als

$$\delta_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma u_t. \quad (2.4)$$

Mit (2.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) &= V_0\left(e^{\sum_{i=1}^T g_i + \alpha(\delta_i - g_i)^+}\right) \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} e^{\sum_{i=1}^T g_i + \alpha(\delta_i - g_i)^+}\right] \\ &= e^{\sum_{i=1}^T g_i - rT} E_{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=1}^T e^{\alpha(r - g_i - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma u_i)^+}\right] \\ &= e^{\sum_{i=1}^T g_i - rT} \prod_{i=1}^T E_{\mathbb{Q}}\left[e^{\alpha(r - g_i - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma u_i)^+}\right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da $u_i \sim N(0, 1)$ ist, kann der letzte Erwartungswert wie folgt berechnet werden. Wegen

$$r - g_i - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\frac{\sigma^2}{2} + g_i - r}{\sigma} =: -d$$

gilt:

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha(r-g_i - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma u_i)^+} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(r-g_i - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma x)^+ - \frac{x^2}{2}} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{\alpha(r-g_i - \frac{\sigma^2}{2}) + \alpha\sigma x - \frac{x^2}{2}} dx + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\phi(-d)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha(r-g_i - \frac{\sigma^2}{2})} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{(x-\alpha\sigma)^2}{2} + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} dx + \phi(-d) \\
 &= e^{\alpha r - \alpha g_i - \frac{\alpha\sigma^2}{2} + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{(x-\alpha\sigma)^2}{2}} dx + \phi(-d) \\
 &= e^{\frac{\alpha^2\sigma^2 - \alpha\sigma^2}{2} + \alpha(r-g_i)} \phi \left(\frac{r-g_i}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g_i-r}{\sigma} \right). \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Setzt man (2.6) in (2.5) ein, erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= \underbrace{e^{\sum_{i=1}^T (g_i - r)}}_{\prod_{i=1}^T e^{g_i - r}} \prod_{i=1}^T \left(e^{-\alpha(g_i - r) + \frac{\alpha\sigma^2}{2}(\alpha-1)} \phi \left(\frac{r-g_i}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g_i-r}{\sigma} \right) \right) \\
 &= \prod_{i=1}^T \left(e^{(1-\alpha)(g_i - r - \frac{\alpha\sigma^2}{2})} \phi \left(\frac{r-g_i}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + e^{g_i - r} \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g_i-r}{\sigma} \right) \right). \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Falls in jedem Jahr der gleiche Zinssatz garantiert wird, also $g_i = g \forall i$ gilt, vereinfacht sich (2.7) zu

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = \left(e^{(1-\alpha)(g-r - \frac{\alpha\sigma^2}{2})} \phi \left(\frac{r-g}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + e^{g-r} \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma} \right) \right)^T. \quad (2.8)$$

Nach (2.3) ist in diesem Fall der Vertrag genau dann fair, wenn

$$e^{(1-\alpha)(g-r - \frac{\alpha\sigma^2}{2})} \phi \left(\frac{r-g}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + e^{g-r} \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma} \right) = 1 \quad (2.9)$$

erfüllt ist. Man beachte, dass (2.9) unabhängig von T ist.

Das heißt, um Kombinationen von α und g zu finden, für die ein Vertrag fair ist, suchen wir für ein g eine Nullstelle der Funktion

$$F(\alpha) = e^{(1-\alpha)(g-r - \frac{\alpha\sigma^2}{2})} \phi \left(\frac{r-g}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \alpha\sigma \right) + e^{g-r} \phi \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma} \right) - 1.$$

F ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend, denn mit der Abkürzung

$$\xi = \frac{r-g}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} + \sigma\alpha$$

gilt

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= e^{(1-\alpha)(g-r-\frac{\sigma^2}{2})} \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + \phi(\xi)\xi \right) \\ &= e^{(1-\alpha)(g-r-\frac{\sigma^2}{2})} \sigma \int_{-\infty}^{\xi} \phi(u) du > 0. \end{aligned}$$

Für $g < r$ gilt

$$\begin{aligned} F(0) &= e^{g-r} \phi\left(\frac{r-g}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) + e^{g-r} \phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma}\right) - 1 \\ &= e^{g-r} \left(1 - \phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{g-r}{\sigma}\right) \right) - 1 \\ &= e^{g-r} - 1 < 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(1) &= \phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{r-g}{\sigma}\right) + e^{-(r-g)} \phi\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r-g}{\sigma}\right) - 1 \\ &= e^{-(r-g)} \phi\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r-g}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r-g}{\sigma}\right) \\ &\geq \phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right) \\ &= 1 - 2\phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Hier wurde benutzt, dass $F(1)$ monoton wachsend in $r-g \geq 0$ ist. Da $F(\alpha)$ stetig ist, folgt insgesamt, dass es für $g < r$ im Intervall $(0, 1)$ ein eindeutig bestimmtes $\alpha = \alpha_0(g)$ gibt, welches (2.9) erfüllt.

Abb. 2.3 zeigt für verschiedene Volatilitäten σ Kombinationen von α und g für die ein Vertrag fair ist. Man kann erkennen, dass mit steigender Volatilität des Fonds die garantierte Verzinsung sinkt und mit steigender Garantie der Anteil α kleiner wird.

Wird ein Parameterpaar $(\bar{\alpha}, g)$ mit $\bar{\alpha} < \alpha_0(g)$ gewählt, bedeutet das, dass $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) < 1$ ist. In diesem Fall kann, wie eingangs schon erwähnt, durch geeignete Wahl von β und Einführung eines Zwischenkontos ein fairer Vertrag zum Parameterpaar $(\bar{\alpha}, g)$ gefunden werden. Wie wir später sehen werden, ist das für $\bar{\alpha} > \alpha_0(g)$ nicht möglich, womit Abb. 2.3 gleichsam eine Grenze darstellt, oberhalb derer keine Kombinationen von α , g und β existieren, die bei Einführung eines Zwischenkontos zu einem fairen Vertrag

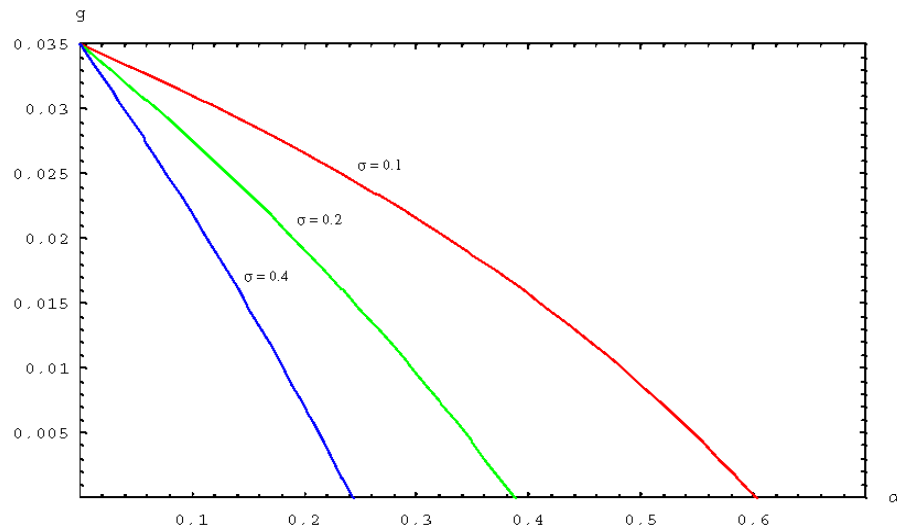


Abbildung 2.3: Kombinationen von α und g für verschiedene Volatilitäten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ fair ist

führen.

Zunächst wollen wir aber noch ein äquivalentes Kriterium für einen fairen Vertrag angeben.

Der Wert von Konto C zum Zeitpunkt t ist

$$C_t = X e^{\sum_{i=1}^t \delta_i} - A_t.$$

Da sich die diskontierten Einnahmen und Ausgaben zum Zeitpunkt des Inkraft-Tretens des Vertrages ausgleichen müssen, gilt

$$\tilde{A}_T + \tilde{C}_T = X.$$

Daraus folgt

$$V_0 \left(\frac{C_T}{X} \right) = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\tilde{C}_T}{X} \right] = E_{\mathbb{Q}} \left[1 - \frac{\tilde{A}_T}{X} \right] = 1 - V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right).$$

Damit ist

$$V_0 \left(\frac{C_T}{X} \right) = 0 \tag{2.10}$$

eine zu (2.3) äquivalente Bedingung für einen fairen Vertrag.

2.2.2 Verträge mit Zwischenkonto

Es soll nun gezeigt werden, dass Kombinationen von α und g mit $\alpha < \alpha_0(g)$ in einem fairen Vertrag realisiert werden können, wenn die Vertragsform mit Überschussaufteilung über das Zwischenkonto gewählt wird.

Unter der Annahme einer konstanten Mindestverzinsung $g_i = g$ gilt für die Guthaben auf den Konten für $0 \leq t \leq T$

$$A_t = A_{t-1}e^{g+\alpha(\delta_t-g)^+} \quad \text{mit } A_0 = X, \quad (2.11)$$

$$C_t = C_{t-1} + A_{t-1} \left(e^{\beta(\delta_t-g)^+} - 1 \right) \quad \text{mit } C_0 = 0 \text{ und} \quad (2.12)$$

$$B_t = Xe^{\sum_{i=1}^t \delta_i} - A_t - C_t \quad \text{mit } B_0 = 0. \quad (2.13)$$

In diesem Fall wird der Vertrag durch die Forderung

$$A_T + B_T^+$$

des Kunden beschrieben.

Unter der Annahme einer konstanten risikolosen Zinsrate $r > 0$ und der Vollständigkeit des Marktmodells für den Benchmark-Fond ist der faire Preis der Forderung $A_T + B_T^+$ zum Zeitpunkt $t = 0$ nach (1.7) durch

$$V_0(A_T + B_T^+) = E_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_T \right] + E_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{B}_T^+ \right]$$

gegeben. Analog zu (2.3) ist der Vertrag genau dann fair, wenn

$$V_0 \left(\frac{A_T + B_T^+}{X} \right) = e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{A_T}{X} \right] + e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right] = 1. \quad (2.14)$$

Da $V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right) \geq 0$ ist, muss $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) \leq 1$ gelten. Das ist der Grund dafür, warum für Kombinationen von α und g mit $\alpha > \alpha_0(g)$, wie vorhin schon erwähnt, auch mit Überschussaufteilung über ein Zwischenkonto kein fairer Vertrag realisiert werden kann. Für $\alpha < \alpha_0(g)$ hingegen ist $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) < 1$ und wir werden nun zeigen, dass ein $\beta \in (0, \infty)$ existiert, sodass in diesem Fall ein fairer Vertrag realisiert werden kann.

Zunächst müssen wir mit Hilfe obiger Formeln für A_t , C_t und B_t einen Ausdruck für $\frac{B_T^+}{X}$ finden, der es uns erlaubt $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) + V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right) - 1$ als Funktion $F(\beta)$ zu schreiben. Ein Vertrag ist dann fair, wenn wir für ein Tupel (α, g) mit $\alpha < \alpha_0(g)$ ein β finden, sodass $F(\beta) = 0$.

Aus (2.11) und (2.12) erhalten wir

$$A_T = Xe^{\sum_{i=1}^T g + \alpha(\delta_i - g)^+}$$

und

$$\begin{aligned} C_T &= \sum_{i=1}^T A_{i-1} \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^T \left(X e^{\sum_{j=1}^{i-1} g + \alpha(\delta_j - g)^+} \right) \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right). \end{aligned}$$

Mit (2.13) ergibt sich

$$\frac{B_T}{X} = e^{\sum_{i=1}^T \delta_i} - e^{\sum_{i=1}^T g + \alpha(\delta_i - g)^+} - \sum_{i=1}^T \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) e^{\sum_{j=1}^{i-1} g + \alpha(\delta_j - g)^+}.$$

Da $\delta_i = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma u_i$ mit $u_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ können wir dies umschreiben zu

$$\frac{B_T}{X} = \prod_{i=1}^T e^{\delta_i} - \prod_{i=1}^T e^{g + \alpha(\delta_i - g)^+} - \sum_{i=1}^T \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \prod_{j=1}^{i-1} e^{g + \alpha(\delta_j - g)^+}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right) &= e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right] \\ &= e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\prod_{i=1}^T e^{\delta_i} - \prod_{i=1}^T e^{g + \alpha(\delta_i - g)^+} - \sum_{i=1}^T \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \prod_{j=1}^{i-1} e^{g + \alpha(\delta_j - g)^+} \right)^+ \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(\beta) &= e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\prod_{i=1}^T e^{\delta_i} - \prod_{i=1}^T e^{g + \alpha(\delta_i - g)^+} - \sum_{i=1}^T \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \prod_{j=1}^{i-1} e^{g + \alpha(\delta_j - g)^+} \right)^+ \right] \\ &\quad + V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) - 1. \end{aligned}$$

$F(\beta)$ ist eine stetige Funktion. $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ ist ein T -dimensionales Integral, welches auf den Bereich eingeschränkt werden kann, auf dem der Integrand positiv ist. Sowohl der Integrand als auch der Bereich, über den integriert wird, hängen von β ab.

Wird β kleiner, so wird einerseits der Integrand und andererseits auch der Bereich, über den integriert wird, größer. Also wird $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ bzw. $V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right)$ größer und damit auch $F(\beta)$. Es gilt also

$$\beta_1 < \beta_2 \Rightarrow F(\beta_1) > F(\beta_2).$$

Weiters gilt wegen $(x)^+ \geq x$

$$\begin{aligned} F(0) &= e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\prod_{i=1}^T e^{\delta_i} - \prod_{i=1}^T e^{g+\alpha(\delta_i-g)^+} \right)^+ \right] + e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=1}^T e^{g+\alpha(\delta_i-g)^+} \right] \\ &\geq e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=1}^T e^{\delta_i} \right] = e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} [S_T] > 0. \end{aligned}$$

Für $\beta \rightarrow \infty$ geht $e^{-rT} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ gegen Null womit $F(\infty) < 0$ ist, da $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) - 1 < 0$ für $\alpha < \alpha_0(g)$.

Somit besitzt $F(\beta)$ eine eindeutige Nullstelle in $(0, \infty)$.

Da u_1, \dots, u_T unabhängige $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen sind, läßt sich $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ wie schon erwähnt als T -dimensionales Integral ausdrücken. Dieses Integral läßt sich aber nicht wesentlich vereinfachen, sodass zur numerischen Berechnung von $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ auf eine Monte-Carlo-Simulation zurückgegriffen wird.

Zur Erstellung der nachfolgenden Abbildungen wurde die numerischen Berechnung von $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ mit einem Stichprobenumfang von $N = 30.000$ durchgeführt. Zur Varianzreduktion wurde die antithetische Varianzreduktion verwendet. Das bedeutet, dass in jedem Simulationsdurchgang ein Pfad von $\frac{B_T}{X}$ mit den generierten Zufallszahlen u_i und ein Pfad mit deren negativen Werten simuliert und am Ende der Mittelwert gebildet wird.

Schreibt man $\frac{B_T}{X}$ als Funktion G von β und den Zufallszahlen u_{ij} erfolgt die approximative Berechnung von $E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right]$ also in folgender Form:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T^+}{X} \right] &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (G(\beta; u_{i1}, \dots, u_{iT}))^+ + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (G(\beta; -u_{i1}, \dots, -u_{iT}))^+}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \left(\sum_{i=1}^N (G(\beta; u_{i1}, \dots, u_{iT}))^+ + \sum_{i=1}^N (G(\beta; -u_{i1}, \dots, -u_{iT}))^+ \right). \end{aligned}$$

Mit einem Newton-Rhapson-Verfahren wird zu einem gegebenen α ein β gesucht, sodass (2.14) erfüllt ist. Die Ableitung nach β in einem Newton-Rhapson-Schritt wird numerisch durch $\frac{H(\beta+h)-H(\beta)}{h}$ mit $h = 10^{-5}$ berechnet.

Bevor wir zu den Simulationsergebnissen kommen sei noch eine zu (2.14) äquivalente Bedingung für einen fairen Vertrag angeben: Wegen $\tilde{A}_T + \tilde{B}_T + \tilde{C}_T = X$ und $B_T = B_T^+ - B_T^-$ muss

$$V_0 \left(\frac{C_T - B_T^-}{X} \right) = 0$$

gelten. Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{V_0(C_T)}{X} = \frac{V_0(B_T^-)}{X}. \quad (2.15)$$

$\frac{V_0(C_T)}{X}$ wird in der Simulation via $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ mitberechnet. Man kann es aber auch wie folgt berechnen:

Der Wert von Konto C zum Zeitpunkt t wird bestimmt durch

$$C_t = X e^{\sum_{i=1}^t \delta_i} - A_t = \sum_{i=1}^t \left(e^{\beta(\delta_i - g_i)^+} - 1 \right) A_{i-1}. \quad (2.16)$$

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit, wird zunächst die Abkürzung

$$\pi_A(t) = V_0 \left(\frac{A_t}{X} \right) = E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rt} \frac{A_t}{X} \right]$$

eingeführt, welche die vereinfachte Darstellung (2.8) hat. Mit (2.16) kommen wir auf

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{C_t}{X} \right) &= e^{-rt} E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^t \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \frac{A_{i-1}}{X} \right] \\ &= e^{-rt} \sum_{i=1}^t E_{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r} \left(e^{\beta(\delta_i - g)^+} - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_{i-1} \right]}_{= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r} \left(e^{\beta(\delta_1 - g)^+} - 1 \right) \right] =: \pi} e^r \frac{A_{i-1}}{X} \right] \\ &= \pi e^{-rt} \sum_{i=1}^t e^{ri} E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(i-1)} \frac{A_{i-1}}{X} \right] \\ &= \pi e^{-rt} \sum_{i=1}^t \pi_A(i-1) e^{ri}, \end{aligned}$$

mit $\pi_A(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} \pi &= e^{-r} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(e^{\beta(\delta_1 - g)^+} - 1 \right) \right] \\ &= V_0 \left(e^{\beta(\delta_1 - g)^+} - 1 \right) \\ &= e^{(\beta-1)(r+\frac{1}{2}\beta\sigma^2)-\beta g} \phi \left(\frac{r-g-\frac{1}{2}\sigma^2+\beta\sigma^2}{\sigma} \right) - e^{-r} \phi \left(\frac{r-g-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Die Berechnung von π erfolgte ähnlich jener von (2.8).

Simulationsergebnisse

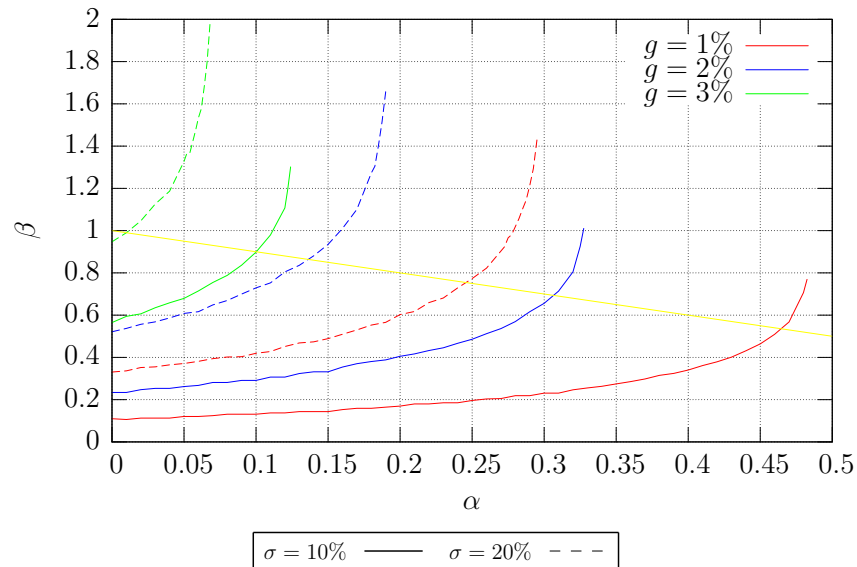


Abbildung 2.4: Kombinationen von α und β für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 10$ fair ist.

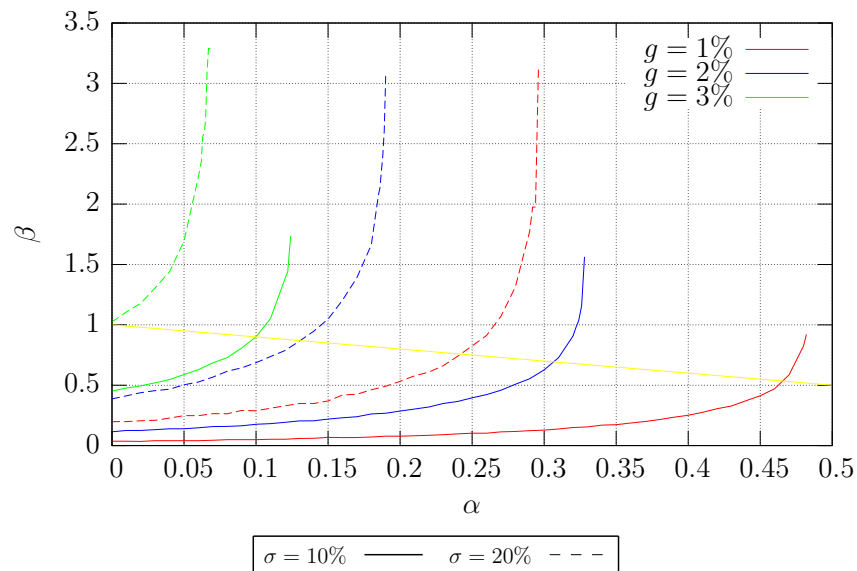


Abbildung 2.5: Kombinationen von α und β für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 25$ fair ist.

Wie man aus den Abb. 2.4 und 2.5 erkennen kann, wird die Bandbreite an möglichen α 's mit steigender Volatilität und vor allem mit steigender Garantie immer kleiner. Weiters ist zu sehen, dass bei höherer Volatilität das zu einem Tupel (g, α) gehörende

β ebenfalls höher ist.

Die gelb eingezeichnete Linie gibt $\alpha + \beta = 1$ an. Die Forderung $\alpha + \beta \leq 1$ ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn einzig und allein in den Benchmark-Fond investiert wird.

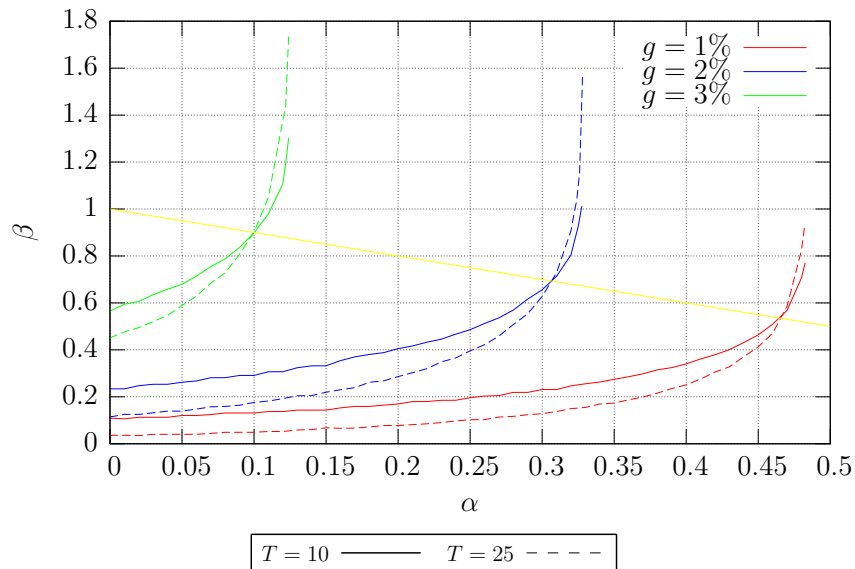


Abbildung 2.6: Kombinationen von α und β für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist.

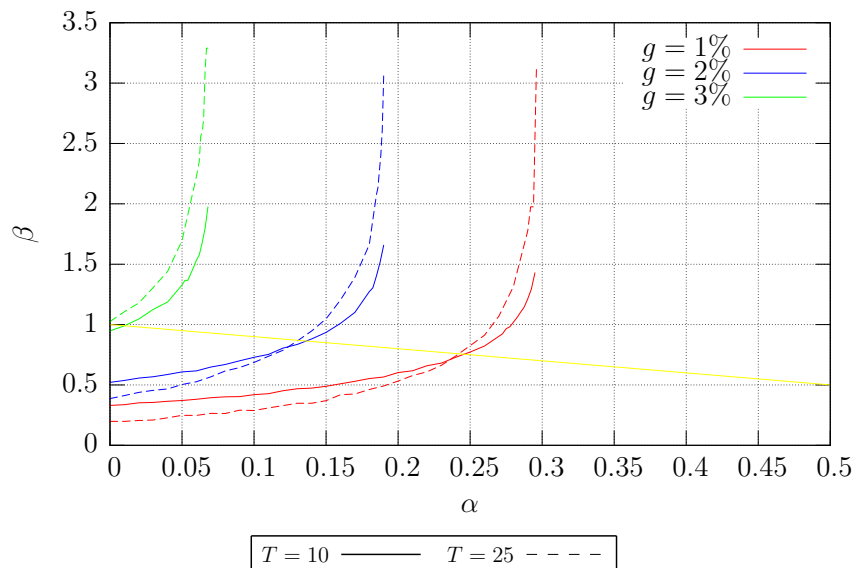


Abbildung 2.7: Kombinationen von α und β für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist.

Aus den Abb. 2.6 und 2.7, wo die Graphen nach Volatilität geordnet sind, sieht man,

dass bei $\sigma = 10\%$ bei kürzerer Laufzeit β durchwegs größer ist als bei einer längeren Laufzeit. Das kann man damit erklären, dass die Versicherung bei kürzerer Laufzeit weniger Zeit hat, zu Einnahmen zu kommen, weshalb diese dann höher sein müssen. Etwas anders ist die Situation bei höherer Volatilität: Hier wird der Punkt, ab dem β bei $T = 25$ größer ist als bei $T = 10$ schon früher erreicht bzw. ist dies bei $g = 3\%$ von vornherein schon der Fall. Hier wirkt sich aus, dass es mit steigender Volatilität riskanter wird, über einen längeren Zeitraum etwas zu garantieren. Weiters kann man erkennen, dass die Graphen für ein g im annähernd gleichen α stoppen. Das stimmt überein mit den Überlegungen, dass die Graphen in Abb. 2.3, die unabhängig von T sind, eine Grenze darstellen, oberhalb derer auch unter Verwendung eines Zwischenkontos kein fairer Vertrag realisiert werden kann. In den Abb. 2.14 und 2.15 ist dies ebenfalls zu sehen.

Um festzustellen, was die jährliche Garantie „kostet“, können wir $\frac{V_0(C_T)}{X} = \frac{V_0(B_T^-)}{X}$ betrachten. Dies kann mal als (prozentuelle) Prämie auffassen, die der Kunde zum Zeitpunkt $t = 0$ dafür zu bezahlen hat, dass die Versicherung am Ende ein mögliches Defizit auf dem Zwischenkonto abdeckt und ihm somit g garantiert (vgl. auch (2.15)).

Aus den Abb. 2.8 und 2.9 kann man erkennen, dass die Prämie $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ einerseits für ein festes g in σ steigt und andererseits natürlich auch für ein festes σ in g steigt. Das kann man damit erklären, dass mit einem Anstieg von α , g und σ die Gefahr zunimmt, dass das Zwischenkonto am Ende im Minus ist. Daher muss die Versicherung zu mehr Einnahmen kommen, um dieses abdecken zu können. Das bedeutet einen Anstieg von $\frac{V_0(C_T)}{X}$ und damit von $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$.

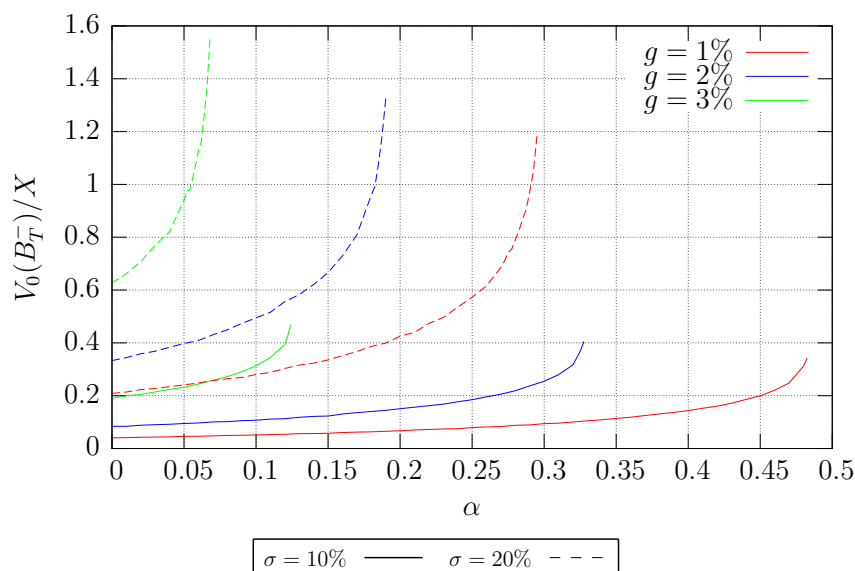


Abbildung 2.8: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 10$ fair ist.

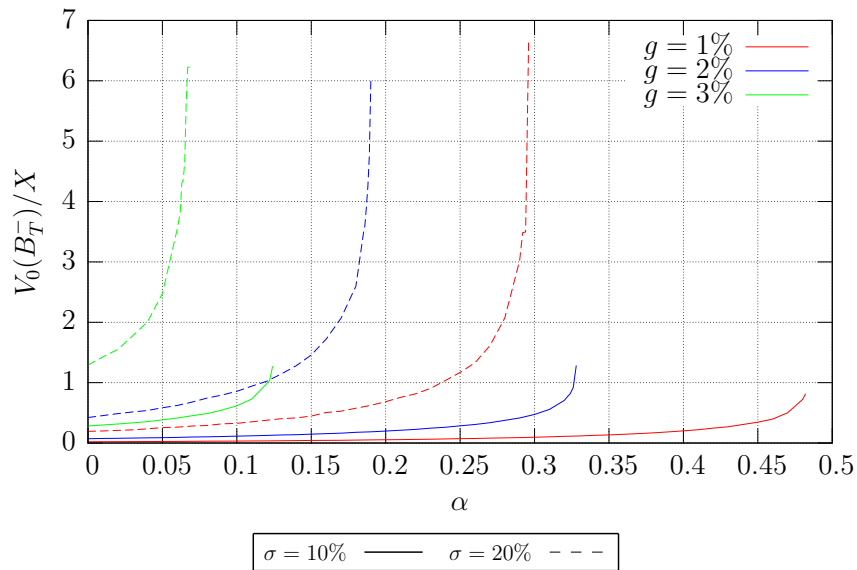


Abbildung 2.9: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 25$ fair ist.

In den Abb. 2.10 und 2.11 werden die Graphen wieder nach der Laufzeit verglichen.

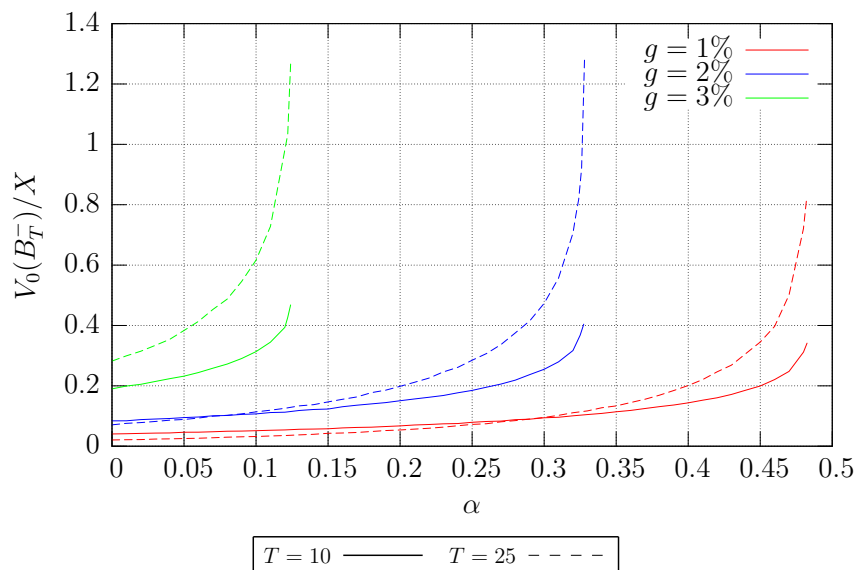


Abbildung 2.10: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist.

Wir erkennen, dass (wenn auch minimal) eine niedrige Garantie bei einer kürzeren Laufzeit für eher kleine Werte von α teurer zu sein scheint, als bei einer längeren Laufzeit.

Wie wir schon gesehen haben ist β (und damit auch $\alpha + \beta$) bei kürzerer Laufzeit

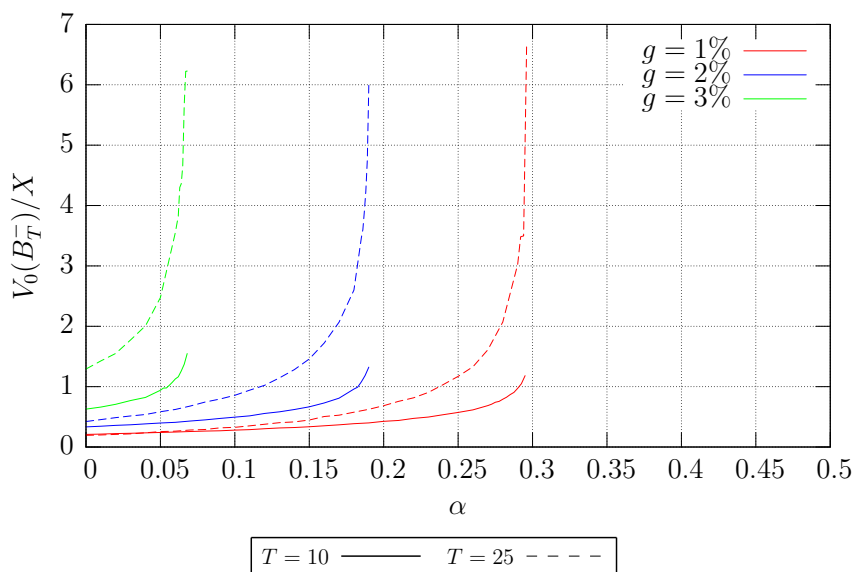


Abbildung 2.11: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist.

grundsätzlich höher als bei längerer Laufzeit. Weiters ist β auch höher, je größer g ist. Das heißt, dass bei kürzerer Laufzeit die zusätzlichen Auszahlungen an Kunde und Versicherung, sofern sie stattfinden, insgesamt höher ausfallen. Insbesondere steigen diese auch noch mit größer werdendem g . Bei einem g von z.B. 3% muss öfter damit gerechnet werden, dass Geld zur Deckung der Garantie vom Zwischenkonto abgezogen werden muss. Das bedeutet insgesamt, dass sich einerseits durchwegs weniger Geld auf dem Zwischenkonto befinden wird, als bei einem g von z.B. 1% und andererseits mehr Einnahmen für die Versicherung, da β größer ist. Daher steigt $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ wenn g steigt. Da es grundsätzlich riskanter ist, über einen längeren Zeitraum etwas zu garantieren und gleichzeitig auch öfter zusätzliche Zahlungen zu erwarten sind, steigt $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ bei längerer Laufzeit an, wobei der Unterschied zwischen den Laufzeiten größer wird je größer g ist.

Bei einer eher niedrigen Garantie von z.B. 1% sind Zahlungen zur Deckung seltener zu erwarten. Es wird dann zwar häufiger zu zusätzlichen Auszahlungen kommen; da aber $\alpha + \beta$ relativ klein ist, wird vom Überschuss ein größerer Teil am Zwischenkonto verbleiben. Je kleiner α ist, desto mehr bleibt. Hier wirkt sich nun aus, dass bei kürzerer Laufzeit aufgrund des größeren β mehr vom Überschuss aufgeteilt wird, womit weniger Geld auf B zu erwarten ist. Das hat zur Folge, dass $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ bei kürzerer Laufzeit höher ist. Erst mit steigendem α und damit höheren Zahlungen auch bei längerer Laufzeit dreht sich die Situation wieder um.

Nun wollen wir uns noch $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ ansehen. Dies kann interpretiert werden als Prämie, die der Kunde zu bezahlen hat, um am Ende der Laufzeit ein mögliches Guthaben auf B zu bekommen.

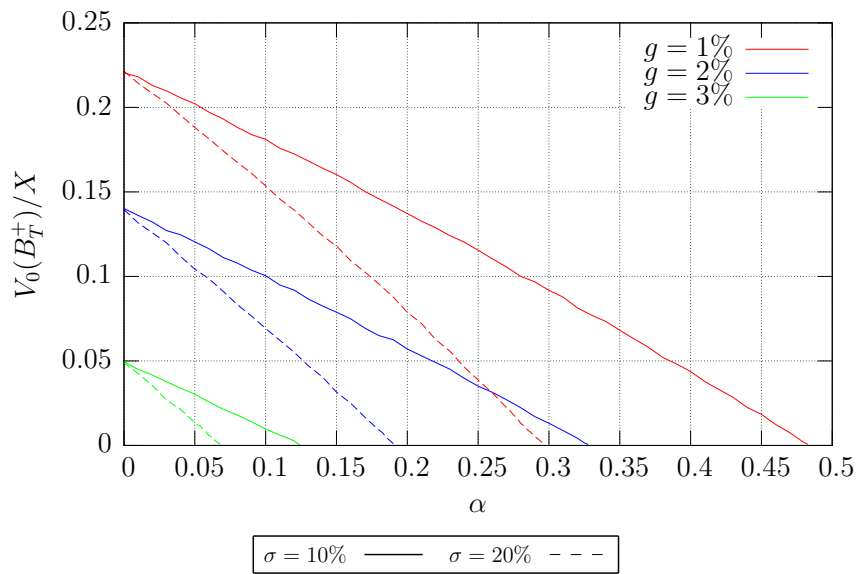


Abbildung 2.12: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 10$ fair ist.

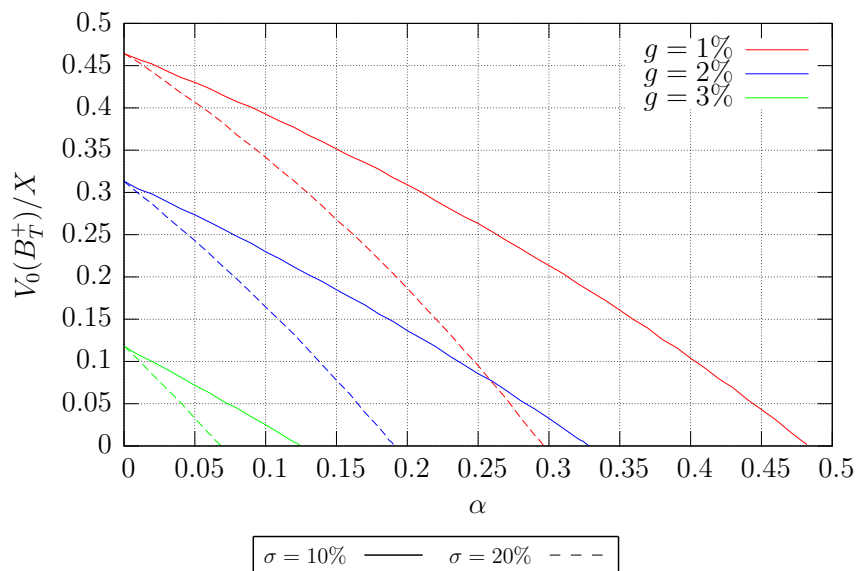


Abbildung 2.13: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Volatilitäten σ bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $T = 25$ fair ist.

Aus den Abb. 2.12 und 2.13 kann man erkennen, dass diese Prämie in g , α und σ sinkt. Das ist auch zu erwarten, da mit einem Anstieg dieser drei Parameter der Geldfluss auf das Zwischenkonto eingeschränkt wird, womit am Ende (falls überhaupt) weniger übrig bleiben wird, was auch die Prämie vermindert.

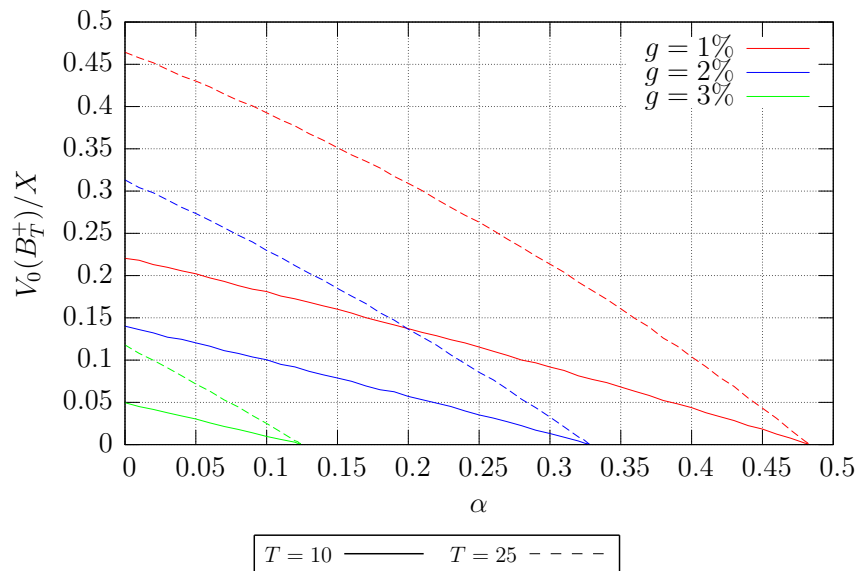


Abbildung 2.14: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist.

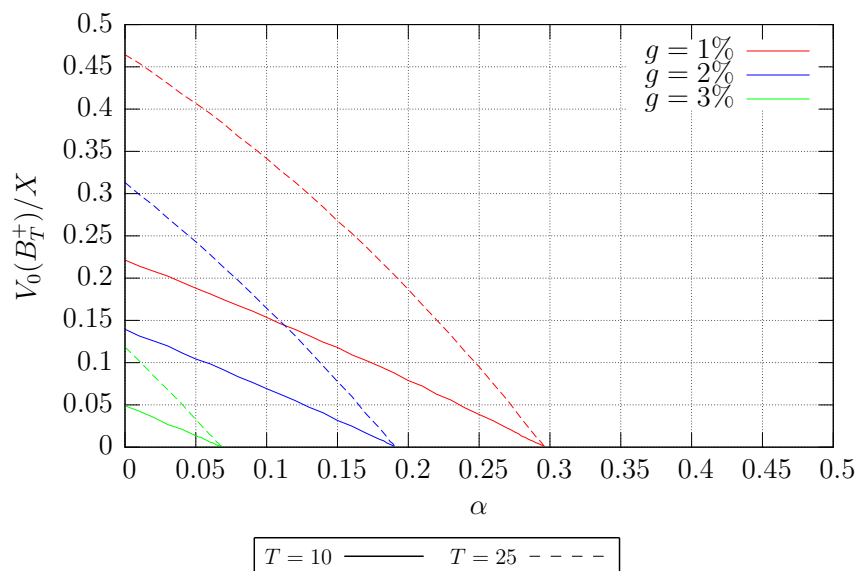


Abbildung 2.15: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene garantierte Zinsraten g und verschiedene Laufzeiten T bei denen der Vertrag bei $r = 3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist.

Aus den Abb. 2.14 und 2.15 ist zu erkennen, dass $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ auch mit einer längeren Laufzeit steigt. Das erscheint einleuchtend, da in diesem Fall mehr Einnahmen und daher auch mehr Guthaben auf dem Zwischenkonto zu erwarten sind.

Hier sieht man auch sehr schön, was auf Seite 38 schon erwähnt wurde: die Graphen stoppen bei den verschiedenen Laufzeiten im jeweils fast gleichen α . Die nachstehende Tabelle liefert einen Vergleich der Werte $\alpha_0(g)$, welche Gleichung (2.9) eindeutig lösen, und den Werten von α , bei denen die Simulation abgebrochen wurde.

	$\sigma = 10\%$			$\sigma = 20\%$		
	$\alpha_0(g)$	α	β	$\alpha_0(g)$	α	β
$g = 1\%$ $T = 10$	0.4833	0.4825	0.7694	0.2961	0.295	1.4291
$T = 25$		0.482	0.9179		0.296	3.1121
$g = 2\%$ $T = 10$	0.328	0.325	1.0104	0.1909	0.19	1.6574
$T = 25$		0.328	1.5605		0.19	3.0593
$g = 3\%$ $T = 10$	0.1247	0.124	1.3017	0.0685	0.068	1.9757
$T = 25$		0.124	1.7333		0.068	3.2891

2.3 Verträge mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto

Dieser Ansatz wurde von Hansen und Miltersen in [12] vorgestellt. Sie kombinieren dabei die Idee von Grosen und Jorgensen aus [11], Auszahlungen an den Kunden, die über die Garantie hinausgehen, vom jeweils aktuellen Guthaben am Zwischenkonto abhängig zu machen, mit dem Überschuss-Aufteilungsmechanismus von Miltersen und Persson, den wir in Kapitel 2.2.2 kennengelernt haben. Gleichzeitig bietet dieses Vertragsmodell für die Versicherung auch die Möglichkeit, Einnahmen durch eine fixe jährliche Abgabe des Kunden zu lukrieren, anstatt nur einen Anteil an einer die Garantie übersteigenden Auszahlung zu erhalten.

Auch hier gibt es wieder die drei Konten A , C und B wobei ersteres dem Kunden und zweiteres der Versicherung zugeordnet ist. B steht für das Zwischenkonto. Mit Y bezeichnen wir die Summe von A und C , d. h. Y_t gibt an, wieviel zum Zeitpunkt t in Summe an Kunde und Versicherung schon ausbezahlt worden ist.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ tätigt der Kunde eine Einzahlung X auf sein Konto. Die Versicherung investiert diese Summe während der Vertragslaufzeit, also für die Dauer von T Jahren, und garantiert ihm eine jährliche Verzinsung von g . Zur Bestimmung der jährlichen Rendite δ_i , $i = 1 \dots T$ des Investments, wird ein Referenz-Fond S herangezogen. Es wird nun davon ausgegangen, dass die Versicherung tatsächlich in diesen investiert. In jedem Jahr wird der Return des Benchmark-Fonds (ob positiv oder negativ) zunächst auf das Zwischenkonto B gegeben. Von hier aus wird zuerst eine Auszahlung an A und C gemeinsam, also eine Auszahlung an Y getätigt, wobei Y_{t-1} die Basis für die Verzinsung im Jahr t ist. Ob die Auszahlung mehr als eine Verzinsung mit der Garantie g beträgt, hängt vom Verhältnis $\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}}$ ab: Ist dieses größer einem vorgegeben Level γ ¹ wird ein Teil $\alpha + \beta \in [0, 1]$ von $B_{t-1} - \gamma Y_{t-1} > 0$ an Y ausbezahlt, falls dies mehr als eine Verzinsung mit g ausmacht.

Nachdem die Auszahlung an Y getätigt wurde, wird diese auf die Konten A und C aufgeteilt. Hierbei erhält der Kunde an jenem Teil, der über einer Verzinsung mit g liegt, den Anteil α und die Versicherung den Anteil β . Die Versicherung hat auch noch die Möglichkeit durch Einhebung einer fixen jährlichen Abgabe ξ zu Einnahmen zu kommen. Wir werden jedoch nur wie in [12] die Fälle $\xi = 0, \beta > 0$ (indirekte Methode) und $\beta = 0, \xi > 0$ (direkte Methode) behandeln.

Ist am Ende der Vertragslaufzeit noch Geld auf dem Zwischenkonto übrig, erhält es der Kunde. Ist kein Geld übrig, muss die Versicherung das Defizit abdecken.

Mit obigen Überlegungen kommen wir auf eine jährliche Verzinsung von Y_{t-1} von

$$\max \left\{ g, \ln \left(1 + (\alpha + \beta) \left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma \right) \right) \right\}.$$

¹ γ wird z. B. in Dänemark durch gesetzliche Vorschriften eingeschränkt und liegt dort bei ca. 10%

Zur Verdeutlichung: Ist $g < \ln\left(1 + (\alpha + \beta)\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} e^{\ln\left(1 + (\alpha + \beta)\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)} \\ &= Y_{t-1} + (\alpha + \beta)(B_{t-1} - \gamma Y_{t-1}). \end{aligned}$$

Das heißt, dass in diesem Fall tatsächlich ein Teil vom überschüssigem Guthaben ausbezahlt wird.

Das Konto A wächst nun jährlich mit

$$\max\left\{g, \ln\left(1 + \alpha\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)\right\} - \xi.$$

Die Differenz von Y_t und A_t ergibt C_t .

Zusammenfassend erhalten wir:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} e^{\max\left\{g, \ln\left(1 + (\alpha + \beta)\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)\right\}} & \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta \in [0, 1] \\ A_t &= A_{t-1} e^{\max\left\{g, \ln\left(1 + \alpha\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)\right\} - \xi} & \xi \in [0, 1] \\ C_t &= Y_t - A_t \\ B_t &= B_{t-1} + S_t - S_{t-1} - Y_t + Y_{t-1} & \text{mit } S_t = S_{t-1} e^{\delta_t}. \end{aligned}$$

Und mit den Anfangswerten $A_0 = X$, $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$

$$\begin{aligned} Y_t &= X e^{\sum_{i=1}^t \max\left\{g, \ln\left(1 + (\alpha + \beta)\left(\frac{B_{i-1}}{Y_{i-1}} - \gamma\right)\right)\right\}} & \text{und} \\ A_t &= X e^{\sum_{i=1}^t \max\left\{g, \ln\left(1 + \alpha\left(\frac{B_{i-1}}{Y_{i-1}} - \gamma\right)\right)\right\} - t\xi} & (2.17) \end{aligned}$$

mit $t \in \{1 \dots T\}$.

Für die Dynamik des Fonds gelten die selben Annahmen wie in Kapitel 2.2.1, d. h.

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

mit Volatilität σ und einer Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ bezüglich \mathbb{Q} . Hierfür ist

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

eine Lösung und damit ist die jährliche Rendite des Fonds

$$\delta_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(W_t - W_{t-1})$$

mit $(W_t - W_{t-1}) \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$.

Der Vertrag wird beschrieben durch die Forderung

$$A_T + B_T^+$$

des Kunden. Unter der Annahme einer konstanten risikolosen Zinsrate $r \geq 0$ und der Vollständigkeit des Marktmodells für den Benchmark-Fond, ist der Preis dieser Forderung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$V_0(A_T + B_T^+) = E_{\mathbb{Q}}[\tilde{A}_T] + E_{\mathbb{Q}}[\tilde{B}_T^+] = e^{-rT} (E_{\mathbb{Q}}[A_T] + E_{\mathbb{Q}}[B_T^+])$$

gegeben. Die Bedingung für einen fairen Vertrag ist

$$X = V_0(A_T + B_T^+) \iff 1 = V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) + V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right). \quad (2.18)$$

Äquivalent dazu ist wieder

$$V_0\left(\frac{C_T}{X}\right) - V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right) = 0 \iff V_0\left(\frac{C_T}{X}\right) = V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$$

Da man $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ nicht weiter vereinfachen kann, muss wieder auf eine numerische Simulation ausgewichen werden, die analog zu jener in Kapitel 2.2.2 durchgeführt wird. Für die konstante Zinsrate wird wieder $r = 3.5\%$ angenommen. Für γ wird wie in [12] $\gamma = 0.1$ gewählt.

2.3.1 Simulationsergebnisse für die indirekte Methode

Aus Abb. 2.16 sieht man, dass β einerseits steigt, wenn die Garantie steigt und andererseits fällt, wenn die Laufzeit steigt. Für eine Laufzeit von 10 Jahren und eine Garantie von 3% existieren keine fairen Verträge mit $\alpha + \beta \leq 1$.

Auffallend ist, dass alle Graphen zu Beginn mehr oder weniger deutlich nach unten gehen, bevor sie kontinuierlich zu steigen beginnen. Das kann dadurch erklärt werden, dass für kleine Werte von α die Wahrscheinlichkeit groß ist, dass der Kunde nur die Garantie g und damit die Versicherung einen größeren Teil der gemeinsamen Auszahlung erhält. Da der Vertrag fair sein muss und keine zusätzliche Zahlung an den Kunden stattfindet, muss $\alpha + \beta$ annähernd konstant bleiben, was für ein steigendes α ein fallendes β bedeutet.

Mit α nimmt die Wahrscheinlichkeit zu, dass der Kunde mehr als g erhält. Damit wird aber auch ein größerer Teil von überschüssigem Guthaben auf B ausbezahlt. Das wiederum erhöht die Wahrscheinlichkeit, am Ende am Zwischenkonto negativ zu sein, weshalb die Einnahmen der Versicherung steigen müssen, was ein höheres β bedeutet.

In Abbildung 2.17 betrachten wir $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$, was, wie vorhin schon erwähnt, als Prämie für die Gewährleistung der Garantie interpretiert werden kann.

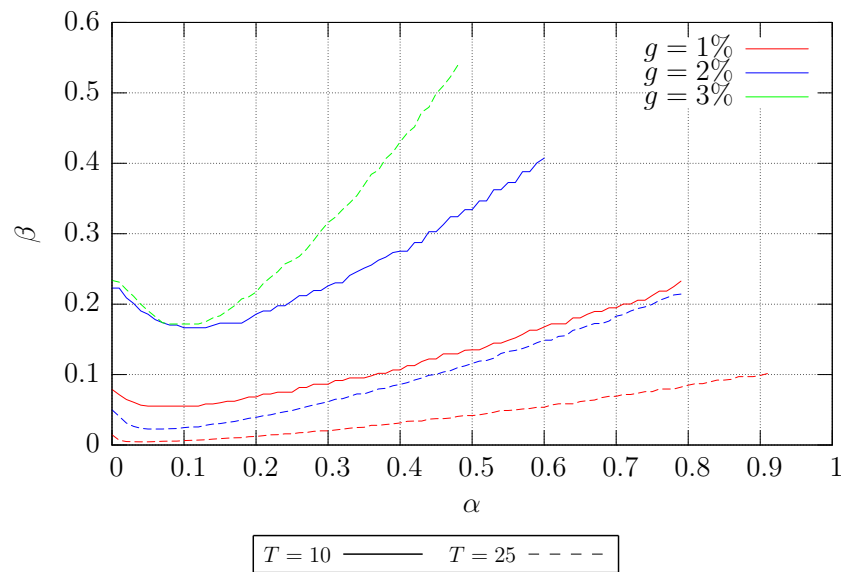


Abbildung 2.16: Kombinationen von α und β für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

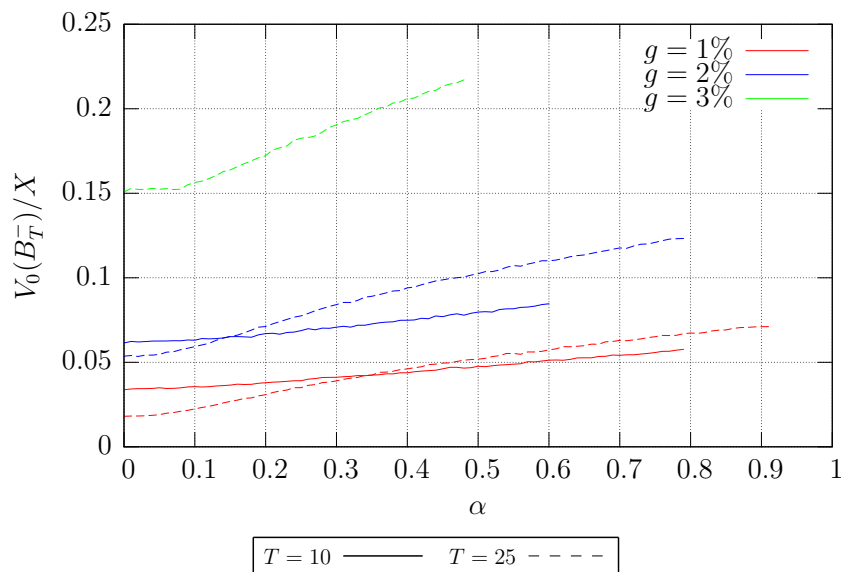


Abbildung 2.17: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

Wie zu erwarten, steigt $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ mit g und T . Wieder fällt auf, dass bis zu einem gewissen α die Kosten bei kürzerer Laufzeit höher sind. Der Unterschied, der zwar minimal ist und durch die Skalierung größer wirkt als er ist, kommt daher, dass bei $T = 25$ β und damit $\alpha + \beta$ größer ist als bei $T = 10$. Je kleiner aber $\alpha + \beta$ ist, desto eher wird die Verzinsung nur g betragen, womit auch die Versicherung weniger Einnahmen zu erwarten hat. Das bedeutet ein niedrigeres $\frac{V_0(C_T)}{X}$ und damit ein niedrigeres $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$. Erst mit steigendem α sind eine höhere Verzinsung als g und damit auch mehr Einnahmen für

die Versicherung zu erwarten. Das läßt $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ ansteigen. Da bei einer längeren Laufzeit Einnahmen öfter stattfinden, sind diese dann auch höher als bei kürzerer Laufzeit.

Umgekehrtes ist in Abb. 2.18 bei $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ zu beobachten: Da ein kleineres $\alpha + \beta$ bedeutet, dass eher nur mit g verzinst wird, ist zu erwarten, dass sich auf dem Zwischenkonto mehr Geld befindet. Das erhöht aber die Prämie dafür, diese höhere Summe am Ende zu bekommen. Und genau als solche Prämie kann ja $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ interpretiert werden.

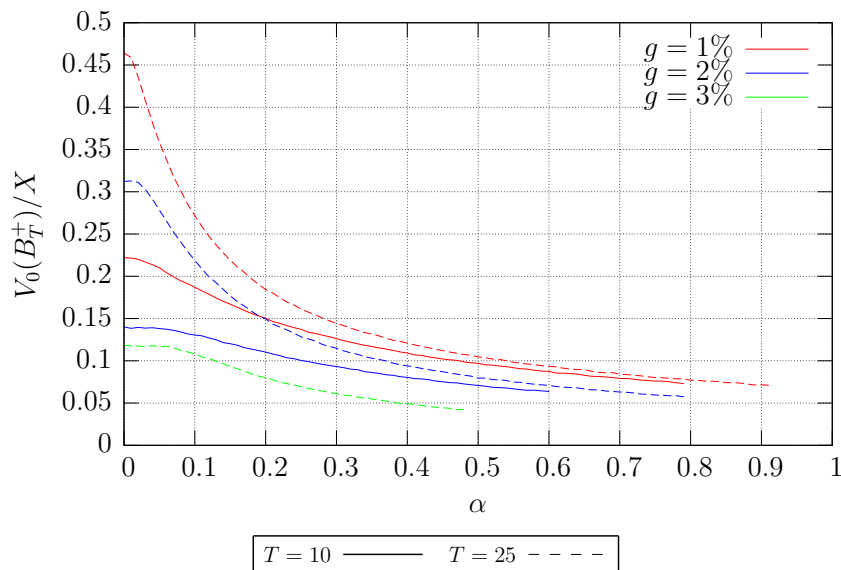


Abbildung 2.18: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

Abschließend werden in den Abb.2.19 bis 2.21 die vorangegangenen Abbildungen noch mit einer Volatilität von $\sigma = 20\%$ gezeigt:

Wie nicht anders zu erwarten steigen β und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$, da mit höherer Volatilität für die Versicherung alles riskanter wird und sie daher zu mehr Einnahmen kommen muss. $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ ändert sich hingegen nur geringfügig (Abb. 2.19).

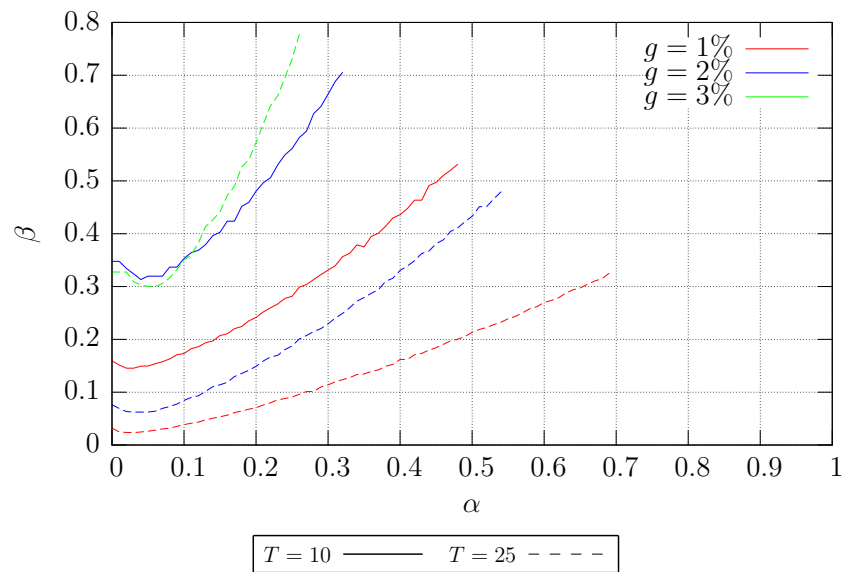


Abbildung 2.19: Kombinationen von α und β für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

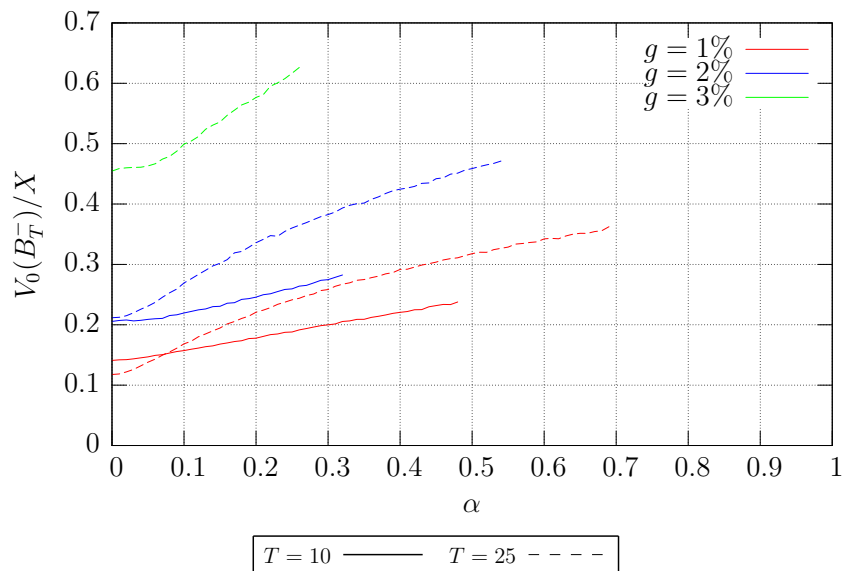


Abbildung 2.20: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

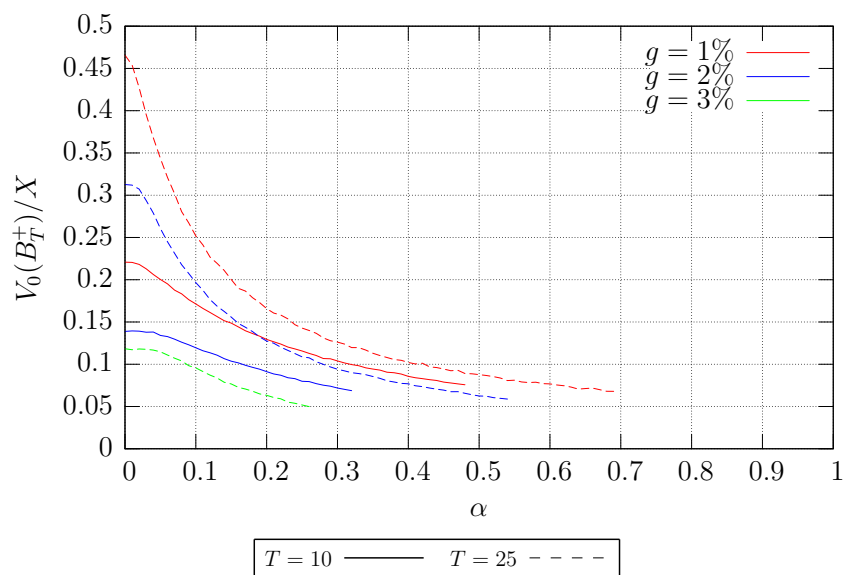


Abbildung 2.21: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

2.3.2 Simulationsergebnisse für die direkte Methode

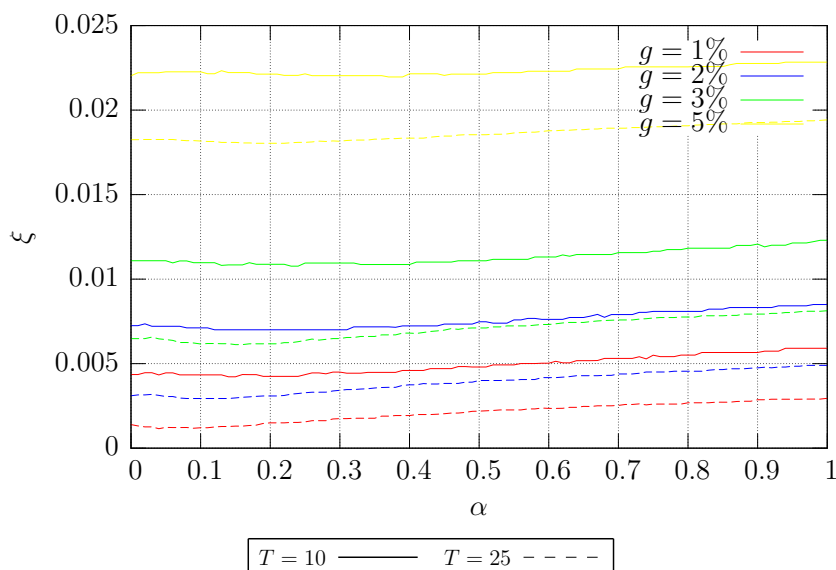


Abbildung 2.22: Kombinationen von α und ξ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

Aus Abb. 2.22 sieht man, dass die jährliche Abgabe ξ nur schwach von α abhängt, was für die Versicherung natürlich sehr angenehm ist. Dies kommt daher, dass der Kunde jedes Jahr einen bestimmten Teil seines Guthabens an die Versicherung abführen muss. Da dieses mit höherem α höher wird, wird aber dieser Abschlag ebenfalls höher und ξ ändert sich nur unwesentlich. Damit erklärt sich auch, dass ξ bei längerer Laufzeit niedriger ist: Da das Guthaben des Kunden bei längerer Laufzeit insgesamt mehr wird, werden auch die Zahlungen an die Versicherung höher. Ausserdem finden Einnahmen öfter statt. Insgesamt sinkt daher ξ , wenn die Laufzeit steigt.

Weiters fällt auf, dass auch Garantien $g > r$ gegeben werden können, wohingegen bei den anderen Vertragsmodellen r eine Obergrenze für g darstellte.

Mit steigender Volatilität wird ξ generell höher (Abb. 2.23), da die Versicherung ein höheres Risiko hat. Ausserdem ist es etwas stärker von α abhängig. Auch ist zu beobachten, dass ξ zunächst leicht fällt, bevor ein kontinuierlicher Anstieg beginnt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich bei höherer Volatilität Gewinne und Verluste von der Höhe her stärker unterscheiden. Ist α niedriger wird generell weniger ausbezahlt und es bleibt mehr Geld am Zwischenkonto. Ist α höher, wird, wenn überschüssiges Guthaben vorhanden ist, mehr davon ausbezahlt, was das Risiko erhöht, dort ins Minus zu kommen. Daher muss die Versicherung zu mehr Einnahmen kommen, was ξ stärker steigen lässt.

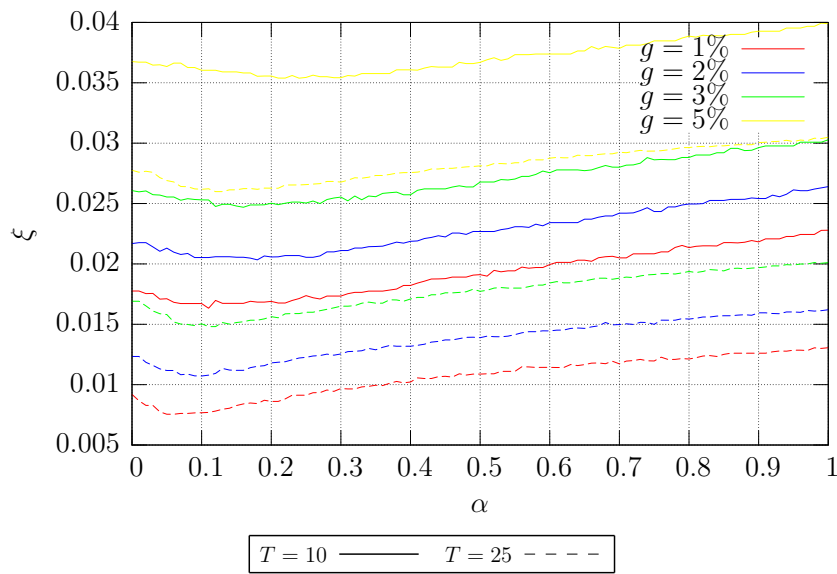


Abbildung 2.23: Kombinationen von α und ξ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

Die gleichen Überlegungen gelten für $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$, da dies in direktem Zusammenhang mit ξ steht (siehe Abb. 2.24 und 2.25).

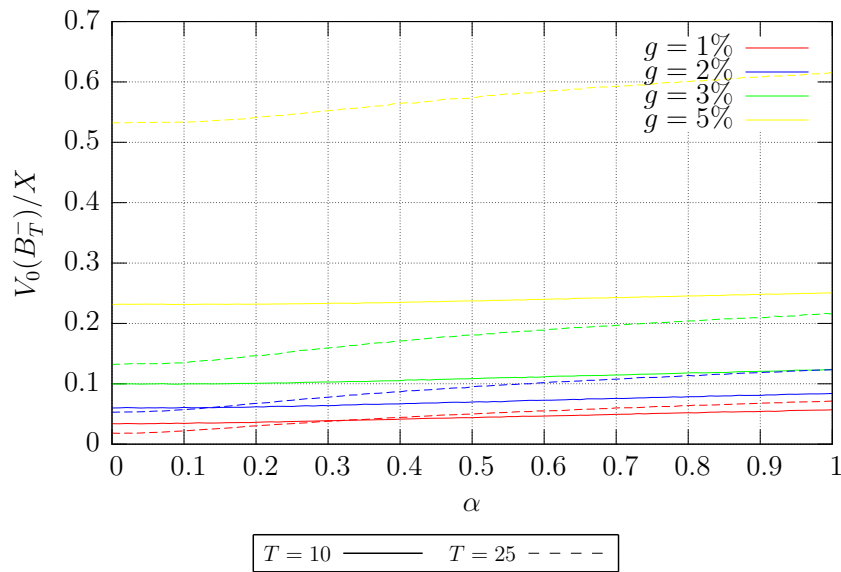


Abbildung 2.24: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

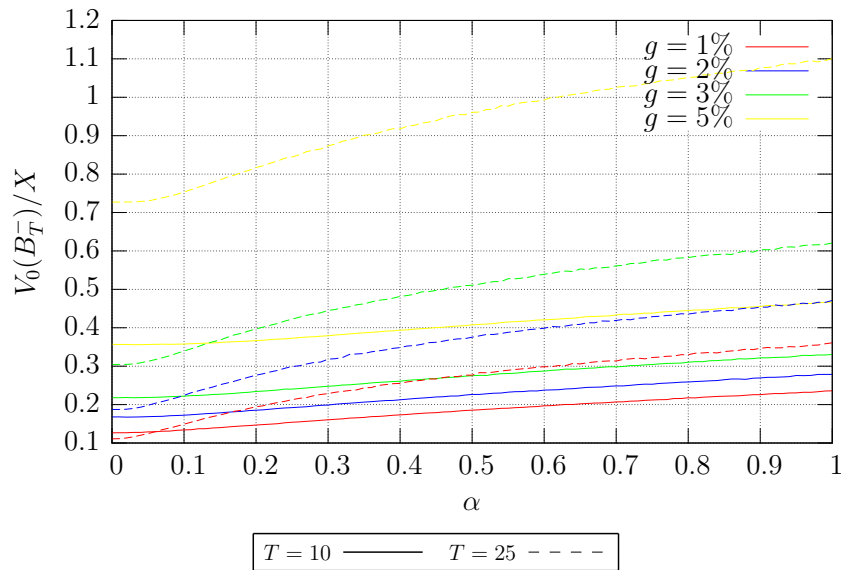


Abbildung 2.25: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^-)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

Die Verläufe von $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ unterscheiden sich nur für kleine Werte von α deutlich. Hier wirkt sich wieder aus, dass für kleine α die Zahlungen nicht so hoch sein werden und mehr übrig bleibt. Mit steigendem α werden die Zahlungen höher und es wird weniger Guthaben am Ende zu erwarten sein. Die Graphen nähern sich stark an und unterscheiden sich dann auch in der Volatilität kaum.

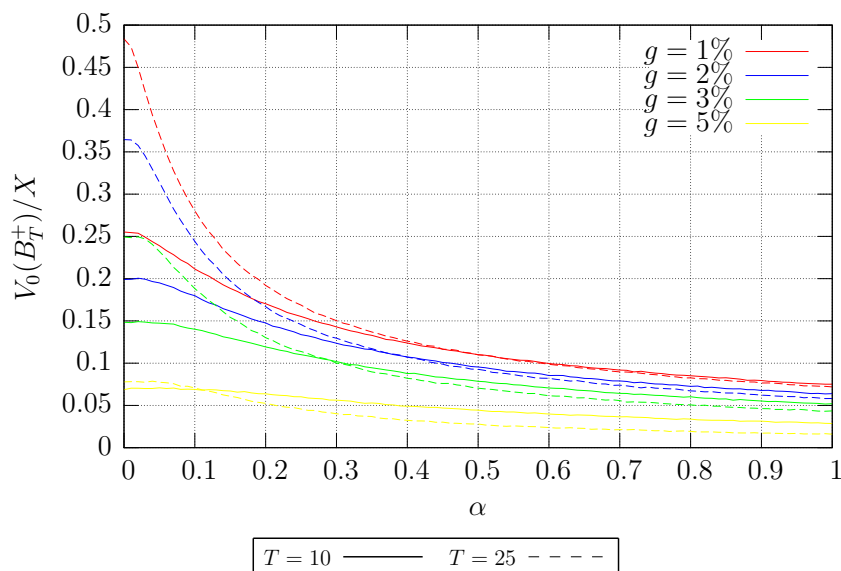


Abbildung 2.26: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 10\%$ fair ist

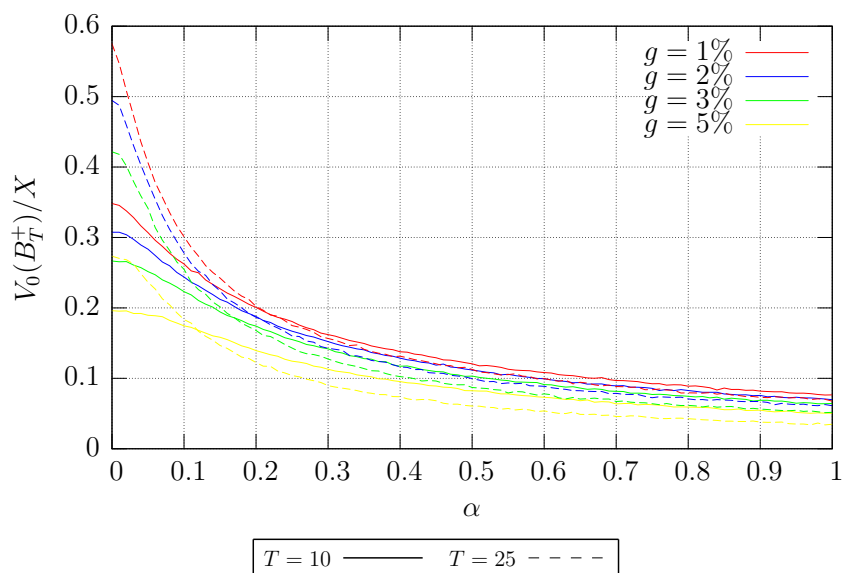


Abbildung 2.27: Kombinationen von α und $\frac{V_0(B_T^+)}{X}$ für verschiedene Laufzeiten bei denen der Vertrag bei $r=3.5\%$ und $\sigma = 20\%$ fair ist

Kapitel 3

Stochastische Zinsraten

Bisher gingen wir von einer konstanten, risikolosen Zinsrate r aus, zu der jederzeit Geld angelegt werden kann. In der Realität sind Zinsraten aber Schwankungen ausgesetzt. Vor allem seit Anfang der 1990er sind diese kontinuierlich gefallen und haben sich nun auf einem sehr niedrigen Niveau eingependelt.

Um diese Schwankungen zu berücksichtigen, versucht man Zinsraten stochastisch zu modellieren. Das erste diesbezügliche Modell stammt aus dem Jahr 1977 von Oldrich Vasicek [26].

In diesem Kapitel wird zuerst eine kurze Einführung in den Zinsmarkt gegeben bevor für das Modell von Vasicek explizite Lösungen hergeleitet werden. Abschließend widmen wir uns noch dem Heath-Jarrow-Morton Modell [13].

3.1 Allgemeines

Möchte man sein Geld bei einer Bank anlegen, so ist die Laufzeit wesentlich. Für jede Laufzeit gibt es einen anderen Zinssatz.

Als Teilnehmer am Zinsmarkt kauft man einen *Bond*. Dieser wird im Verlauf der Zeit seinen Wert ändern, je nachdem, ob die Zinsen steigen oder fallen.

Zinszahlungen treten bei einem Bond als Kupon auf. Typischerweise wird der Wert eines Bonds auch an Zeitpunkten, an welchen ein Kupon ausbezahlt wird, springen.

Um die Systematik zu erleichtern, betrachten wir einen Bond, der keine Kuponzahlungen verspricht. Weiters sei sein Wert auf 1 normiert. Dies führt uns zur folgenden

Definition 3.1. Ein *zero-coupon Bond* ist ein Finanzgut, welches dem Inhaber zu einem vereinbarten Zeitpunkt T (Fälligkeits-Zeitpunkt) die Auszahlung einer Geldeinheit garantiert. Der Preis eines solchen Bonds zum Zeitpunkt $t \leq T$ wird mit $P(t, T)$ bezeichnet. Es gilt $0 < P(t, T) < P(T, T) = 1$.

Da wir nur zero-coupon Bonds betrachten werden, werden wir im weiteren Verlauf von einem zero-coupon Bond einfach als Bond sprechen. Einen Bond mit Fälligkeit T werden wir auch als T-Bond bezeichnen.

Die Rendite, die man durch Kauf eines Bonds zum Zeitpunkt t und Verkauf zum Zeitpunkt T erhält, ist

$$\frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)} = \frac{1}{P(t, T)} - 1.$$

Sei $R(t, T)$ eine stetige Verzinsung für den Zeitraum $[t, T]$, dann ist die mit einer Einlage von 1 erlangte Rendite im Zeitraum $[t, T]$ gleich

$$e^{(T-t)R(t, T)} - 1.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke können wir den Bondpreis durch $R(t, T)$ ausdrücken. Wir erhalten

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

$R(t, T)$ wird als *yield* oder *yield-to-maturity* eines T-Bonds bezeichnet. $R(t, T)$ gibt die Verzinsung an, die man im Zeitraum $[t, T]$ durch Halten des T-Bonds erhält. Durch Umformen erhalten wir

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}. \quad (3.1)$$

Wir stellen uns nun die Frage, welche Verzinsung wir bekommen würden, wenn wir Geld kurzfristig anlegen, es quasi sofort wieder zurückbekommen würden. Hierzu betrachten wir das Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$. Dann ist

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{\log P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Lassen wir Δt gegen null gehen, erhalten wir die sogenannte *short rate* (*kurzfristige Zinsrate*), welche definiert ist als

$$r_t := R(t, t).$$

Wenn wir in (3.1) T gegen t streben lassen, erhalten wir eine zweite Definition von r_t , nämlich

$$r_t := -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, t).$$

Im Gegensatz zum *yield* hängt die *short rate* nur mehr von einem Parameter, von der momentanen Zeit t , ab. Die Wertänderung einer kurzfristigen Anleihe, die mit der *short rate* verzinst wird, beträgt

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt.$$

Wurde zum Zeitpunkt $t = 0$ $S_0^0 = 1$ angelegt, dann ist der Wert zum Zeitpunkt t gleich

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_u du\right).$$

Unser Ziel ist es, einen Ausdruck für den Bondpreis $P(t, T)$ zu finden. Hat man nur r_t gegeben, ist dies aber ohne zusätzliche Informationen nicht möglich. Wir suchen daher nach einer Erweiterung von r_t , mit der wir auf $P(t, T)$ und auch auf $R(t, T)$ schließen können.

Dazu betrachten wir sogenannte forward contracts. Das sind Verträge, die zum Zeitpunkt t abgeschlossen werden und für eine Einzahlung zum Zeitpunkt T_1 eine Auszahlung zu einem späteren Zeitpunkt T_2 garantieren ($t < T_1 < T_2$). Der für dieses Geschäft benötigte Zins läßt sich wie folgt bestimmen: Zum Zeitpunkt t kauft man einen T_2 -Bond und verkauft k Einheiten eines T_1 -Bonds. Man ist damit verpflichtet zu T_1 k Einheiten zu bezahlen und erhält dafür zu T_2 eine Einheit. Die Kosten des Vertrages betragen somit

$$P(t, T_2) - kP(t, T_1).$$

Damit der erwartete Gewinn bzw. Verlust zum Zeitpunkt t gleich null ist, muss

$$k = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

gelten. Man muss also im Zeitraum $[T_1, T_2]$ k Einheiten erwirtschaften. Damit ergibt sich die benötigte Verzinsung $f(t, T_1, T_2)$ mit

$$k = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$$

als

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Wenn wir $T_1 = T$ und $T_2 = T + \Delta t$ setzen und Δt gegen null streben lassen erhalten wir die sogenannte *forward rate* $f(t, T)$:

$$f(t, T) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T).$$

Sie gibt den zum Zeitpunkt t vereinbarten Zins für den Zeitpunkt T an. Im Fall $T = t$ erhalten wir wieder die short rate:

$$r_t = f(t, t). \tag{3.2}$$

Nun können wir auch den Preis $P(t, T)$ eines T -Bonds durch $f(t, T)$ ausdrücken. Es gilt

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right). \tag{3.3}$$

3.2 Diffusionsmodelle für die short rate

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. \mathbb{P} ist das reale Maß. Weiters treffen wir folgende Annahmen:

(A.1) Der Markt ist arbitragefrei und es werden Bonds jeder Laufzeit gehandelt.

(A.2) Die short rate ist ein Diffusionsprozess, d.h. sie erfüllt eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dr_t = a_t dt + b_t d\widetilde{W}_t. \quad (3.4)$$

Hierbei ist a_t die Drift und b_t die Volatilität von r_t . $(\widetilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{P} .

(A.3) Der Preis eines Bonds hänge stetig von t, T und r_t ab. Wir schreiben $P(t, T)$ als

$$P(t, T) = G(t, T, r_t) \quad (3.5)$$

und setzen voraus, dass G zweimal stetig differenzierbar und positiv ist.

Aus (3.5) und (3.4) folgt mit der Formel von Itô

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[\alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) d\widetilde{W}_t \right]. \quad (3.6)$$

wobei

$$\alpha(t, T) = \frac{1}{G(t, T, r_t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, T, r_t) + a_t \frac{\partial}{\partial r_t} G(t, T, r_t) + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2}{\partial r_t^2} G(t, T, r_t) \right] \quad (3.7)$$

und

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{G(t, T, r_t)} b_t \frac{\partial}{\partial r_t} G(t, T, r_t). \quad (3.8)$$

Als nächstes wollen wir den Wechsel zum äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} , dem risikoneutralen Maß, durchführen. Dazu betrachten wir das Portfolio eines Investors, der von einer Einheit den Anteil u_1 in einen T_1 -Bond und den Anteil u_2 in einen T_2 -Bond investiert. Sei der Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt t gleich U_t , dann beträgt die Wertänderung

$$dU_t = U_t \left(\frac{u_1}{P(t, T_1)} dP(t, T_1) + \frac{u_2}{P(t, T_2)} dP(t, T_2) \right)$$

mit

$$u_1 + u_2 = 1. \quad (3.9)$$

Setzen wir (3.6) ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} dU_t &= U_t \left(\frac{u_1}{P(t, T_1)} P(t, T_1) \left(\alpha(t, T_1) dt + \sigma(t, T_1) d\widetilde{W}_t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_2}{P(t, T_2)} P(t, T_2) \left(\alpha(t, T_2) dt + \sigma(t, T_2) d\widetilde{W}_t \right) \right) \\ &= U_t \left((u_1 \alpha(t, T_1) + u_2 \alpha(t, T_2)) dt + (u_1 \sigma(t, T_1) + u_2 \sigma(t, T_2)) d\widetilde{W}_t \right). \end{aligned}$$

Wir möchten, dass das Portfolio risikolos wird. Das ist der Fall, wenn der stochastische Anteil verschwindet und zur Bedingung

$$u_1 \sigma(t, T_1) + u_2 \sigma(t, T_2) = 0 \quad (3.10)$$

führt. Weiters fordern wir, dass sich der Wert der Portfolios nur um die short rate ändere, d. h. $dU_t = U_t r_t dt$ gelte. Das führt zur Bedingung

$$r_t = u_1 \alpha(t, T_1) + u_2 \alpha(t, T_2). \quad (3.11)$$

Aus (3.9) und (3.10) folgt

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \quad \text{und} \\ u_2 &= \frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)}. \end{aligned}$$

Das eingesetzt in (3.11) und umgeformt führt zu folgender Bedingung für ein risikoloses Portfolio:

$$\frac{\alpha(t, T_1) - r_t}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\alpha(t, T_2) - r_t}{\sigma(t, T_2)}.$$

Obiger Ausdruck muss also für alle Bonds unabhängig von der Fälligkeit gleich sein. Wir können daher

$$\lambda_t := \frac{\alpha(t, T) - r_t}{\sigma(t, T)}. \quad (3.12)$$

setzen. λ_t wird als *market price of risk* bezeichnet. Da die Bondpreise von der short rate abhängen und Zinsraten aber keine handelbaren Finanzgüter sind, sind wir nicht in der Lage das Risiko vollständig zu eliminieren. Den market price of risk kann man als Bonus an Wertsteigerung interpretieren, den man für die Inkaufnahme des Risikos erhält.

Formen wir (3.12) zu

$$\alpha(t, T) - r_t = \lambda_t \sigma(t, T)$$

um und setzen für α und σ (3.7) und (3.8) ein, dann erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r_t} (a_t - \lambda_t b_t) + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r_t^2} = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass λ die Novikov-Bedingung

$$E_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] < \infty$$

erfüllt, können wir mit der Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := \exp \left(- \int_0^T \lambda_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du \right)$$

und dem Satz von Girsanov (Satz 1.20) den Maßwechsel zum risikolosen Maß durchführen. Unter diesem Maß ist

$$W_t := \widetilde{W}_t + \int_0^t \lambda_u du$$

eine Brown'sche Bewegung und eingesetzt in (3.6) erhalten wir wirklich den Driftterm r_t , denn

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P(t, T) \left(\alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)d\widetilde{W}_t \right) \\ &= P(t, T) (\alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)(dW_t - \lambda_t dt)) \\ &= P(t, T) \left(\alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t - \sigma(t, T) \frac{\alpha(t, T) - r_t}{\sigma(t, T)} dt \right) \\ &= P(t, T) (r_t dt + \sigma(t, T)dW_t). \end{aligned}$$

Wir haben nun ein Resultat, das jenem ähnlich ist, das wir im Black-Scholes Modell erhalten haben: Das Verhalten des Bondpreises unter \mathbb{Q} hängt nicht mehr von α ab, so wie im Black-Scholes Modell der Preis der Aktie unter \mathbb{Q} nicht mehr von μ abhängt.

Für die Dynamik der short rate unter \mathbb{Q} erhalten wir

$$\begin{aligned} dr_t &= a_t dt + b_t d\widetilde{W}_t = a_t dt + b_t (dW_t - \lambda_t dt) \\ &= (a_t - b_t \lambda_t) dt + b_t dW_t. \end{aligned}$$

Bezüglich \mathbb{Q} (und \mathcal{F}) sind die diskontierten Bondpreise $\tilde{P}(t, T) = (S_t^0)^{-1} P(t, T)$ Martingale. Wegen $P(T, T) = 1$ ist

$$\tilde{P}(T, T) = (S_T^0)^{-1} = \exp \left(- \int_0^T r_u du \right).$$

Aus der Martingaleigenschaft folgt

$$\tilde{P}(t, T) = E_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{P}(T, T) \mid \mathcal{F}_t \right] = E_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T r_u du \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Damit sind die Bondpreise unter \mathbb{Q} bestimmt durch

$$P(t, T) = E_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.13)$$

Wir können also aus der Dynamik von r unter \mathbb{P} die Dynamik von r unter \mathbb{Q} ableiten. Es stellt sich die Frage, wofür die Dynamik unter \mathbb{P} noch benötigt wird. Möchte man die Parameter statistisch schätzen, sind Aussagen über die Güte der Schätzer ohne Spezifikation von \mathbb{P} nicht möglich.

Bei Zinsmodellierungen wählt man aber einen anderen Weg: Man spezifiziert das Modell direkt unter \mathbb{Q} und kann damit leicht Derivate bewerten. Um die Modellparameter zu bekommen, kalibriert man das Modell, d. h. man passt die Modellparameter so an, dass beobachtbare Preise möglichst gut wiedergegeben werden.

Damit wird die \mathbb{P} -Dynamik für pricing und hedging nicht mehr nötig.

Es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Modellen für die short rate. Zum Beispiel:

1. Vasicek (1977) [26]:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

2. Cox-Ingersoll-Ross (CIR, 1985) [7]:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

3. Dothan (1978) [8]:

$$dr_t = r_t(\theta dt + \sigma dW_t)$$

4. Hull-White (extended Vasicek, 1990) [14]:

$$dr_t = (a_t - b_t r_t)dt + \sigma_t dW_t$$

5. Hull-White (extended CIR, 1990) [14]:

$$dr_t = (a_t - b_t r_t)dt + \sigma_t \sqrt{r_t} dW_t$$

Affine Modelle

Es wäre natürlich wünschenswert, den Bondpreis in expliziter Form darstellen zu können. Eine Problemklasse, in der das per Definition möglich ist, sind die affinen Modelle.

Definition 3.2. Ein Zinsmodell ist ein affines Modell, wenn sich der Bondpreis in der Form

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r_t) = \exp(-A(\tau) - B(\tau)r_t)$$

mit $\tau = T - t$ darstellen läßt.

Die Bondpreise ergeben sich dann als Lösung einer Riccati-Differentialgleichung.

Ein wichtiger Untertyp der affinen Modelle sind die Gaußschen affinen Modelle. Bei diesen wird die Volatilität als konstant angenommen. Sie sind leicht zu handhaben und falls es keine explizite Lösung gibt stehen gute numerische Verfahren zur Verfügung. Sie haben allerdings den Nachteil, dass negative Zinsraten mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommen können.

Das erste Zinsstrukturmodell, das Vasicek Modell, zählt zu dieser Gruppe. Wir werden nun näher auf dieses eingehen.

3.3 Das Vasicek Modell

Drei Finanzgüter werden im Zeitraum $[0, T]$ modelliert:

- eine kurzfristige Anleihe am spot-Markt,
- ein zero-coupon Bond mit Fälligkeitsdatum T und
- eine Aktie.

Modellannahmen

- Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} , sodass $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ eine standard Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{Q} ist. Die Filtration sei $\mathcal{F}_t := \sigma(\{W_s \mid s \leq t\} \cup \mathcal{N})$
- Die kurzfristige Zinsrate $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei an \mathcal{F}_t adaptiert und erfülle

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^1, \quad r_0 = x > 0 \quad (3.14)$$

mit $\kappa > 0, \theta > 0, \sigma_r > 0$.

Der Preis einer Einheit des Finanzgutes 0 (kurzfristige Anleihe) erfülle

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt \quad \text{mit} \quad S_0^0 = 1,$$

d. h. $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_u du)$.

- Der diskontierte Preis des Bonds zum Zeitpunkt t sei ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} (und \mathcal{F}). Damit ist der Bondpreis wie in (3.13) gegeben durch

$$P(t, T) = E_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

- Der Aktienpreis $(S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ sei an \mathcal{F}_t adaptiert und erfülle

$$d\tilde{S}_t^1 = \sigma_\delta \tilde{S}_t^1 \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2 \right)$$

mit Volatilität $\sigma_\delta > 0$ und Korrelation ρ zwischen W^1 und W^2 mit $-1 \leq \rho \leq 1$. Man kann leicht nachprüfen, dass $B_t := \rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$ eine Brown'sche Bewegung ist, weshalb

$$\tilde{S}_t^1 = S_0^1 \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_\delta^2 t + \sigma_\delta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2 \right) \right)$$

gilt.

3.3.1 Explizite Darstellung der Preise

Um obige Preise in expliziter Form darstellen zu können, benötigen wir eine explizite Darstellung von r_t . Diese erhalten wir als Lösung eines *Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses*.

Definition 3.3. Ein *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* wird über die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \quad (3.15)$$

definiert.

Wir sehen nun, dass (3.14) ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist.

(3.15) kann man explizit lösen. Das geschieht durch zwei Transformationen. Zunächst wird der Prozess um θ nach unten verschoben, indem wir $Y_t = X_t - \theta$ setzen. Dann gilt

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = x - \theta.$$

Als zweite Transformation setzen wir $Z_t = \exp(\kappa t)Y_t$ und erhalten

$$dZ_t = \kappa e^{\kappa t} Y_t dt - e^{\kappa t} \kappa Y_t dt + e^{\kappa t} \sigma dB_t = e^{\kappa t} \sigma dB_t, \quad Z_0 = x - \theta. \quad (3.16)$$

Die Lösung von (3.16) ist

$$Z_t = x - \theta + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dB_s$$

und damit ist

$$X_t = \theta + e^{-\kappa t}(x - \theta) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dB_s.$$

Somit erhalten wir als Lösung von (3.14) unmittelbar

$$r_t = \theta + e^{-\kappa t}(r_0 - \theta) + \sigma_r e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa u} dW_u^1. \quad (3.17)$$

Der Preis der kurzfristigen Anleihe

Mit (3.17) können wir $\beta_t = \int_0^t r_u du$ ausdrücken als

$$\begin{aligned} \beta_t &= \theta t + (r_0 - \theta) \int_0^t e^{-\kappa u} du + \sigma_r \int_0^t e^{-\kappa u} \left(\int_0^u e^{\kappa v} dW_v^1 \right) du \\ &= \theta t + (r_0 - \theta) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r \int_0^t e^{-\kappa u} \left(\int_0^u e^{\kappa v} dW_v^1 \right) du. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der Preis der Aktie

Da $\tilde{S}_t^1 = e^{-\int_0^t r_u du} S_t^1 = e^{-\beta_t} S_t^1$ ist, ist $S_t^1 = e^{\beta_t} \tilde{S}_t^1$:

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left(\beta_t - \frac{1}{2} \sigma_\delta^2 t + \sigma_\delta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2 \right) \right).$$

Die Rendite in der Zeit $[0, t]$, δ_t , erhalten wir als

$$\delta_t = \log \frac{S_t^1}{S_0^1} = \beta_t - \frac{1}{2} \sigma_\delta^2 t + \sigma_\delta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2 \right).$$

Der Preis des zero-coupon Bonds

Aus (3.13) folgt

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= E_{\mathbb{Q}}[\exp(-(\beta(T) - \beta_t)) \mid \mathcal{F}_t] \\
 &= E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\theta(T-t) - (r_0 - \theta)\frac{1}{\kappa}(e^{-\kappa t} - e^{-\kappa T})\right.\right. \\
 &\quad \left.\left. - \sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_0^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du\right) \mid \mathcal{F}_t\right]. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Weiters ist:

$$\begin{aligned}
 &\sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_0^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du \\
 &= \sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_0^t e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du + \sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_t^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du \\
 &= \sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} du \int_0^t e^{-\kappa v} dW_v^1 + \sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_t^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du \\
 &= \frac{\sigma_r}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-\kappa T}) \int_0^t e^{-\kappa v} dW_v^1 + \underbrace{\sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_t^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du}_{\text{unabh. von } \mathcal{F}_t}. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Aus der Darstellung von r_t (3.17) kommt man durch Umformen auf

$$\int_0^t e^{-\kappa v} dW_v^1 = \frac{1}{\sigma_r} (e^{\kappa t} r_t - e^{\kappa t} \theta - (r_0 - \theta)).$$

Damit ist der erste Term von (3.20)

$$\frac{\sigma_r}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-\kappa T}) \int_0^t e^{-\kappa v} dW_v^1 = \frac{1}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-\kappa T}) \underbrace{(e^{\kappa t} r_t - e^{\kappa t} \theta - (r_0 - \theta))}_{\mathcal{F}_t\text{-mb.}}.$$

Daraus folgt für (3.19)

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \exp\left(-\theta(T-t) - \frac{1}{\kappa}(e^{-\kappa t} - e^{-\kappa T})(-r_0 + \theta - e^{\kappa t} r_t e^{\kappa t} \theta + r_0 - \theta)\right) \\
 &\quad \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_t^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du\right)\right] \\
 &= \exp\left(-\theta(T-t) - \frac{1}{\kappa}(r_t - \theta)(1 - e^{-\kappa(T-t)})\right) \\
 &\quad \cdot E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\underbrace{\sigma_r \int_t^T e^{-\kappa u} \left(\int_t^u e^{-\kappa v} dW_v^1\right) du}_Z\right)\right]. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Z ist von der Form

$$Z = \int_t^T X_u du \quad \text{wobei} \quad X_u = \sigma_r e^{-\kappa u} \int_t^u e^{\kappa v} dW_v^1.$$

X ist ein Gaußscher Prozess mit stetigen Pfaden und damit ist Z (als Grenzwert von Riemann-Summen) eine normalverteilte Zufallsvariable.

Wegen $E_{\mathbb{Q}}[X_u] = 0$ ist auch $E_{\mathbb{Q}}[Z] = 0$.

Für die Varianz gilt dann

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}[Z] = E_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T X_u du \int_t^T X_v dv \right] = \int_t^T \int_t^T E_{\mathbb{Q}}[X_u X_v] dudv.$$

Mit

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[X_u X_v] &= \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+v)} E_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^u e^{\kappa \xi} dW_{\xi}^1 \int_t^v e^{\kappa \xi} dW_{\xi}^1 \right] \\ &= \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+v)} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_t^{u \wedge v} e^{\kappa \xi} dW_{\xi}^1 \right)^2 \right] \\ &= \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+v)} E_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{u \wedge v} e^{2\kappa \xi} d\xi \right] \\ &= \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+v)} \frac{1}{2\kappa} (e^{2\kappa(u \wedge v)} - e^{2\kappa t}) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}}[Z] &= \int_t^T \int_t^T \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+v)} \frac{1}{2\kappa} (e^{2\kappa(u \wedge v)} - e^{2\kappa t}) dudv \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} (e^{2\kappa(u \wedge v) - \kappa u - \kappa v} - e^{-\kappa(u+v)}) dudv \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} \left(\int_0^{T-t} e^{-\kappa u} \underbrace{\left(\int_0^u e^{\kappa v} dv \right)}_{\frac{1}{\kappa}(e^{\kappa u} - 1)} du + \int_0^{T-t} e^{\kappa u} \underbrace{\left(\int_u^{T-t} e^{-\kappa v} dv \right)}_{\frac{1}{\kappa}(e^{-\kappa u} - e^{-\kappa(T-t)})} du \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_0^{T-t} e^{-\kappa u} du \int_0^{T-t} e^{-\kappa v} dv}_{\left(\int_0^{T-t} e^{-\kappa x} dx \right)^2} \right) \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \underbrace{\int_0^{T-t} (1 - e^{-\kappa u}) du}_{(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})} + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \underbrace{\int_0^{T-t} (1 - e^{-\kappa(T-t)e^{\kappa u}}) du}_{(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})} - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \\ &= \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} (T-t) - \frac{\sigma_r^2}{\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit $E[e^Z] = e^{\frac{1}{2}\text{Var}[Z]}$ erhalten wir für (3.21)

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \exp\left(-\theta(T-t) - \frac{1}{\kappa}(r_t - \theta)(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{1}{2}\text{Var}_{\mathbb{Q}}[Z]\right) \\
 &= \exp\left(-\theta(T-t) - \frac{1}{\kappa}(r_t - \theta)(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}(T-t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2\right) \\
 &= \exp\left(\left(\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} - \theta\right)(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})\left(r_t - \theta + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2\right). \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Das kann man noch weiter umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \exp\left(\left(\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} - \theta\right)(T-t) + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})r_t - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2\right) \\
 &= \exp\left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right)\left(-T + t + \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})\right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa}\left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})r_t\right).
 \end{aligned}$$

Damit können wir den Preis des zero-coupon Bonds in einer in der Literatur häufig verwendeten Form angeben:

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
 A(t, T) &= \exp\left(\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right)(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa}B(t, T)^2\right) \\
 P(t, T) &= A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}.
 \end{aligned}$$

Gehen wir nun wieder von (3.22) aus. Wir interessieren uns für das Differential von $P(t, T)$. Dazu schreiben wir $P(t, T)$ als $P(t, T) = e^{-\pi(t)}$ mit

$$\begin{aligned}
 \pi_t &= \left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right)(T-t) + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
 &\quad + \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 + (r_t - \theta)\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}).
 \end{aligned}$$

Das Differential von $\pi(t)$ ist

$$\begin{aligned}
 d\pi(t) &= -\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right) dt - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} e^{-\kappa(T-t)} dt - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) e^{-\kappa(T-t)} dt \\
 &\quad + \underbrace{dr_t}_{\kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^1} \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) - (r_t - \theta) e^{-\kappa(T-t)} dt \\
 &= -r_t dt + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 dt + \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1.
 \end{aligned}$$

Nach Itô ist

$$\begin{aligned}
 dP(t, T) &= P(t, T) \left(-d\pi_t + \frac{1}{2} (d\pi_t)^2 \right) \\
 &= P(t, T) \left(r_t dt - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 dt - \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \right) \\
 &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \\
 &= P(t, T) \left(r_t dt - \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \right).
 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt haben wir die Differentiale:

$$\begin{aligned}
 dr_t &= \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^1 \\
 d\beta_t &= r_t dt \\
 d\delta_t &= \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 \right) dt + \sigma_\delta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) \\
 d\pi_t &= -r_t dt + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 dt + \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \tag{3.23} \\
 d\tilde{P}(t, T) &= -\tilde{P}(t, T) \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \\
 d\tilde{S}_t^1 &= \tilde{S}_t^1 \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right)
 \end{aligned}$$

3.3.2 Der Prozess (r_t, β_t, δ_t)

In diesem Kapitel wollen wir nachweisen, dass (r_t, β_t, δ_t) ein Gaußscher Prozess ist. Das ermöglicht die Simulation dieses Prozesses.

Zunächst wollen wir den Ausdruck (3.18) für β_t vereinfachen. Mit dem Satz von Fubini für stochastische Integrale [9, Seite 20] können wir beim Doppelintegral die Integration vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
 \beta_t &= \theta t + (r_0 - \theta) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r \int_0^t e^{-\kappa u} \left(\int_0^u e^{\kappa v} dW_v^1 \right) du \\
 &= \theta t + (r_0 - \theta) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r \int_0^t \underbrace{\left(\int_u^t e^{-\kappa(t-v)} dv \right)}_{\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-u)})} dW_u^1 \\
 &= \theta t - \frac{1}{\kappa} \left(\theta - r_0 + (r_0 - \theta) e^{-\kappa t} - \sigma_r W_t^1 + \sigma_r e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa u} dW_u^1 \right) \\
 &= \theta t - \frac{1}{\kappa} (r_t - r_0) + \frac{\sigma_r}{\kappa} W_t^1.
 \end{aligned}$$

Nochmals zusammengefaßt haben wir:

$$r_t = \theta + e^{-\kappa t} (r_0 - \theta) + \sigma_r e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa u} dW_u^1 \quad (3.24)$$

$$\beta_t = \theta t - \frac{1}{\kappa} (r_t - r_0) + \frac{\sigma_r}{\kappa} W_t^1 \quad (3.25)$$

$$\delta_t = \beta_t - \frac{\sigma_\delta^2 t}{2} + \sigma_\delta (\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2) \quad (3.26)$$

Als nächstes interessieren wir uns für die gemeinsame Verteilung von (r_t, β_t, δ_t) gegeben (r_s, β_s, δ_s) mit $s < t$. Dazu benötigen wir folgendes

Lemma 3.1. Für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq l \leq s$ seien Funktionen $H_{il} : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die $\int_0^T H_{il}(t, u)^2 du < \infty$ für $t \in [0, T]$ erfüllen. Sei $Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^r)$ mit

$$Y_t^i = \sum_{l=1}^s \int_0^T H_{il}(t, u) dW_u^l$$

wobei $W = (W^1, \dots, W^s)$ eine s -dimensionale standard Brownsche Bewegung bezeichnet. Dann ist $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Gaußscher Prozess. Insbesondere ist die bedingte Verteilung von Y_t gegeben Y_s ($s < t$) normal mit Mittel $E[Y_t | Y_s]$ und Varianz $\text{Var}[Y_t | Y_s]$.

Beweis. Die Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{(u_{i-1}, u_i]} \mid a_i \in \mathbb{R}, \quad 0 = u_0 \leq \dots \leq u_n = T \right\}$$

ist dicht in $L^2[0, T]$. Für jedes $t \in [0, T]$ gibt es Folgen $f_{il}^{(n)} \in \mathcal{M}$ mit $f_{il}^{(n)} \xrightarrow{L^2} H_{il}(t, \cdot)$. Daraus folgt:

$$\left(\int_0^T f_{il}^{(n)}(u) dW_u^l \right)_{1 \leq i \leq r} \xrightarrow{p} \left(\int_0^T H_{il}(t, u) dW_u^l \right)_{1 \leq i \leq r}.$$

Wegen

$$\left(\int_0^T f_{il}^{(n)}(u) dW_u^l \right)_{1 \leq i \leq r} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^{(i,l,n)} (W_{u_i}^l - W_{u_{i-1}}^l) \right)_{1 \leq i \leq r}$$

ist der linke Vektor von Integralen ein normalverteilter Zufallsvektor. Damit ist auch der Grenzzufallsvektor normal und damit auch Y_t .

Endlichdimensionale Randverteilungen: Sei $t_1 < \dots < t_n$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}^r$ für $i = 1, \dots, n$. Nach dem bisher gezeigten ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j^T Y_{t_j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r \lambda_j^i Y_{t_j}^i \\ &= \sum_{l=1}^r \sum_{i=1}^n \int_0^T \underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j^i H_{il}(t_j, u)}_{\in L^2} dW_u^l \end{aligned}$$

normal. Daraus folgt, dass Y ein Gaußscher Prozess ist. \square

Bemerkung 3.1. Ist $E[Y_t | \sigma(Y_u | u \leq s)] = g(Y_s)$ dann gilt $E[Y_t | Y_s] = g(Y_s)$.

Jetzt können wir die Berechnung der bedingten Erwartungen und Varianzen durchführen: Durch Umformen von (3.24) erhält man

$$\sigma_r \int_0^s e^{\kappa u} dW_u^1 = (r_s - \theta - e^{-\kappa s}(r_0 - \theta)) e^{\kappa s}. \quad (3.27)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E[r_t | \mathcal{F}_s] &= r_0 e^{-\kappa t} + \theta (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r e^{-\kappa t} E \left[\int_0^t e^{\kappa u} dW_u^1 | \mathcal{F}_s \right] \\ &= r_0 e^{-\kappa t} + \theta (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r e^{-\kappa t} \left(\int_0^s e^{\kappa u} dW_u^1 + \underbrace{E \left[\int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1 \right]}_{=0} \right) \\ &= r_0 e^{-\kappa t} + \theta (1 - e^{-\kappa t}) + e^{-\kappa(t-s)} r_s - e^{-\kappa(t-s)} \theta - e^{-\kappa t} (r_0 - \theta) \\ &= \theta + (r_s - \theta) e^{-\kappa(t-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\beta_t | \mathcal{F}_s] &= E \left[\int_0^t r_u du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[\int_0^s r_u du \right] + E \left[\int_s^t r_u du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \beta_s + \int_s^t E[r_u | \mathcal{F}_s] du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta_s + \int_s^t (\theta + (r_s - \theta)e^{-\kappa(u-s)}) du \\
 &= \beta_s + \theta(t-s) + \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \quad \text{und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[\delta_t | \mathcal{F}_s] &= E[\beta_t | \mathcal{F}_s] - \frac{\sigma_\delta^2 t}{2} + \sigma_\delta(\rho dW_s^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_s^2) \\
 &= \beta_s + \theta(t-s) + \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}) - \frac{\sigma_\delta^2 t}{2} + \sigma_\delta(\rho dW_s^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_s^2) \\
 &= \delta_s + \frac{\sigma_\delta^2}{2}s - \frac{\sigma_\delta^2}{2}t + \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \theta(t-s) \\
 &= \delta_s + \left(\theta - \frac{\sigma_\delta^2}{2}\right)(t-s) + \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}).
 \end{aligned}$$

Nun können wir

$$\begin{aligned}
 r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s] &= \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma_r e^{-\kappa t} \underbrace{\int_0^t e^{\kappa u} dW_u^1}_{\int_0^s e^{\kappa u} dW_u^1 + \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1} - \theta - (r_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)} \\
 &= \sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1
 \end{aligned}$$

berechnen, wobei wieder (3.27) verwendet wurde. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[r_t | \mathcal{F}_s] &= E[(r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s])^2 | \mathcal{F}_s] \\
 &= E\left[\sigma_r^2 e^{-2\kappa t} \int_s^t e^{2\kappa u} du\right] \\
 &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}).
 \end{aligned}$$

Genauso gehen wir für $\text{Var}[\beta_t | \mathcal{F}_s]$ und $\text{Var}[\delta_t | \mathcal{F}_s]$ vor. Mit

$$\begin{aligned}
 \beta_t - E[\beta_t | \mathcal{F}_s] &= \beta_t - \beta_s - \theta(t-s) - \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &= \theta(t-s) - \frac{1}{\kappa}(t-s) + \frac{\sigma_r}{\kappa}(W_t^1 - W_s^1) - \frac{1}{\kappa}(r_s - \theta)(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &= -\frac{1}{\kappa}\left(r_t - r_s + r_s - \underbrace{\left(\theta + (r_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)}\right)}_{E[r_t | \mathcal{F}_s]}\right) + \frac{\sigma_r}{\kappa}(W_t^1 - W_s^1) \\
 &= -\frac{1}{\kappa}(r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) + \frac{\sigma_r}{\kappa}(W_t^1 - W_s^1)
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Var} [\beta_t | \mathcal{F}_s] &= E \left[\left(-\frac{1}{\kappa} (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) + \frac{\sigma_r}{\kappa} (W_t^1 - W_s^1) \right)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[\left(-\frac{1}{\kappa} (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) \right)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 &\quad - E \left[\frac{2\sigma_r}{\kappa^2} (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) (W_t^1 - W_s^1) \mid \mathcal{F}_s \right] + E \left[\frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} (W_t^1 - W_s^1)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} \text{Var} [r_t | \mathcal{F}_s] + \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} (t-s) - \frac{2\sigma_r}{\kappa^2} E \left[\sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1 \int_s^t dW_u^1 \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) + \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} (t-s) - \frac{2\sigma_r}{\kappa^2} \sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} du \\
 &= \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} \left(t-s + \frac{1}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) - \frac{2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \right).
 \end{aligned}$$

Und mit

$$\begin{aligned}
 \delta_t - E[\delta_t | \mathcal{F}_s] &= \delta_t - \delta_s - \left(\theta - \frac{\sigma_\delta^2}{2} \right) (t-s) - \frac{1}{\kappa} (r_s - \theta) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &= \beta_t - \beta_s - \frac{\sigma_\delta^2}{2} (t-s) + \sigma_\delta \rho (W_t^1 - W_s^1) + \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2} (W_t^1 - W_s^1) \\
 &\quad - \theta(t-s) + \frac{\sigma_\delta^2}{2} (t-s) - \frac{1}{\kappa} (r_s - \theta) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &= \beta_t - E[\beta_t | \mathcal{F}_s] + \sigma_\delta \rho (W_t^1 - W_s^1) + \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2} (W_t^1 - W_s^1) \\
 &= -\frac{1}{\kappa} (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) + \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho \right) (W_t^1 - W_s^1) \\
 &\quad + \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2} (W_t^1 - W_s^1) + \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho \right)^2 (t-s) +
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Var} [\delta_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{1}{\kappa^2} \text{Var} [r_t | \mathcal{F}_s] + \sigma_\delta^2 (1 - \rho^2) (t-s) \\
 &\quad - \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho \right) E \left[\sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1 \int_s^t dW_u^1 \right] \\
 &= \left(\frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} + \frac{2\sigma_r \sigma_\delta \rho}{\kappa} + \sigma_\delta^2 \right) (t-s) - \frac{2\sigma_r}{\kappa^2} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \rho \sigma_\delta \right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}).
 \end{aligned}$$

Zum Schluss benötigen wir noch die Kovarianzen. Diese berechnen sich als

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[r_t, \beta_t | \mathcal{F}_s] &= E[(r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) \cdot (\beta_t - E[\beta_t | \mathcal{F}_s]) | \mathcal{F}_s] \\
 &= E\left[-\frac{\sigma_r^2 e^{-2\kappa t}}{\kappa} \int_s^t e^{2\kappa u} du + \frac{\sigma_r^2 e^{-\kappa t}}{\kappa} \int_s^t e^{2\kappa u} dW_u^1 \int_s^t dW_u^1 | \mathcal{F}_s\right] \\
 &= \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} \left((1 - e^{-\kappa(t-s)}) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[r_t, \delta_t | \mathcal{F}_s] &= E[(r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) \cdot (\delta_t - E[\delta_t | \mathcal{F}_s]) | \mathcal{F}_s] \\
 &= E\left[-\frac{1}{\kappa} (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s])^2 + (r_t - E[r_t | \mathcal{F}_s]) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (W_t^1 - W_s^1) | \mathcal{F}_s\right] \\
 &= \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) - \frac{\sigma_r}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \right) \quad \text{und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\delta_t, \beta_t | \mathcal{F}_s] &= E[(\delta_t - E[\delta_t | \mathcal{F}_s]) \cdot (\beta_t - E[\beta_t | \mathcal{F}_s]) | \mathcal{F}_s] \\
 &= E\left[\frac{1}{\kappa^2} \sigma_r^2 e^{-2\kappa t} \int_s^t e^{2\kappa u} du \frac{\sigma_r}{\kappa^2} \sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1 \int_s^t dW_u^1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) \int_s^t dW_u^1 \cdot \sigma_r e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dW_u^1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (W_t^1 - W_t^2)^2 | \mathcal{F}_s\right] \\
 &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &\quad - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) \sigma_r \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (t-s) \\
 &= \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (t-s) - \frac{\sigma_r}{\kappa^2} \left(\frac{2\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta \rho\right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\
 &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}).
 \end{aligned}$$

Weil $E_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s]$ eine messbare Funktion des \mathcal{F}_s -messbaren Zufallsvektors (r_s, δ_s, β_s) ist, gilt

$$E_{\mathbb{Q}}[r_t | (r_s, \delta_s, \beta_s)] = E_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] \quad P - f.s.$$

Das gleiche gilt für alle soeben berechneten bedingten Erwartungen, Varianzen und Kovarianzen.

Zusammengefaßt ist die bedingte Verteilung von (r_t, δ_t, β_t) gegeben (r_s, δ_s, β_s) :

$$N \left(\begin{pmatrix} E_s[r_t] \\ E_s[\delta_t] \\ E_s[\beta_t] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Var_s[r_t] & Cov_s[r_t, \delta_t] & Cov_s[r_t, \beta_t] \\ Cov_s[\delta_t, r_t] & Var_s[\delta_t] & Cov_s[\delta_t, \beta_t] \\ Cov_s[\beta_t, r_t] & Cov_s[\beta_t, \delta_t] & Var_s[\beta_t] \end{pmatrix} \right),$$

mit

$$\begin{aligned} E_s[r_t] &= \theta + (r_s - \theta) e^{-\kappa(t-s)}, \\ E_s[\delta_t] &= \delta_s + \left(\theta - \frac{\sigma_\delta^2}{2} \right) (t-s) + \frac{1}{\kappa} (r_s - \theta) (1 - e^{-\kappa(t-s)}), \\ E_s[\beta_t] &= \beta_s + \theta(t-s) + \frac{1}{\kappa} (r_s - \theta) (1 - e^{-\kappa(t-s)}), \\ Var_s[r_t] &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}), \\ Var_s[\delta_t] &= \left(\frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} + \frac{2\sigma_r\sigma_\delta\rho}{\kappa} + \sigma_\delta^2 \right) (t-s) - \frac{2\sigma_r}{\kappa^2} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \rho\sigma_\delta \right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\ &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}), \\ Var_s[\beta_t] &= \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} \left(t-s + \frac{1}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) - \frac{2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \right), \\ Cov_s[r_t, \delta_t] &= \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta\rho \right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}) - \frac{\sigma_r}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \right), \\ Cov_s[r_t, \beta_t] &= \frac{\sigma_r^2}{\kappa^2} \left((1 - e^{-\kappa(t-s)}) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \right), \\ Cov_s[\delta_t, \beta_t] &= \frac{\sigma_r}{\kappa} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta\rho \right) (t-s) - \frac{\sigma_r}{\kappa^2} \left(\frac{2\sigma_r}{\kappa} + \sigma_\delta\rho \right) (1 - e^{-\kappa(t-s)}), \\ &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

und den Schreibweisen $E_s[\cdot]$ für $E[\cdot | \mathcal{F}_s]$, $Var_s[\cdot]$ für $Var[\cdot | \mathcal{F}_s]$ und $Cov_s[\cdot]$ für $Cov[\cdot | \mathcal{F}_s]$.

3.4 Das Heath-Jarrow-Morton Modell

In Kapitel 3.2 wurde zur Beschreibung der Zinsstruktur für die short rate ein Diffusionsprozess zugrunde gelegt, von dem ausgehend sich eine Vielzahl an Modellen für die short rate entwickelt hat. In [13] sind Heath, Jarrow und Morton einen anderen Weg gegangen: Um die Zinsstruktur zu modellieren, haben sie ein Modell für die forward rates $f(t, T)$ aufgestellt. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass alle denkbaren Formen der Zinsstruktur vom Modell erfaßt sind, während die vorher genannten Modelle stets versuchen, die Entwicklung der Zinsstruktur allein durch den stochastischen Prozess der short rate zu modellieren.

Wir gehen wieder von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ aus. Für jedes feste $T \leq T^*$ und $\forall t \in [0, T]$ wird gegeben einem Startwert $f(0, T)$ folgende Dynamik für die forward rates angenommen:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s \quad (3.29)$$

oder in differentieller Schreibweise

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t. \quad (3.30)$$

Hierbei ist $\alpha(t, T)$ die Drift und $\sigma(t, T)$ die Volatilität von $df(t, T)$ sowie W eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{P} . Die technischen Bedingungen, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden, sind:

- α und σ seien adaptierte stochastische Prozesse und für alle Laufzeiten $T \leq T^*$ und $t \in [0, T]$ gelte $\int_0^T |\alpha(t, T)| dt < \infty$ und $\int_0^T |\sigma(t, T)|^2 dt < \infty$ \mathbb{P} -f.s.
- $f(0, T)$ sei deterministisch und erfülle $\int_0^T |f(0, u)| du < \infty$
- Die Drift erfülle $\int_0^T \int_0^u |\alpha(t, u)| dt du < \infty$
- Die Volatilität erfülle $E \left[\int_0^T \left| \int_0^u \sigma(t, u) dW_t \right| du \right] < \infty$

Die ersten beiden Bedingungen stellen sicher, dass die forward rates wohldefiniert sind. Die letzten beiden Bedingungen werden benötigt, um später den Satz von Fubini für stochastische Integrale anwenden zu können.

Wie wir aus (3.2) wissen, gilt zwischen den forward rates und der short rate die Beziehung $r_t = f(t, t)$. Mit (3.29) erhalten wir nun

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s. \quad (3.31)$$

Damit können wir den Wert der kurzfristigen Anleihe ausdrücken als

$$S_t^0 = \exp \left(\int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \left(\int_0^u \alpha(s, u) ds \right) du + \int_0^t \left(\int_0^u \sigma(s, u) dW_s \right) du \right).$$

Mit dem Satz von Fubini [9, Seite 20] können wir bei den beiden Doppelintegralen die Integration vertauschen und erhalten somit

$$S_t^0 = \exp \left(\int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s, u) duds + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s, u) du \right) dW_s \right).$$

Die Bond-Preise ergeben sich aus den forward rates bekannterweise durch

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right).$$

Setzen wir hier (3.29) ein und wenden wieder den Satz von Fubini für stochastische Integrale an, erhalten wir für die Bond-Preise

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp \left(- \int_t^T \left(f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s \right) \right) \\ &= \exp \left(- \left(\int_t^T f(0, u) du + \int_0^t \int_t^T \alpha(s, u) duds + \int_0^t \int_t^T \sigma(s, u) dudW_s \right) \right). \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir den Wechsel zum risikoneutralen Maß durchführen, bezüglich dessen die diskontierten Bondpreise Martingale sind. Für ein festes T ist der diskontierte Bondpreis gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, T) &= (S_t^0)^{-1} P(t, T) \\ &= \exp \left(- \left(\int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s, u) duds + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s, u) du \right) dW_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_t^T f(0, u) du + \int_0^t \int_t^T \alpha(s, u) duds + \int_0^t \int_t^T \sigma(s, u) dudW_s \right) \right) \\ &= \exp \left(- \left(\int_0^T f(0, u) du + \int_0^t \int_s^T \alpha(s, u) duds + \int_0^t \int_s^T \sigma(s, u) dudW_s \right) \right) \\ &= \exp \left(- \left(\int_0^T f(0, u) du + \int_0^t \alpha^*(s, T) ds - \int_0^t \sigma^*(s, u) dW_s \right) \right) \quad (3.32) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha^*(t, T) &:= \int_t^T \alpha(t, u) du \quad \text{und} \\ \sigma^*(t, T) &:= - \int_t^T \sigma(t, u) du. \end{aligned}$$

Wendet man auf (3.32) die Formel von Itô an, erhält man für die Dynamik des diskontierten Bondpreises

$$\begin{aligned} d\tilde{P}(t, T) &= \tilde{P}(t, T) \left(-\alpha^*(t, T)dt + \sigma^*(t, T)dW_t + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2dt \right) \\ &= \tilde{P}(t, T)\sigma^*(t, T) \left(\left(\frac{1}{2}\sigma^*(t, T) - \frac{1}{\sigma^*(t, T)}\alpha^*(t, T) \right) dt + dW_t \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Damit $\tilde{P}(t, T)$ ein Martingal wird, müssen wir beim Maßwechsel den Driftterm eliminieren. Dieser ist in (3.33) gegeben durch

$$\lambda_t := \frac{1}{2}\sigma^*(t, T) - \frac{1}{\sigma^*(t, T)}\alpha^*(t, T). \quad (3.34)$$

$\lambda = (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ können wir wieder als market price of risk interpretieren.

Unter der Novikov-Bedingung $E_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] < \infty$ gibt es nach dem Satz von Girsanov 1.20 ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} bezüglich dessen

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

eine Brown'sche Bewegung ist. Unter \mathbb{Q} ist nun die Dynamik des diskontierten Bondpreises, in welchem kein Driftterm mehr vorkommt, gegeben durch

$$d\tilde{P}(t, T) = \tilde{P}(t, T)\sigma^*(t, T)d\tilde{W}_t.$$

Daraus erhalten wir mit $P(t, T) = S_t^0 \tilde{P}(t, T)$ und Anwendung der Produktregel (1.3) die Dynamik von $P(t, T)$ unter \mathbb{Q} als

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= dS_t^0 \tilde{P}(t, T) + S_t^0 d\tilde{P}(t, T) + dS_t^0 \tilde{P}(t, T) \\ &= r_t S_t^0 dt P(t, T) (S_t^0)^{-1} + S_t^0 P(t, T) (S_t^0)^{-1} \sigma^*(t, T) d\tilde{W}_t \\ &= P(t, T) \left(r_t dt + \sigma^*(t, T) d\tilde{W}_t \right). \end{aligned}$$

Somit haben wir hier ebenso wie zuvor beim Diffusionsmodell für die short rate das Resultat, das jenem aus dem Black-Scholes Modell ähnlich ist: Das Verhalten des Bondpreises unter \mathbb{Q} hängt nicht mehr von α ab, so wie im Black-Scholes Modell der Preis der Aktie unter \mathbb{Q} nicht mehr von μ abhängt.

Für die forward rates und die short rate erhalten wir unter \mathbb{Q} aus (3.30) und (3.31) nun folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= -\sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t, \\ r_t &= f(0, t) - \int_0^t \sigma(s, t)\sigma^*(s, t)ds + \int_0^t \sigma(s, t)d\tilde{W}_s. \end{aligned}$$

Die Dynamik von $f(t, T)$ ist unter \mathbb{Q} unabhängig von α . Damit ist bei Arbitragefreiheit die Dynamik der forward rates und damit die Dynamik der kompletten Zinsstruktur allein durch die Volatilität eindeutig festgelegt.

Es ist uns nun auch möglich aus (3.34) eine Bedingung an α unter dem ursprünglichen Maß \mathbb{P} abzuleiten: Dazu formen wir (3.34) um und erhalten

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, u) du = \frac{1}{2} \sigma^*(t, T)^2 - \sigma^*(t, T) \lambda_t.$$

Differenzieren wir dies nach T ergibt sich als Bedingung an α

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) (\lambda_t - \sigma^*(t, T)).$$

Da die Bondpreise für alle $t \in [0, T]$ durch $P(t, T) = \exp\left(-\int_0^T f(t, u) du\right)$ und der Preis der kurzfristigen Anleihe durch $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t f(u, u) du\right)$ gegeben sind, ist die gemeinsame Verteilung von $(P(t, T), S_t^0)$ unter \mathbb{Q} eindeutig bestimmt und unabhängig vom market price of risk. Daher können wir $\lambda_t = 0$ setzen und erhalten so die berühmte *Drift Bedingung* des Heath-Jarrow-Morton Modells

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du. \quad (3.35)$$

3.4.1 Heath-Jarrow-Morton und das Diffusionsmodell für die short rate

Wir haben gesehen, dass im Heath-Jarrow-Morton Modell der Prozess für alle forward rates $f(t, T)$ mit $T \leq T^*$ und $t \in [0, T]$ modelliert wird, anstatt konkret die short rate zu modellieren. Dieser allgemeine Ansatz bringt mit sich, dass alle short rate Modelle einem Heath-Jarrow-Morton Modell entsprechen. Im folgenden werden wir sehen, wie man den Zusammenhang zwischen diesen beiden Ansätzen herstellen kann. Weiters werden wir exemplarisch das Modell von Vasicek in Heath-Jarrow-Morton Terminologie angeben.

Für die short rate nehmen wir wieder den selben Diffusionsprozess wie in (3.4) an:

$$dr_t = a_t dt + b_t d\widetilde{W}_t.$$

Auch der Bondpreis hänge wieder stetig von r_t, t und T ab. Damit gilt gleiches auch für den logarithmierten Bondpreis und aus (3.3) folgt

$$\int_t^T f(t, u) du = -\log P(t, T) = g(r_t, t, T) \quad (3.36)$$

mit

$$g(x, t, T) = -\log E_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \mid r_t = x \right].$$

Da im Heath-Jarrow-Morton Modell bei Arbitragefreiheit die Dynamik der forward rates allein durch die Volatilität festgelegt ist, gilt es einen Zusammenhang zwischen $\sigma(t, T)$ und b_t herzustellen. Aus (3.36) folgt für $f(t, T)$

$$f(t, T) = \frac{\partial g}{\partial T}(r_t, t, T).$$

Wenden wir darauf die Formel von Itô an erhalten wir

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} dr_t + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial T} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial T} b_t^2 dt \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} (a_t dt + b_t d\widetilde{W}_t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial T} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial T} b_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} a_t + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial T} b_t \right) dt + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} b_t d\widetilde{W}_t. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (3.30) liefert

$$\sigma(t, T) = b_t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T}(r_t, t, T) \quad (3.37)$$

und damit

$$\sigma^*(t, T) = -b_t \frac{\partial g}{\partial x}(r_t, t, T). \quad (3.38)$$

Zusätzlich ist $f(0, T)$ gegeben durch

$$f(0, T) = \frac{\partial g}{\partial T}(r_0, 0, T). \quad (3.39)$$

Mit (3.37), (3.38) und (3.39) ist der Zusammenhang zwischen einem Diffusionsmodell für die short rate und dem Heath-Jarrow-Morton Modell hergestellt.

Das Vasicek Modell

Im Vasicek Modell wird für die short rate bekannterweise die Dynamik

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t$$

angenommen. Um die Funktion $g(x, t, T)$ zu finden, machen wir uns das in Kapitel 3.3.1 erhaltene Ergebnis für den Bondpreis (3.22) zunutze. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g(x, t, T) &= - \left(\left(\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} - \theta \right) (T - t) - \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \left(x - \theta + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sigma^*(t, T) &= -b_t \frac{\partial g}{\partial x}(r_t, t, T) \\ &= -\sigma_r \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(t, T) &= b_t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T}(r_t, t, T) \\ &= \sigma_r e^{-\kappa(T-t)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}f(0, T) &= \frac{\partial g}{\partial T}(r_0, 0, T) \\ &= \theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa T})^2 + e^{-\kappa T} (r_0 - \theta).\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ist das mit dem Vasicek Modell korrespondierende Heath-Jarrow-Morton Modell gegeben durch

$$\begin{aligned}df(t, T) &= -\sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, \\ r_t &= f(0, t) - \int_0^t \sigma(s, t)\sigma^*(s, t)ds + \int_0^t \sigma(s, t)dW_s,\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\sigma(t, T) &= \sigma_r e^{-\kappa(T-t)}, \\ \sigma^*(t, T) &= -\sigma_r \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}), \\ f(0, T) &= \theta + e^{-\kappa T} (r_0 - \theta) - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa T})^2,\end{aligned}$$

und einer Brown'schen Bewegung W bezüglich \mathbb{Q} .

Kapitel 4

Vertragsmodelle in Verbindung mit einer stochastischen Zinsrate

Im folgenden werden wir die in Kapitel 2 unter der Annahme einer konstanten Zinsrate r vorgestellten Vertragsmodelle im Fall einer stochastischen Zinsrate r_t betrachten. Als Modell für r_t wählen wir das Vasicek Modell. Zur Simulation werden die in Kapitel 3.3.2 hergeleiteten Ergebnisse für die bedingte Verteilung des Prozesses (r_t, β_t, δ_t) (3.28) verwendet.

Die Parameter σ_r und κ können zum Beispiel mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus empirischen Daten geschätzt werden. In dieser Arbeit werden die Werte $\sigma_r = 2.258\%$ und $\kappa = 0.30723$ aus [12] übernommen.

4.1 Ein-Perioden-Modell

In Kapitel 2.1 konnten wir diese Vertragsform unter der Annahme einer konstanten Zinsrate r leicht mit der Black-Scholes Formel bewerten.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas gelangen wir unter der Annahme einer stochastischen Zinsrate zu einem Ergebnis, von dem (2.2) ein Spezialfall ist.

Lemma 4.1. *Sei $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ positiv definit sowie $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}^d$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$E \left[e^{c^T X} \mathbb{I}_{\{a^T X + b \geq 0\}} \right] = \phi \left(\frac{1}{\sqrt{a^T \Sigma a}} (b + a^T \mu + c^T \Sigma a) \right) e^{\frac{1}{2} c^T \Sigma c + c^T \mu}.$$

Beweis. Sei $\Sigma = L^T L$, dann ist $X = \mu + L^T Y$ mit $Y \sim N_d(0, 1)$. Sei weiters U orthonormal, dann ist $Y = UZ$ mit $Z \sim N_d(0, 1)$.

Mit der Wahl $U = \left(\frac{1}{\sqrt{a^T \Sigma a}} a, u_2, \dots, u_d \right)$ folgt

$$(La)^T UZ = \sqrt{a^T \Sigma a} u_1^T UZ = \sqrt{a^T \Sigma a} Z_1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 & E \left[e^{c^T X} \mathbb{I}_{\{a^T X + b \geq 0\}} \right] \\
 &= E \left[e^{c^T \mu + (Lc)^T Y} \mathbb{I}_{\{(La)^T y + a^T \mu + b \geq 0\}} \right] \\
 &= e^{c^T \mu} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(Lc)^T y} \mathbb{I}_{\{(La)^T y + a^T \mu + b \geq 0\}} e^{-\frac{1}{2} |y|^2} dy \\
 &= e^{c^T \mu} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(Lc)^T U z - \frac{1}{2} |z|^2} \mathbb{I}_{\{\sqrt{a^T \Sigma a} z_1 + a^T \mu + b \geq 0\}} dz \\
 &= e^{c^T \mu} (2\pi)^{-d/2} \int_{z_1 \geq -\frac{b+a^T \mu}{\sqrt{a^T \Sigma a}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (z_i - (Lc)^T U e_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d ((Lc)^T U e_i)^2} dz \\
 &= e^{c^T \mu + \frac{1}{2} c^T \Sigma c} (2\pi)^{-d/2} \int_{z_1 \geq -\frac{b+a^T \mu}{\sqrt{a^T \Sigma a}} - (Lc)^T U e_1} e^{-\frac{1}{2} |z|^2} dz \\
 &= e^{c^T \mu + \frac{1}{2} c^T \Sigma c} \phi \left(\frac{b + a^T \mu}{\sqrt{a^T \Sigma a}} + \frac{c^T \Sigma a}{\sqrt{a^T \Sigma a}} \right)
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1. (i) Ist $X \sim N_d(0, 1)$ gilt $E \left[e^{c^T X} \mathbb{I}_{\{a^T X + b \geq 0\}} \right] = \phi \left(\frac{1}{|a|} (b + c^T a) \right) e^{\frac{1}{2} |c|^2}$.

(ii) Mit $c = 0$ ist

$$P(a^T X + b \geq 0) = \phi \left(\frac{b + a^T \mu}{\sqrt{a^T \Sigma a}} \right).$$

Jetzt können wir $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ berechnen. Der Vertrag wird wie in (2.1) beschrieben durch die Forderung

$$\frac{A_T}{X} = e^{gT} + \alpha (e^{\delta T} - e^{gT})^+$$

und er ist fair, wenn $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = 1$ erfüllt ist.

$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ formen wir zunächst so um, dass wir obiges Lemma anwenden können:

$$\begin{aligned}
 V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} \left(e^{gT} + \alpha (e^{\delta T} - e^{gT})^+ \right) \right] \\
 &= E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta T} e^{gT}] + \alpha E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta T} (e^{\delta T} - e^{gT}) \mathbb{I}_{\{\delta T \geq gT\}}] \\
 &= e^{gT} \underbrace{E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta T}]}_{P(0,T)} + \alpha \left(E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta T + \delta T} \mathbb{I}_{\{\delta T - gT \geq 0\}}] - e^{gT} E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta T} \mathbb{I}_{\{\delta T - gT \geq 0\}}] \right).
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \beta_T & \beta_0 \\ \delta_T & \delta_0 \end{pmatrix} \sim N(\mu, \Sigma) = N \left(\begin{pmatrix} E_0[\beta_T] \\ E_0[\delta_T] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Var_0[\beta_T] & Cov_0[\beta_T, \delta_T] \\ Cov_0[\delta_T, \beta_T] & Var_0[\delta_T] \end{pmatrix} \right)$$

und $E_s[\cdot]$, $Var_s[\cdot]$ und $Cov_s[\cdot]$ mit $s = 0$ wie in (3.28).

Mit Hilfe von Lemma (4.1) können wir nun $E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T + \delta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}]$ und $E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}]$ wie folgt berechnen:

Für $E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T + \delta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}]$ setzen wir $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = -gT$ und $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten: $a^T \Sigma a = \Sigma_{22}$, $a^T \mu = E[\delta_T]$, $c^T \Sigma a = \Sigma_{22} - \Sigma_{12}$, $c^T \mu = -E[\beta_T] + E[\delta_T]$ und $c^T \Sigma c = \Sigma_{11} - 2\Sigma_{12} + \Sigma_{22}$. Damit ist

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T + \delta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}] \\ = e^{\frac{1}{2}(\Sigma_{11} - 2\Sigma_{12} + \Sigma_{22}) + E[\delta_T] - E[\beta_T]} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}}} (-gT + E[\delta_T] + \Sigma_{22} - \Sigma_{12}) \right) \end{aligned}$$

Für $E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}]$ setzen wir $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = -gT$ und $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhalten: $a^T \Sigma a = \Sigma_{22}$, $a^T \mu = E[\delta_T]$, $c^T \Sigma a = -\Sigma_{12}$, $c^T \mu = -E[\beta_T]$ und $c^T \Sigma c = \Sigma_{11}$. Damit ist

$$E_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta_T} \mathbb{I}_{\{\delta_T - gT \geq 0\}}] = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{11} - E[\beta_T]} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}}} (-gT + E[\delta_T] - \Sigma_{12}) \right)$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= e^{gT} P(0, T) \\ &+ \alpha \left\{ e^{\frac{1}{2}(\Sigma_{11} - 2\Sigma_{12} + \Sigma_{22}) + E[\delta_T] - E[\beta_T]} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}}} (-gT + E[\delta_T] + \Sigma_{22} - \Sigma_{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{gT + \frac{1}{2}\Sigma_{11} - E[\beta_T]} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}}} (-gT + E[\delta_T] - \Sigma_{12}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Mit $\Sigma_{11} = Var[\beta_T]$, $\Sigma_{22} = Var[\delta_T]$ und $\Sigma_{12} = Cov[\beta_T, \delta_T]$.

Durch spezielle Wahl der Parameter können wir zurück auf den Fall einer konstanten Zinsrate gelangen:

Wähle $\theta = r$, $r_0 = r$ und $\sigma_r = 0$. Dann ist $E[\beta_T] = 0$, $E[\delta_T] = (r - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)T$, $\Sigma_{11} = 0$, $\Sigma_{22} = \sigma_\delta^2 T$, $\Sigma_{12} = 0$, $P(0, T) = e^{-rT}$ und somit

$$\begin{aligned}
 V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= e^{T(g-r)} \\
 &+ \alpha \left\{ e^{\frac{1}{2}\sigma_\delta^2 T + rT - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 T - rT} \phi \left(\frac{1}{\sigma_\delta \sqrt{T}} \left(-gT + rT - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 T + \sigma_\delta^2 T \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - e^{gT - rT} \phi \left(\frac{1}{\sigma_\delta \sqrt{T}} \left(-gT + rT - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 T \right) \right) \right\} \\
 &= e^{T(g-r)} + \alpha \left\{ \phi \left(\frac{r - g + \frac{\sigma_\delta^2}{2} \sqrt{T}}{\sigma_\delta} \right) - e^{T(g-r)} \phi \left(\frac{r - g - \frac{\sigma_\delta^2}{2} \sqrt{T}}{\sigma_\delta} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

was genau dem Ergebnis (2.2) entspricht, das wir mit Hilfe der Black-Scholes Formel bekommen haben.

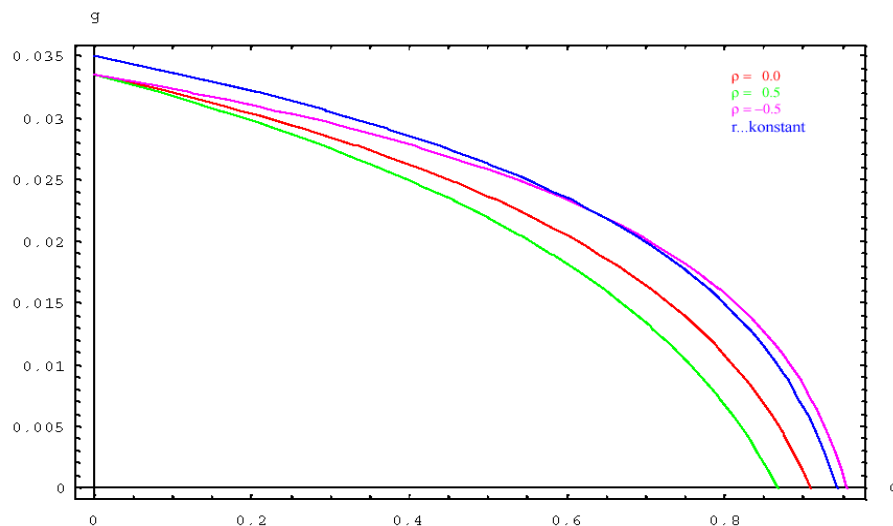


Abbildung 4.1: Kombinationen von α und g für $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$ und verschiedene Korrelationen ρ bei denen der Vertrag bei $r_0=3.5\%$ und $T=10$ fair ist

Die Abb. 4.1 und 4.2 zeigen für verschiedene Korrelationen ρ Kombinationen von α und g bei denen (4.1) gleich 1 ist.

Es ist zu beobachten, dass g steigt wenn ρ kleiner wird. Eine positive Korrelation bedeutet, dass wenn die Zinsrate steigt (fällt) auch der Return des Fonds steigt (fällt). Daher kann mit kleiner werdendem ρ mehr garantiert werden, da eine höhere Korrelation eine größere Schwankung der Auszahlung bedeutet. Dies muss der Kunde durch eine niedrigere Garantie „bezahlen“. Eigentlich würde man erwarten, dass $\rho = 0$ dem Fall einer konstanten Zinsrate am nächsten kommt. Wie man aber aus den Grafiken erkennen kann ist dies am ehesten bei $\rho = -0.5$ der Fall. Dies erklärt sich durch eine „versteckte“ positive Korrelation: Sie kommt daher, wie r_t in den Drift-Term einfließt ($r_t - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2$), womit die Korrelation im allgemeinen höher ist als durch ρ angegeben.

Insgesamt kann man feststellen, dass es zu keinen größeren Abweichungen zur Annahme einer konstanten Zinsrate kommt.

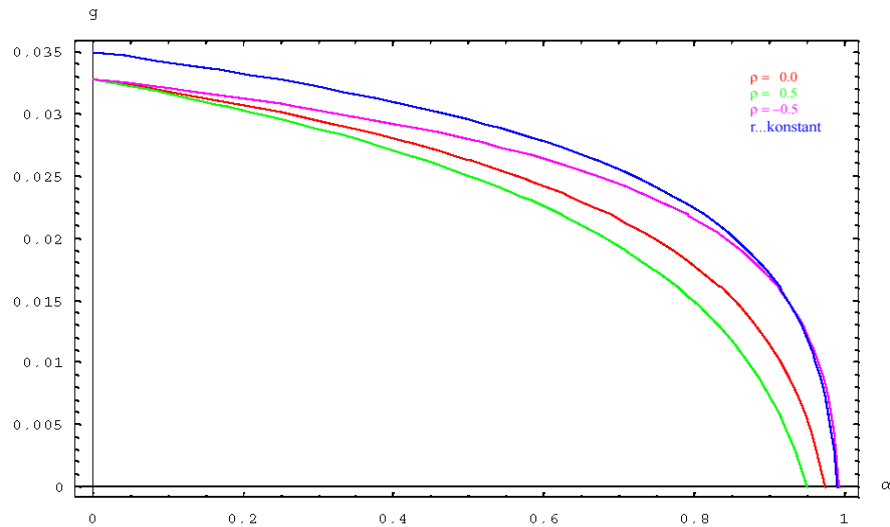


Abbildung 4.2: Kombinationen von α und g für $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$ und verschiedene Korrelationen ρ bei denen der Vertrag bei $r_0=3.5\%$ und $T=25$ fair ist

4.1.1 Hedging

In diesem Kapitel wird mit einer Verallgemeinerung des in Kapitel 1.4.2 beschriebenen Verfahrens eine Hedge für den Claim $\frac{A_T}{X}$ bestimmt.

Sei $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $H_t = (H_t^0, H_t^b, H_t^1)$ eine Hedge des Claims $\frac{A_T}{X}$ mit Wert $V(H)_t = H_t^0 S_t^0 + \bar{H}_t^b P(t, T) + H_t^1 S_t^1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \tilde{V}(H)_t \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta_T} \frac{A_T}{X} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{gT} E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta_T} \mid \mathcal{F}_t] + \alpha E_{\mathbb{Q}} [e^{-\beta_T} (e^{\delta_T} - e^{gT})^+ \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Unter \mathbb{Q} ist die bedingte Verteilung von (β_T, δ_T) gegeben \mathcal{F}_t gleich $N(\mu(t), \Sigma(t))$ wobei $\mu(t)$ und $\Sigma(t)$ durch

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} \mu_\beta(t) \\ \mu_\delta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\mathbb{Q}}[\beta_T \mid \mathcal{F}_t] \\ E_{\mathbb{Q}}[\delta_T \mid \mathcal{F}_t] \end{pmatrix}$$

und

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(t) & \Sigma_{12}(t) \\ \Sigma_{12}(t) & \Sigma_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Var}_{\mathbb{Q}}[\beta_T \mid \mathcal{F}_t] & \text{Cov}_{\mathbb{Q}}[\beta_T, \delta_T \mid \mathcal{F}_t] \\ \text{Cov}_{\mathbb{Q}}[\beta_T, \delta_T \mid \mathcal{F}_t] & \text{Var}_{\mathbb{Q}}[\delta_T \mid \mathcal{F}_t] \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= e^{gT - \beta t} P(t, T) \\ &+ \alpha \left\{ e^{\frac{1}{2}(\Sigma_{11}(t) - 2\Sigma_{12}(t) + \Sigma_{22}(t)) + \mu_\delta(t) - \mu_\beta(t)} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}(t)}} (-gT + \mu_\delta(t) + \Sigma_{22}(t) - \Sigma_{12}(t)) \right) \right. \\ &\left. - e^{gT + \frac{1}{2}\Sigma_{11}(t) - \mu_\beta(t)} \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{22}(t)}} (-gT + \mu_\delta(t) - \Sigma_{12}(t)) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\Sigma_{ij}(t)$ nur Funktionen von t bzw. $(T-t)$ sind, sodass wir \tilde{V}_t schreiben können als

$$\tilde{V}_t = F(t, \mu_\beta(t), \mu_\delta(t)).$$

Wir berechnen zuerst die Differentiale von $d\mu_\beta(t)$ und $d\mu_\delta(t)$. Da Faktoren von dt sich als nicht wesentlich herausstellen werden, werden diese nicht explizit angegeben:

$$\begin{aligned} d\mu_\beta(t) &= d \left(\beta_t + \theta(T-t) + (r_t - \theta) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right) \\ &= \{ \} dt + \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \\ &= \{ \} dt - \frac{1}{\tilde{P}(t, T)} d\tilde{P}(t, T) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\mu_\delta(t) &= d \left(\delta_t + \left(\theta - \frac{\sigma_\delta^2}{2} \right) (T-t) + r_t - \theta \right) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ &= \{ \} dt + \sigma_\delta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) + \frac{\sigma_r}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) dW_t^1 \\ &= \{ \} dt + \frac{1}{\tilde{S}_t^1} d\tilde{S}_t^1 - \frac{1}{\tilde{P}(t, T)} d\tilde{P}(t, T). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $(d\mu_\beta(t))^2 = \{ \} dt$, $d\mu_\beta(t)d\mu_\delta(t) = \{ \} dt$ und $(d\mu_\delta(t))^2 = \{ \} dt$. Die Itô-Formel liefert nun

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= \{ \} dt + \frac{\partial F}{\partial x} d\mu_\beta(t) + \frac{\partial F}{\partial y} d\mu_\delta(t) \\ &= \{ \} dt - \tilde{P}(t, T)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\tilde{P}(t, T) + \tilde{S}_t^{1-1} \frac{\partial F}{\partial y} d\tilde{S}_t^1. \end{aligned}$$

Weil \tilde{V}_t ein Martingal ist und $d\tilde{P}(t, T)$ sowie $d\tilde{S}_t^1$ keinen dt -Anteil besitzen, muss in obiger Formel der Ausdruck $\{ \} dt$ verschwinden. Es folgt

$$d\tilde{V}_t = -\tilde{P}(t, T)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\tilde{P}(t, T) + \tilde{S}_t^{1-1} \frac{\partial F}{\partial y} d\tilde{S}_t^1.$$

Wie in Kapitel 1.4 gilt: H ist selbstfinanzierend genau dann, wenn

$$d\tilde{V}(H)_t = H_t^b d\tilde{P}(t, T) + H_t^1 d\tilde{S}_t^1.$$

Setzt man

$$H_t^b := -\tilde{P}(t, T)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) (t, \mu_\beta(t), \mu_\delta(t)),$$

$$H_t^1 := \tilde{S}_t^{1-1} \frac{\partial F}{\partial y} (t, \mu_\beta(t), \mu_\delta(t)) \quad \text{und}$$

$$H_t^0 := \tilde{V}_t - H_t^b \tilde{P}(t, T) - H_t^1 \tilde{S}_t^1,$$

dann ist H selbstfinanzierend mit $\tilde{V}(H)_t = \tilde{V}_t = F(t, \mu_\beta(t), \mu_\delta(t))$.

Insbesondere ist

$$\tilde{V}(H)_0 = \tilde{V}_0 = s_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$$

$$\tilde{V}(H)_T = \tilde{V}_T = e^{-\beta T} \frac{A_T}{X} \Rightarrow V(H)_T = \frac{A_T}{X}.$$

H ist also eine Hedge für den Claim $\frac{A_T}{X}$.

4.2 Jährliche Aufteilung eines Überschusses

4.2.1 Verträge ohne Zwischenkonto

Unter der Annahme $g_t = g$ für $t = 1 \dots T$ ist mit

$$A_T = X e^{\sum_{t=1}^T g + \alpha(\delta_t - g)^+}$$

$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ nun gegeben durch

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) &= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} e^{\sum_{t=1}^T g + \alpha(\delta_t - g)^+} \right] \\ &= e^{gT} E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+} \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wie wir bereits aus Kapitel 2.2.1 wissen, muss für einen fairen Vertrag $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = 1$ gelten, wobei es zu jedem g ein eindeutig bestimmtes $\alpha_0(g)$ gibt, sodass diese Bedingung erfüllt ist.

Nun können wir den Ausdruck aber nicht mehr weiter vereinfachen und müssen deshalb auf eine numerische Berechnung von $E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+} \right]$ mittels Monte-Carlo Simulation zurückgreifen. Hierbei wird wieder ein Stichprobenumfang von $N = 30.000$ und die antithetische Varianzreduktion verwendet. Das heißt, $V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ wird berechnet als

$$\hat{V}_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = \frac{e^{gT}}{2N} \sum_{j=1}^N \left(e^{-\beta_j^+(T)} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_j^+(t) - g)^+} + e^{-\beta_j^-(T)} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_j^-(t) - g)^+} \right).$$

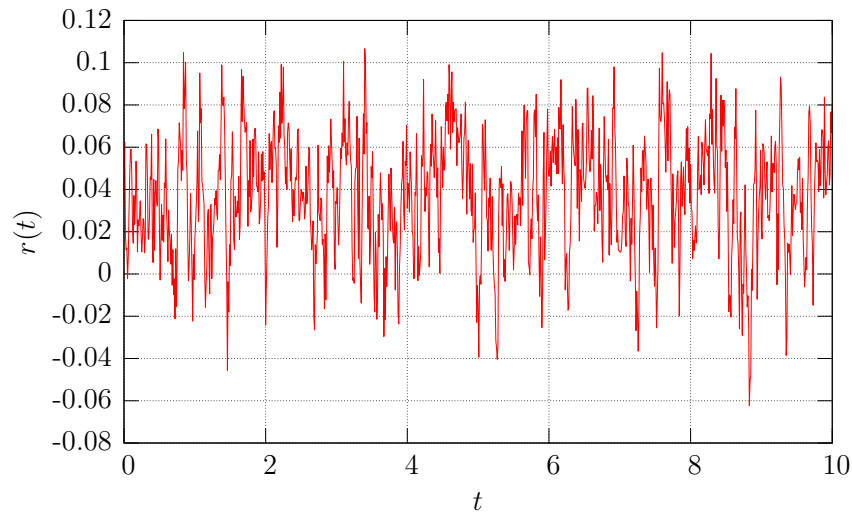


Abbildung 4.3: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für die short rate r_t mit $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = -0.5$.

In Abb. 4.3 sieht man einen Pfad des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses für die short rate.

Die Abb. 4.4 bis 4.6 zeigen exemplarisch je drei Pfade von (r_t^+, r_t^-) , (δ_t^+, δ_t^-) bzw. (β_t^+, β_t^-) , ausgewählt an den Stellen $t = 0, 1, \dots, 10$, wie sie in der Simulation verwendet werden.

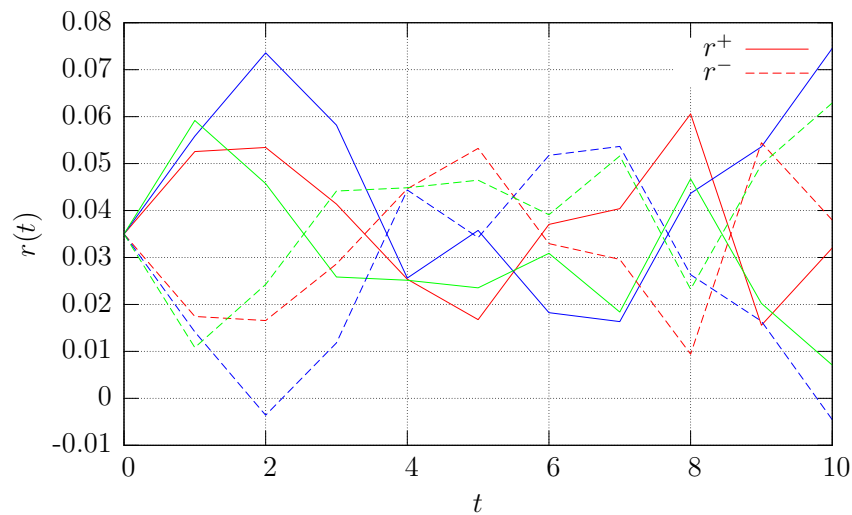


Abbildung 4.4: 3 Pfade von r_t für $t \in \{0, \dots, 10\}$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = -0.5$.

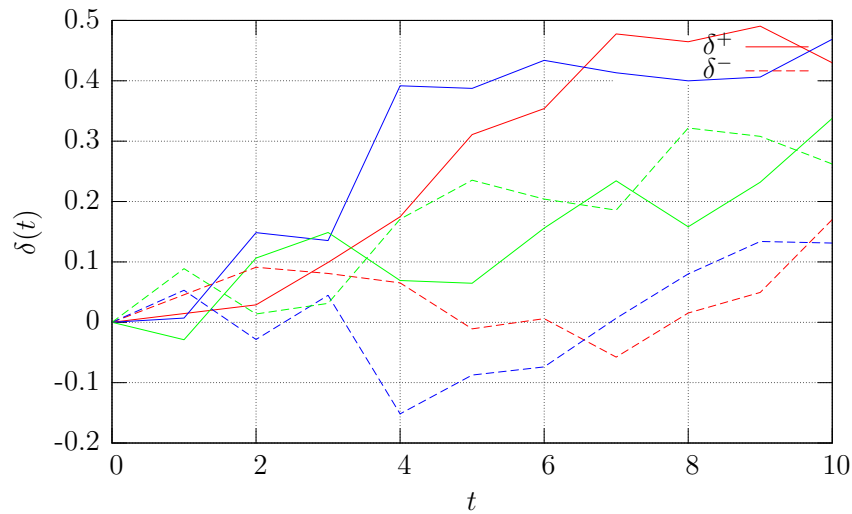


Abbildung 4.5: 3 Pfade von δ_t für $t \in \{0, \dots, 10\}$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = -0.5$.

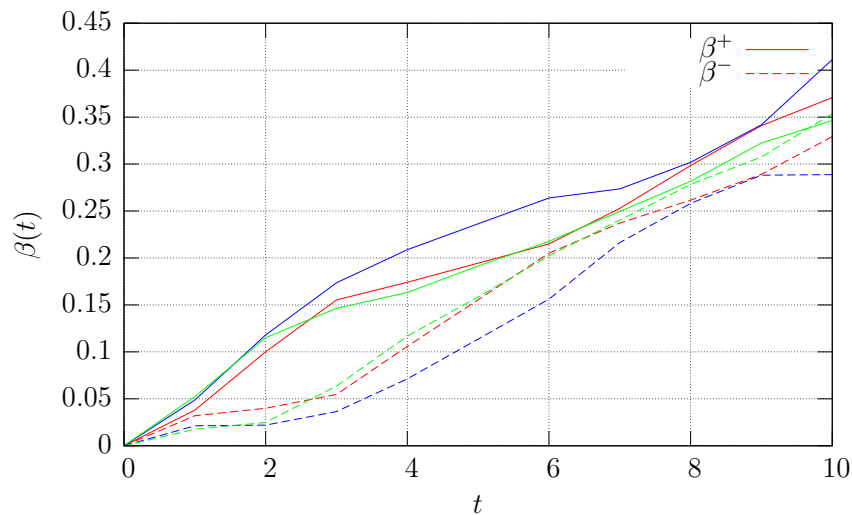


Abbildung 4.6: 3 Pfade von β_t für $t \in \{0, \dots, 10\}$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = -0.5$.

Für ein vorgegebenes g wird mittels eines Newton-Rhapson Verfahrens ein α gesucht, sodass $\hat{V}_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = 1$ erfüllt ist. Die Ableitung von $e^{-\beta_T} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+}$ nach α wird hierzu berechnet als

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\beta_T} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+} = e^{-\beta_T} \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+ e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+}.$$

In Abb. 4.7 sieht man, dass keine starke Abhängigkeit von ρ besteht. Für $\alpha = 0$ fällt der

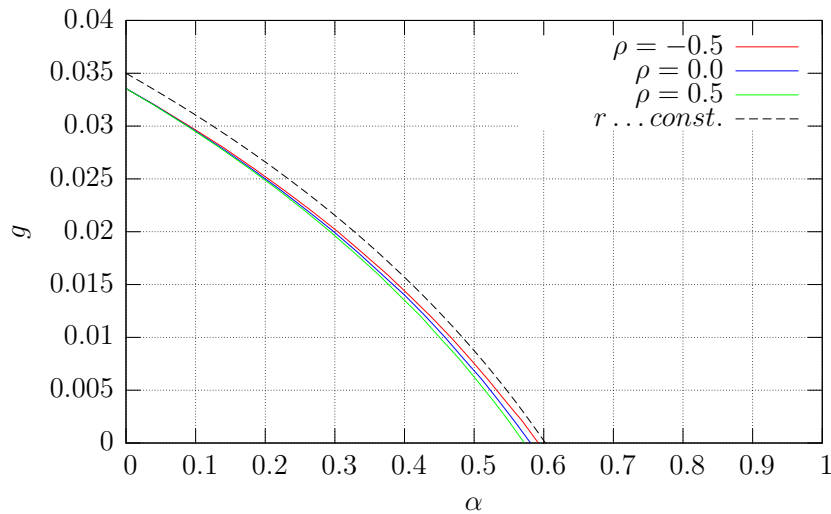


Abbildung 4.7: Kombinationen von α und g für die ein Vertrag fair ist bei $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$.

Term $\sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+$ weg. In diesem Fall lautet die Bedingung für einen fairen Vertrag

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = e^{gT} E_{\mathbb{Q}} [e^{\beta T}] = e^{gT} P(0, T) = 1.$$

Da $P(t, T)$ nicht von ρ abhängt ergibt sich mit $P(0, 10) = 0.7151$ und $\alpha = 0$ für alle ρ die Lösung $g = 0.0335$. Mit steigendem α wird der Einfluss von $\sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+$ und damit von ρ größer, weshalb sich die Graphen gegen Ende erkennbarer unterscheiden. Da unter der Annahme einer konstanten Zinsrate von $r = 3.5\%$ im Fall $\alpha = 0$ ein Vertrag mit $g = r$ also mit $g = 3.5\%$ fair ist, liegen die Ergebnisse für den Fall einer stochastischen Zinsrate unter jenem für den Fall einer konstanten Zinsrate. Hierbei verläuft die Kurve für $\rho = 0.5$ fast parallel zu der für r konstant, während dieser die Kurve für $\rho = -0.5$ gegen Ende sehr nahe kommt. Die Unterschiede sind aber in allen Fällen äußerst gering.

Unter der Annahme einer konstanten Zinsrate r sind wir auf eine Bedingung für faire Verträge gekommen, die unabhängig von der Laufzeit T war. In den Abb. 4.8 bis 4.10 werden für $\rho = 0$, $\rho = 0.5$ und $\rho = -0.5$ die Simulationen für $T = 10$ mit jenen für $T = 25$ verglichen. Man sieht, dass auch in dieser Simulation nur marginale Unterschiede bestehen.

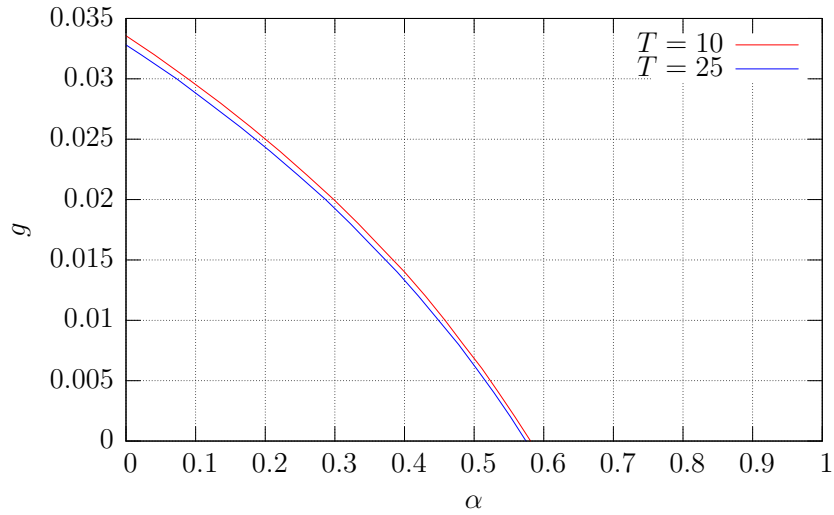


Abbildung 4.8: Vergleich der Simulationen von $T = 10$ und $T = 25$ für $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = 0$.

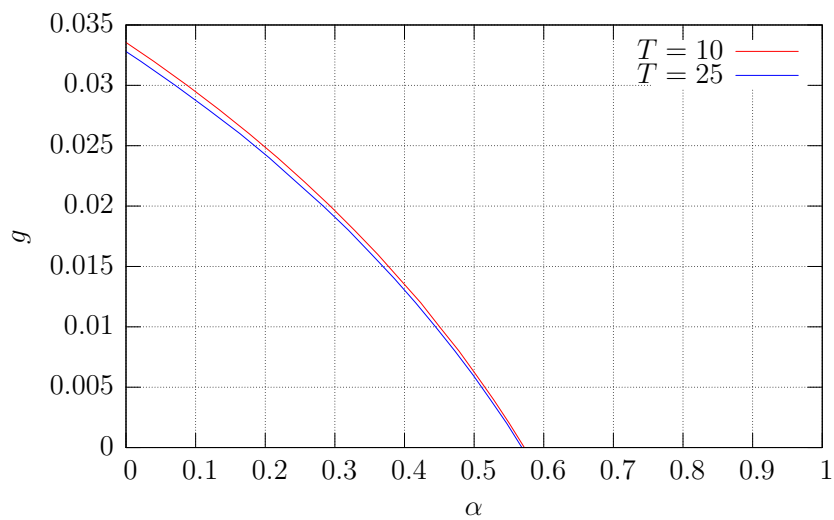


Abbildung 4.9: Vergleich der Simulationen von $T = 10$ und $T = 25$ für $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = 0.5$.

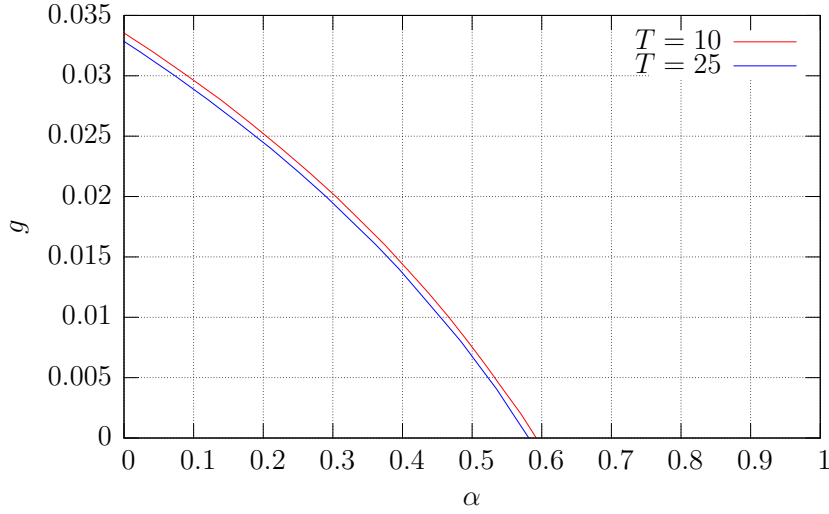


Abbildung 4.10: Vergleich der Simulationen von $T = 10$ und $T = 25$ für $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\kappa = 0.30723$, $\theta = 0.035$ und $\rho = -0.5$.

4.2.2 Verträge mit Zwischenkonto

Unter der Annahme $g_t = g$ für $t = 1 \dots T$ ist

$$\begin{aligned} A_T &= X e^{\sum_{t=1}^T g + \alpha(\delta_t - g)^+}, \\ C_T &= \sum_{t=1}^T \left(e^{\beta(\delta_t - g)^+} - 1 \right) A_{t-1} \quad \text{und} \\ B_T &= X e^{\sum_{t=1}^T \delta_t} - A_T - C_T. \end{aligned}$$

$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right)$ ist wie in (4.2) gegeben durch

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) = e^{gT} E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} e^{\alpha \sum_{t=1}^T (\delta_t - g)^+} \right].$$

$V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right)$ ist nun

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right) &= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} \frac{B_T^+}{X} \right] \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\beta T} \left(e^{\sum_{t=1}^T \delta_t} - e^{\sum_{t=1}^T g + \alpha(\delta_t - g)^+} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{t=1}^T e^{\sum_{j=1}^{t-1} (g + \alpha(\delta_j - g)^+)} \left(e^{\beta(\delta_t - g)^+} - 1 \right) \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

Nach allem was wir aus Kapitel 2.2.2 schon wissen, muss für eine fairen Vertrag die Bedingung

$$V_0 \left(\frac{A_T}{X} \right) + V_0 \left(\frac{B_T^+}{X} \right) = 1$$

erfüllt sein, wobei es für ein Tupel (g, α) mit $\alpha < \alpha_0(g)$ ein eindeutig bestimmtes β gibt, sodass (g, α, β) diese Bedingung erfüllt.

Auch hier muss wieder auf eine numerische Berechnung von $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$ und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ mittels Monte-Carlo Simulation zurückgegriffen werden, die abermals mit einem Stichprobenumfang von $N = 30.000$ und antithetischer Varianzreduktion durchgeführt wird. Eine Nullstelle von $F(\beta) = V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) + V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) - 1$ wird mittel eines Newton-Rhapson Verfahrens ermittelt, wobei die Ableitung numerisch durch $\frac{G(\beta+h)-G(\beta)}{h}$ mit $h = 10^{-5}$ berechnet wird.

In den folgenden Grafiken werden exemplarisch für $g = 2\%$ und $\sigma_\delta = 10\%$ die Simulationsergebnisse für $\rho \in \{-0.5, 0.0, 0.5\}$ mit dem Ergebnis für den Fall einer konstanten Zinsrate r verglichen.

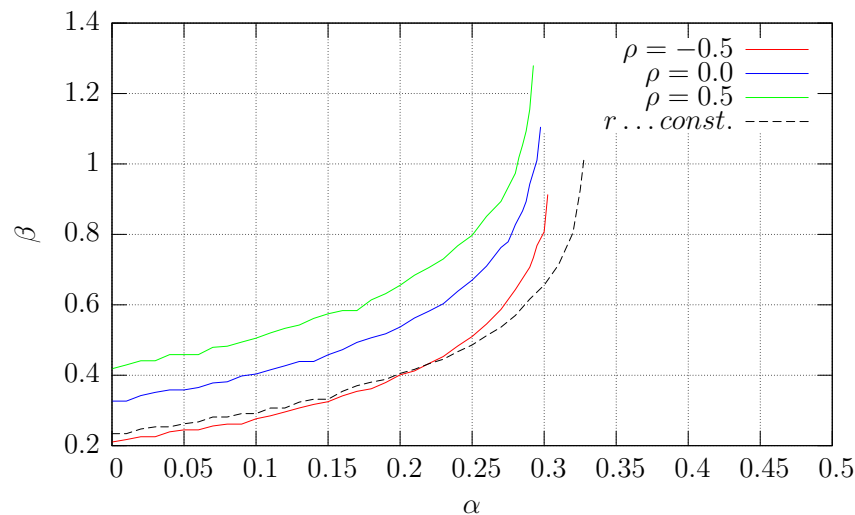


Abbildung 4.11: Kombinationen von α und β für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

Aus den Abb. 4.11 und 4.12 sieht man, dass der Anteil der Versicherung an einer zusätzlichen Auszahlung größer wird, wenn ρ steigt. Da bei einer positiven Korrelation mit steigenden (fallenden) Zinsen der Return des Fonds ebenfalls steigt (fällt), gibt es eine größere Schwankung in den Auszahlungen. Diese größere Schwankung muss der Versicherung mit einem höheren Anteil am überschüssigen Gewinn abgegolten werden. Deshalb steigt β an, wenn die Korrelation vom Negativen ins Positive steigt.

Nun würde man annehmen, dass mit $\rho = 0$ der Fall einer konstanten Zinsrate r am ehesten wiedergegeben wird. Tatsächlich geschieht dies aber, wie schon beim Ein-Perioden Modell, bei $\rho = -0.5$, was auf eine „versteckte“ positive Korrelation zwischen Zinsrate und Fond-Return hindeutet. Diese kommt davon, wie r_t in den Drift-Term von δ_t , welcher $r_t - \frac{\sigma_\delta^2}{2}$ ist, einfließt. Denn damit ist die Gesamtkorrelation im allgemeinen höher als durch den Korrelationskoeffizienten angegeben.

Deswegen werden die Ergebnisse, die unter der Annahme einer konstanten Zinsrate r erzielt wurden im Fall einer stochastischen Zinsrate mit einer Korrelation von $\rho = -0.5$

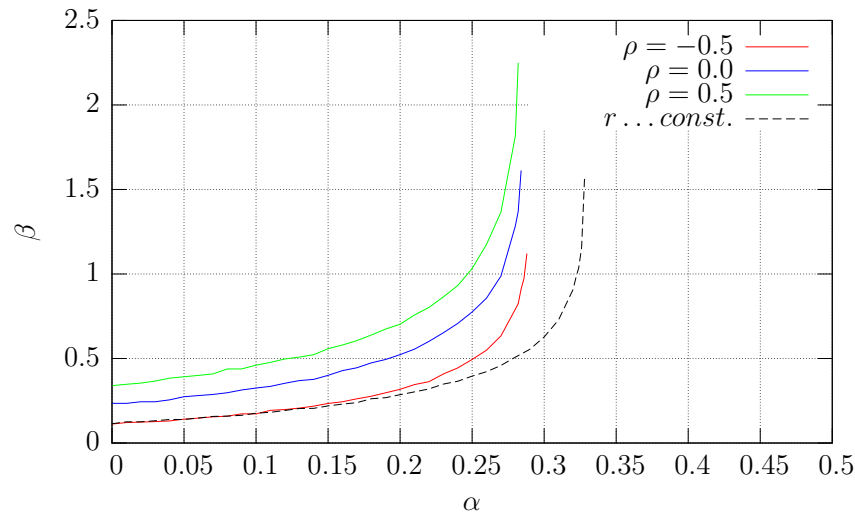


Abbildung 4.12: Kombinationen von α und β für die ein Vertrag fair ist bei $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

in etwa erreicht. Die Abweichung wird dabei mit größer werdendem α , vor allem in Verbindung mit einer längeren Laufzeit, ebenfalls größer, da mit α auch der Einfluss der Terme $(\delta_t - g)^+$ steigt. Dass die Abweichung bei längerer Laufzeit gegen Ende immer größer wird, könnte auch an den Daten, die der Schätzung der Parameter κ und θ zugrunde gelegt wurden, liegen.

Für $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ ergibt sich in den Abb. 4.13 und 4.14 das gleiche Bild wie für β , was daher kommt, dass $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right) = V_0\left(\frac{C_T}{X}\right)$ direkt von β abhängt.

Bei $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ sehen wir in Abb. 4.15 und 4.16, dass einerseits keine starke Abhängigkeit von ρ besteht und andererseits der Graph für den Fall einer konstanten Zinsrate r fast parallel darüber verläuft. Das liegt daran, dass

$$V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) = 1 - V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$$

gilt und $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$, wie beim Modell ohne Zwischenkonto schon beschrieben, keine starke Abhängigkeit von ρ besitzt. Da $P(0, T) < e^{-rT}$ ist unterscheiden sich die Graphen nur durch den Startwert bei $\alpha = 0$ und verlaufen dann nahezu parallel.

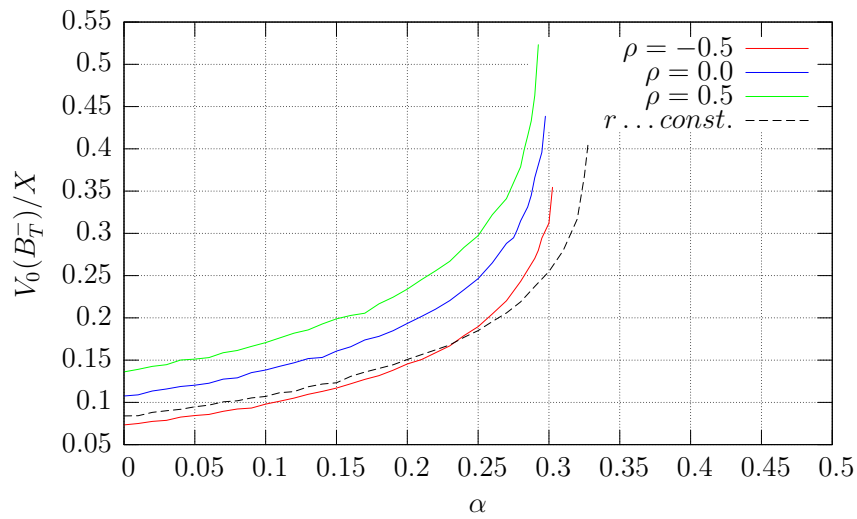


Abbildung 4.13: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

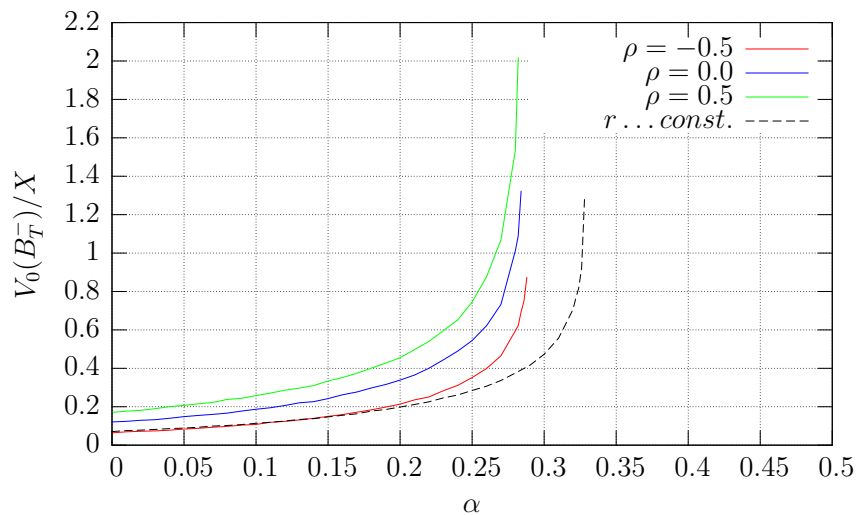


Abbildung 4.14: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

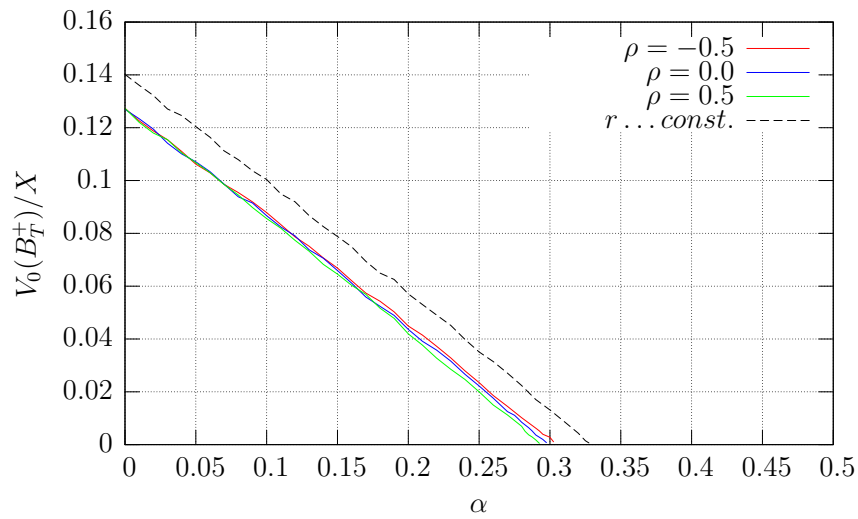


Abbildung 4.15: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

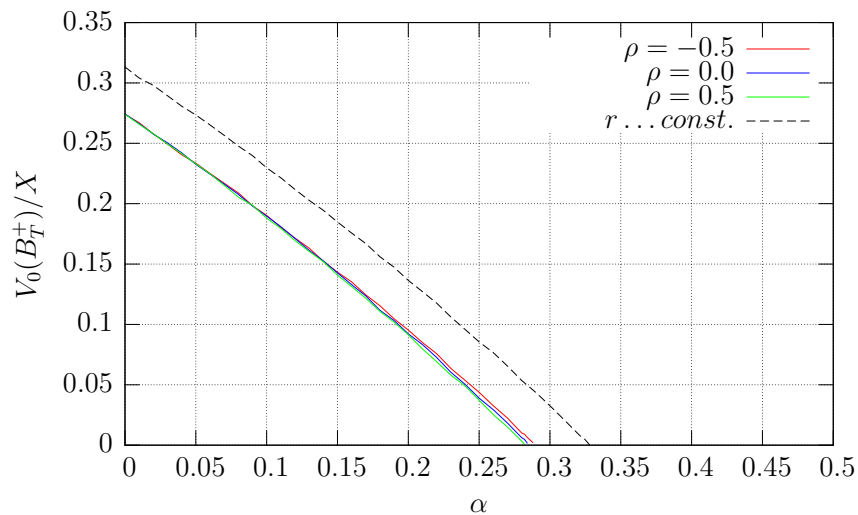


Abbildung 4.16: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

4.3 Verträge mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto

Die Guthaben der Konten A , B , C und Y zum Zeitpunkt t sind wie in (2.17) gegeben durch

$$Y_t = X e^{\sum_{i=1}^t \max\left\{g, \ln\left(1 + (\alpha + \beta)\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)\right\}} \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta \in [0, 1]$$

$$A_t = X e^{\sum_{i=1}^t \max\left\{g, \ln\left(1 + \alpha\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - \gamma\right)\right)\right\}} e^{-t\xi} \quad \xi \in [0, 1]$$

$$C_t = Y_t - A_t \quad \text{mit} \quad C_0 = 0$$

$$B_t = B_{t-1} + S_t - S_{t-1} - Y_t + Y_{t-1} \quad \text{mit} \quad S_t = S_{t-1} e^{\delta t} \quad \text{und} \quad B_0 = 0.$$

Die Bedingung für einen fairen Vertrag ist wiederum

$$V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) + V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) = 1$$

mit

$$V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\beta T} \frac{A_T}{X}\right] \quad \text{und}$$

$$V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) = E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\beta T} \frac{B_T^+}{X}\right].$$

Zum Auffinden von Kombinationen von α und β bzw. Kombinationen von α und ξ , mit denen diese Bedingung erfüllt ist, wurden abermals eine numerische Berechnung von $E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\beta T} \frac{A_T}{X}\right]$ und $E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\beta T} \frac{B_T^+}{X}\right]$ mittels einer Monte-Carlo Simulation und ein Newton-Rhaphson Verfahren zum Auffinden einer Nullstelle von $F(\beta) = V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) + V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) - 1$ bzw. $F(\xi) = V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) + V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) - 1$ verwendet.

Wir wollen nun wieder exemplarisch für $g = 2\%$ und $\sigma_{\delta} = 10\%$ die Ergebnisse für $\rho \in \{-0.5, 0.0, 0.5\}$ mit jenen für den Fall einer konstanten Zinsrate r vergleichen.

4.3.1 Indirekte Methode

In den Abb. 4.17 und 4.18 können wir wie schon in Kapitel 4.2.2 beobachten, dass der Fall einer konstanten Zinsrate r am ehesten mit $\rho = -0.5$ erreicht wird, was wieder auf eine „versteckte“ positive Korrelation zurückzuführen ist.

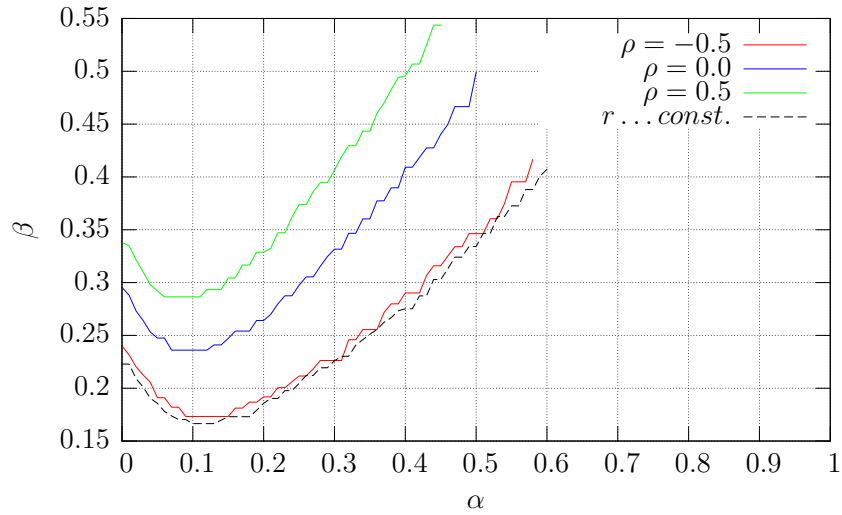


Abbildung 4.17: Kombinationen von α und β für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

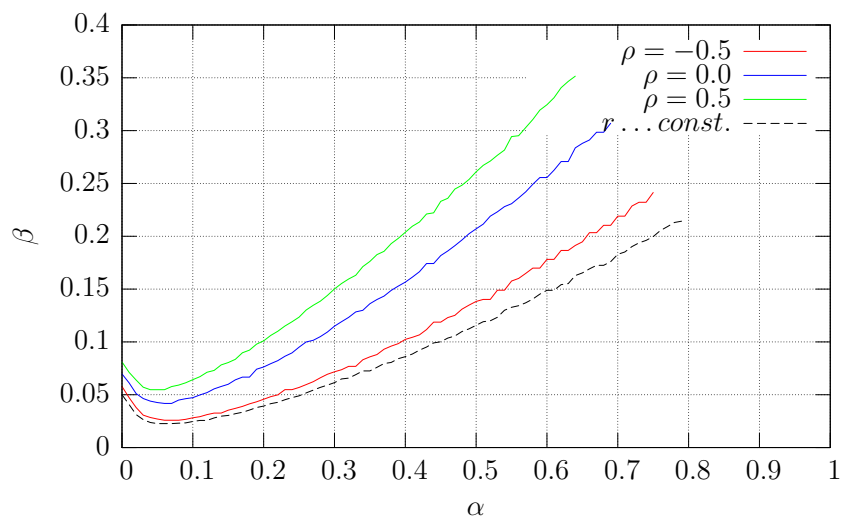


Abbildung 4.18: Kombinationen von α und β für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

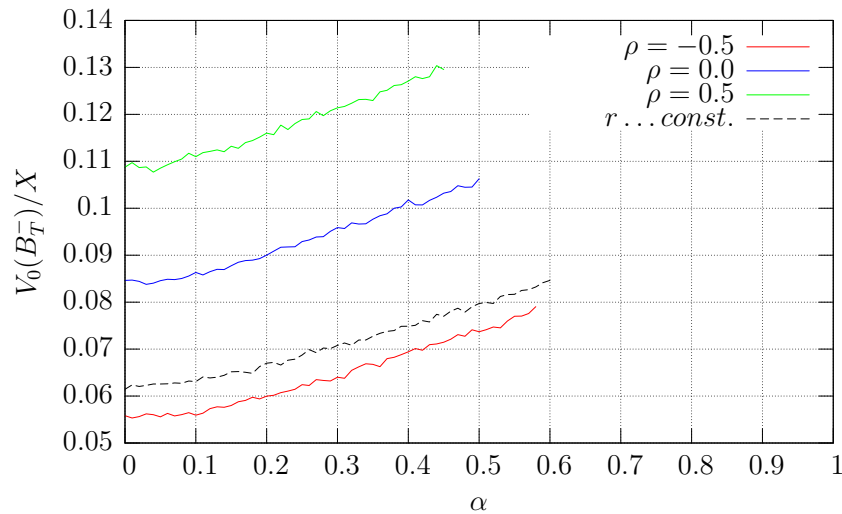


Abbildung 4.19: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

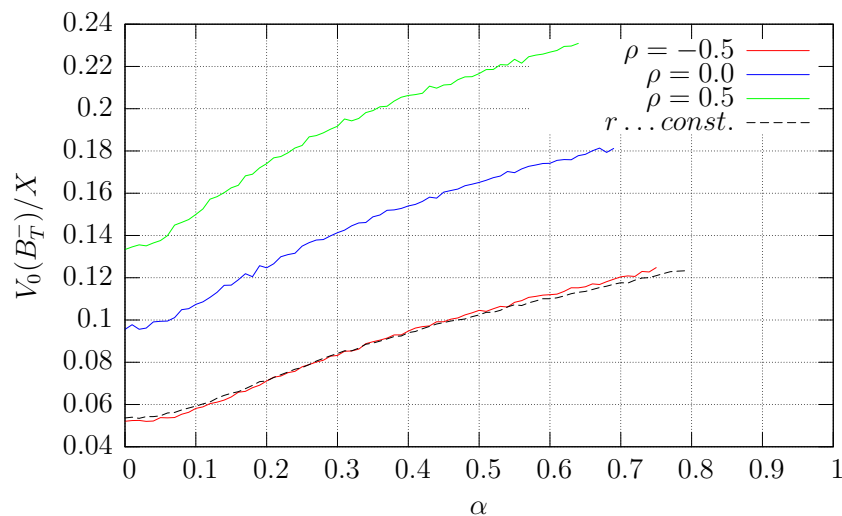


Abbildung 4.20: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

Dasselbe Bild bietet sich in den Abb. 4.19 und 4.20 bei $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right) = V_0\left(\frac{C_T}{X}\right)$. Hier entspricht die Situation bei $\rho = -0.5$ fast exakt jener im Fall einer konstanten Zinsrate. Auch bei $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ haben wir die gleiche Situation wie beim Modell in Kapitel 4.2.2. Da $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) = 1 - V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$ ist und $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$ auch mit größer werdendem α nur sehr schwach von ρ abhängt sind die Graphen fast identisch. Nahezu parallel darüber verläuft der Graph für den Fall einer konstanten Zinsrate r . Die Ursache liegt wieder darin, dass für $\alpha = 0$ bei r konstant $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = e^{-rT}e^{gT}$ und bei einem stochastisch modelliertem

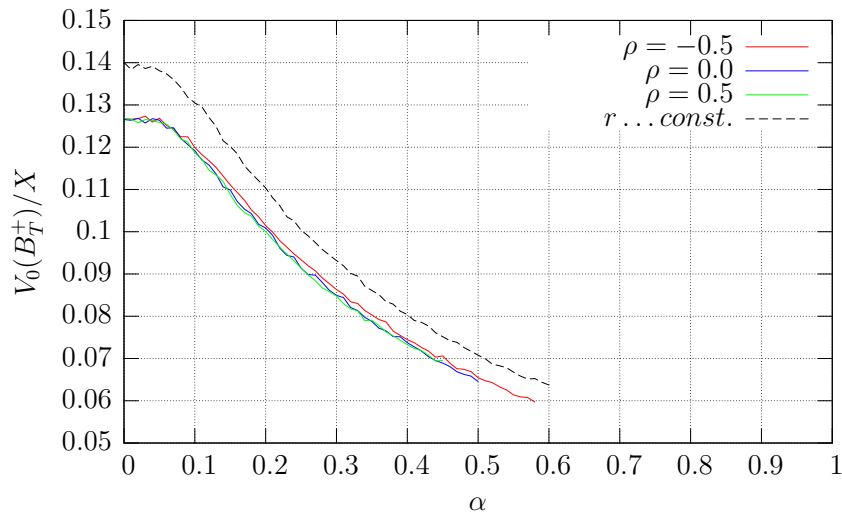


Abbildung 4.21: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

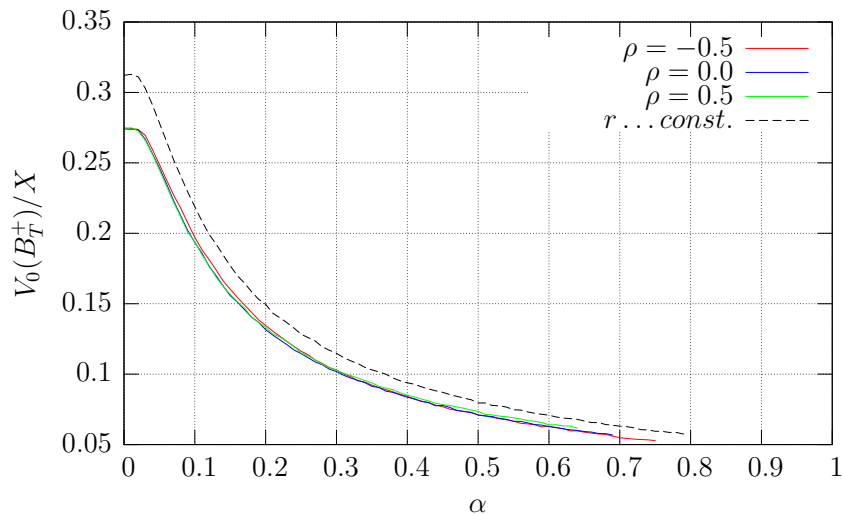


Abbildung 4.22: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

$r_t V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = P(0, T)e^{gT}$ ist. Da $e^{-rT} < P(0, T)$ ist, ist $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $\alpha = 0$ bei konstant angenommenem r größer.

4.3.2 Direkte Methode

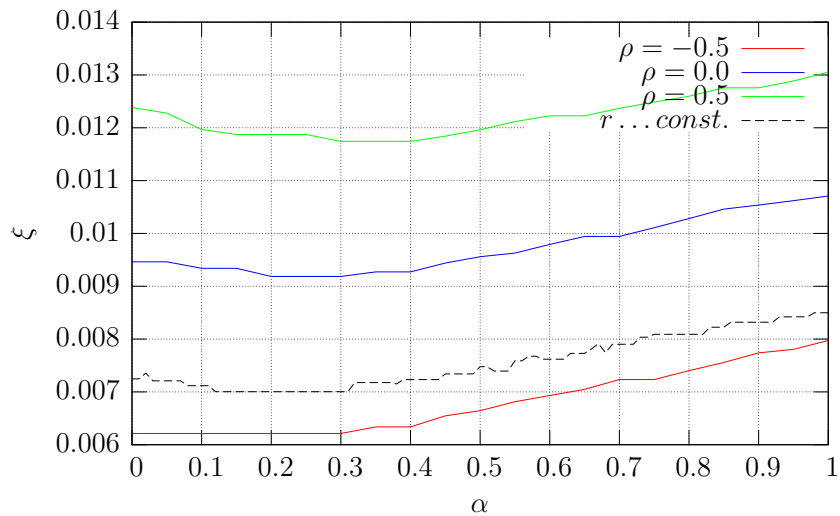


Abbildung 4.23: Kombinationen von α und ξ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

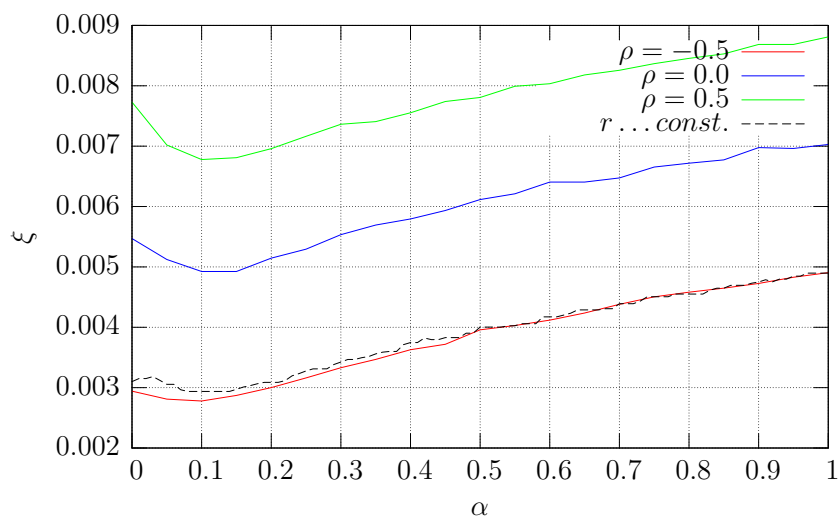


Abbildung 4.24: Kombinationen von α und ξ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

Auch bei der Methode, wo die Versicherung durch jährliche Einhebung einer fixen Abgabe ξ zu Einnahmen kommt, wird, wie man in den Abb. 4.23 und 4.24 sehen kann, für eine Korrelation von $\rho = -0.5$ der Fall einer konstanten Zinsrate r am ehesten erreicht. Bei $T = 25$ ist sogar kaum ein Unterschied vorhanden. Da ξ die Einnahmen der Versicherung bestimmt, ergibt sich dasselbe Bild in Abb. 4.25 und 4.26 auch für $V_0 \left(\frac{B_T^-}{X} \right) = V_0 \left(\frac{C_T}{X} \right)$.

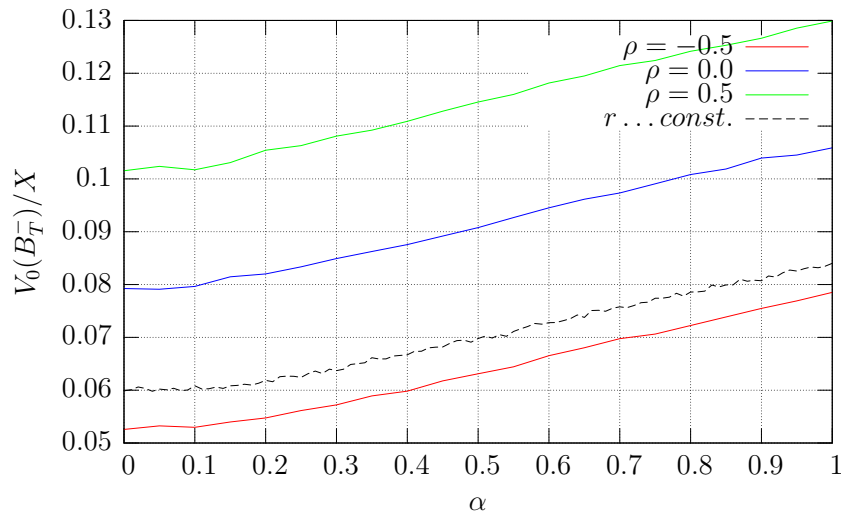


Abbildung 4.25: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

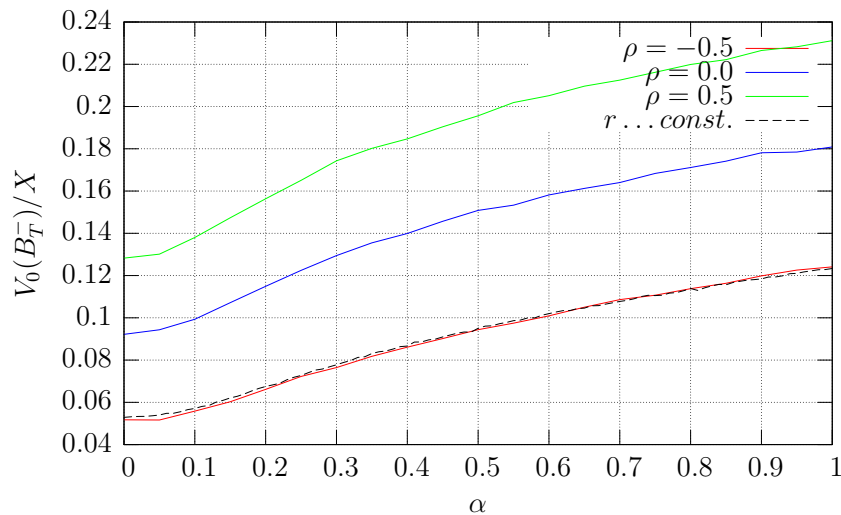


Abbildung 4.26: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^-}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

In den Abb. 4.27 und 4.28 betrachten wir $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$. Es besteht nun eine stärkere Abhängigkeit von ρ . Diese kann wie folgt erklärt werden: Das Guthaben am Konto des Kunden hängt von der Höhe der Abgabe ξ , die er jährlich zu bezahlen hat, ab. Steigt ξ , muss der Kunde mehr bezahlen was sein Guthaben schmälert. Also sinkt auch $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$ wenn ξ steigt. Da ξ steigt wenn ρ steigt bedeutet das wiederum einen Anstieg von $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right) = 1 - V_0\left(\frac{A_T}{X}\right)$. Deshalb hängt $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ bei dieser Vertragsform stärker von ρ ab.

Was auffällt ist, dass hier $\rho = 0$ dem Fall einer konstanten Zinsrate sehr nahe kommt. Das liegt daran, dass sich bei $\alpha = 0$ für $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = P(0, T)e^{T(g-\xi)}$ bzw. $V_0\left(\frac{A_T}{X}\right) = e^{-rT}e^{T(g-\xi)}$ ergibt und wegen $e^{-rT} < P(0, T)$ im stochastischen Fall ξ größer werden muss, damit sich die Werte annähern. Mit unserer Wahl der Parameter ist Gleichheit mit dem ξ für $\rho = 0$ am ehesten gegeben.

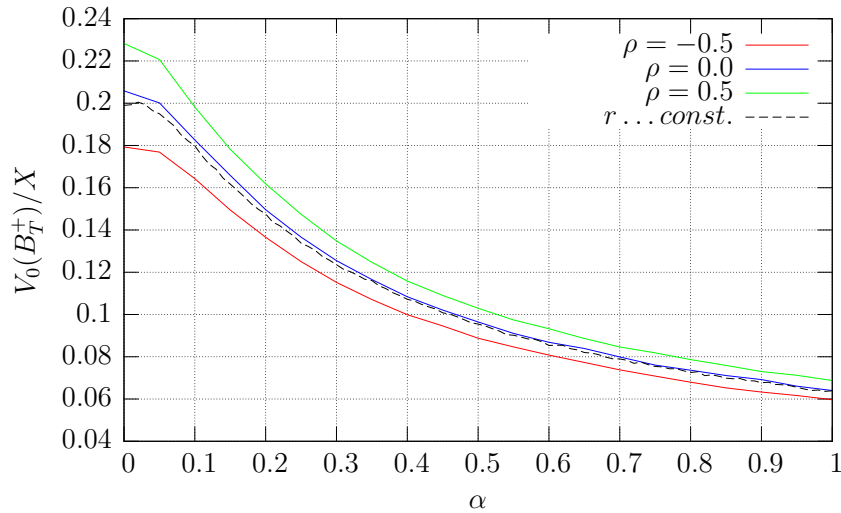


Abbildung 4.27: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 10$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

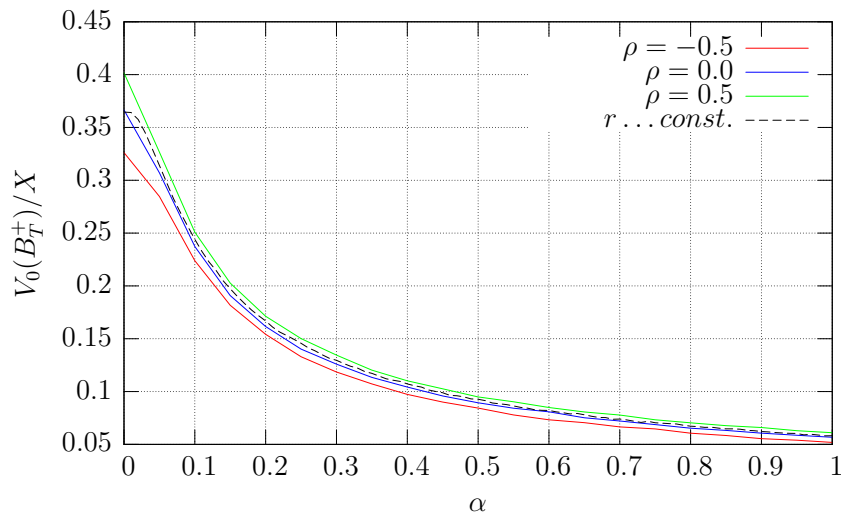


Abbildung 4.28: Kombinationen von α und $V_0\left(\frac{B_T^+}{X}\right)$ für $g = 2\%$, $T = 25$, $r_0 = 3.5\%$, $\sigma_r = 2.258\%$, $\sigma_\delta = 10\%$, $\kappa = 0.30723$ und $\theta = 0.035$

C-Code der Simulationen

Alle Simulationen greifen auf den Header-File „funktionen.h“ zurück. In diesem sind Funktionen implementiert, die in allen Modellen benötigt werden:

```
#ifndef _FUNKTIONEN_H
#define _FUNKTIONEN_H

//Im folgenden wird die Verteilungsfunktion der N(0,1)-Verteilung
//mit einer Genauigkeit von 7.5*10^-8 berechnet
//*****
double dichte(double x) //Dichte der N(0,1)-Verteilung
{
    return (1/sqrt(2*M_PI))*pow(M_E,(-x*x/2));
}

double phi(double z)
{
    double p=0.2316419;
    double b1=0.319381530;
    double b2=-0.356563782;
    double b3=1.781477937;
    double b4=-1.821255978;
    double b5=1.330274429;

    double t=1/(1+p*z);

    return(1-dichte(z)*(b1*t+b2*pow(t,2)+b3*pow(t,3)+b4*pow(t,4)+b5*pow(t,5)));
}

//Die folgenden zwei Funktionen erzeugen N(0,1)-verteilte Zufallszahlen
//*****
double drand(unsigned long *seed)
{
    *seed *= 0X278DDE6DL;          /* z(i+1)=a*z(i) (mod 2**32)*/
    return(2.32830643653870e-10 * *seed); /* u(i) = z(i)*2**(-32)*/
}

double nsc(unsigned long *seed)
```

```
{
    double u,v,x,s;
    static double x2;
    static double two_pi = 2.0 * M_PI;
    static char f = 1;

    f = -f;
    if (f > 0) return(x2);
    u = drand(seed);
    v = drand(seed);
    s = sqrt(-2.0 * log(u));
    x2 = s * sin(two_pi * v);
    return(s * cos(two_pi * v));
}

/*****
double max(double a, double b)
{
    if (a>b)
        return(a);
    else
        return(b);
}

// "max0" gibt das Maximum von "0" und dem übergebenen Wert zurück
/*****
double max0(double a)
{
    return(max(0,a));
}

// "betrag" gibt den Betrag einer Zahl zurück
/*****
double betrag(double x)
{
    if(x>=0)
    {
        return(x);
    }
    else
    {
        return(-x);
    }
}
```

```

//Berechnung der Varianz-Kovarianzmatrix
//*****
double berechne_covmatrix(double kappa, double sigma_r, double sigma_d,
                           double rho, int x, int y, double **covmatrix)
{
    double var_r, var_delta, var_beta;
    double cov_r_delta, cov_r_beta, cov_delta_beta;

    var_r = pow(sigma_r,2)/(2*kappa)*(1-pow(M_E,-2*kappa*(x-y)));
    var_delta = ((pow((sigma_r/kappa),2) + pow(sigma_d,2)
        + (2*sigma_r*sigma_d*rho/kappa))*(x-y) - (2*sigma_r/pow(kappa,2))
        *(sigma_r/kappa + sigma_d*rho)*(1-pow(M_E,-kappa*(x-y)))
        + (pow(sigma_r,2)/(2*pow(kappa,3)))*(1 - pow(M_E,-2*kappa*(x-y))));
    var_beta = pow((sigma_r/kappa),2)*(x-y - (2/kappa)*(1 -
        pow(M_E,-kappa*(x-y)))) + 1/(2*kappa)*(1 - pow(M_E,-2*kappa*(x-y))));

    cov_r_delta = pow((sigma_r/kappa),2)*(1 - pow(M_E,-kappa*(x-y))) -
        (pow(sigma_r,2)/(2*pow(kappa,2)))*(1 - pow(M_E,-2*kappa*(x-y)))
        + (sigma_r*sigma_d*rho/kappa)*(1 - pow(M_E,-kappa*(x-y)));
    cov_r_beta = (pow(sigma_r,2)/kappa)*((1/kappa)*(1 - pow(M_E,-kappa*(x-y)))
        - (1/(2*kappa))*(1 - pow(M_E,-2*kappa*(x-y))));
    cov_delta_beta = pow((sigma_r/kappa),2)*(x-y - (2/kappa)
        *(1 - pow(M_E,-kappa*(x-y)))) + (1/(2*kappa))*(1 - pow(M_E,
        -2*kappa*(x-y))) + (sigma_r*sigma_d*rho/kappa)*(1 - (1/kappa)
        *(1 - pow(M_E,-kappa*(x-y))));

    covmatrix[0][0] = var_r;
    covmatrix[0][1] = cov_r_delta;
    covmatrix[0][2] = cov_r_beta;
    covmatrix[1][0] = cov_r_delta;
    covmatrix[1][1] = var_delta;
    covmatrix[1][2] = cov_delta_beta;
    covmatrix[2][0] = cov_r_beta;
    covmatrix[2][1] = cov_delta_beta;
    covmatrix[2][2] = var_beta;

    return(**covmatrix);
}

//Choleski-Zerlegung einer 3x3 Matrix
//*****
double zerlege(double **matrix, double **c)
{
    c[0][0] = sqrt(matrix[0][0]);
    c[1][0] = matrix[0][1]/c[0][0];

```

```

c[2][0] = matrix[0][2]/c[0][0];
c[1][1] = sqrt(matrix[1][1]-pow(c[1][0],2));
c[2][1] = (1/c[1][1])*(matrix[2][1] - c[2][0]*c[1][0]);
c[2][2] = sqrt(matrix[2][2] - pow(c[2][0],2) - pow(c[2][1],2));
c[0][1] = 0.0;
c[0][2] = 0.0;
c[1][2] = 0.0;

return(**c);
}

//Generiert einen 3-dimensional normalverteilten Zufallsvektor
//*****
double zahlenNd3(double **c, double *zahlen)
{
    int i, j;
    double zahlenN01[3];
    unsigned long calc_seed = rand();

    for(i=0;i<3;i++)
    {
        zahlenN01[i] = nsc(&calc_seed);

        for(j=0;j<=i;j++)
        {
            zahlen[i] = zahlen[i] + c[i][j]*zahlenN01[j];
            zahlen[i+3] = zahlen[i+3] - c[i][j]*zahlenN01[j];
        }
    }
    return(*zahlen);
}
#endif

```

Die Routine zur Erzeugung der $N(0,1)$ -verteilten Zufallszahlen wurde aus [20] entnommen. Der Algorithmus für die Choleski-Zerlegung einer 3×3 -Matrix und für die Erzeugung eines 3-dimensional normalverteilten Zufallsvektors stammt aus [10].

Im nun folgenden Code für die Simulationen der einzelnen Vertragsmodelle wurden die Definitionen der Variablen sowie die Ein- und Ausgabe der Werte aus Platzgründen weggelassen. Solche Stellen sind mit „...“ gekennzeichnet.

Simulationen mit konstanter Zinsrate

Jährliche Aufteilung eines Überschusses

```
#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
```

```

#define GRID 0.00001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation(int T, double alpha, double beta, double b, double g,
                 double sigma, double *zahlen, double *sim_erg)
{
    ...
    for(i=0;i<T;i++)
    {
        prod1 = prod1*exp(sigma*zahlen[i]);
        prod2 = prod2*exp(alpha*max0(b+sigma*zahlen[i]));
    }

    for(j=0;j<T;j++)
    {
        prod3=1.0;
        for(k=0;k<j;k++)
        {
            prod3=prod3*exp(g+alpha*max0(b+sigma*zahlen[k]));
        }
        sum = sum + prod3*(exp(beta*max0(b+sigma*zahlen[j]))-1);
    }
    BT = exp(T*(b+g))*prod1 - exp(g*T)*prod2 - sum;

    sim_erg[0]=max0(BT);
    sim_erg[1]=max0(-BT);

    return(*sim_erg);
}

//*****
void modell_2_mit_const(double r, double sigma, int T, double g,
                      FILE *output)
{
    ...
    srand( time(NULL) );
    calc_seed = rand();
    ...
    b=r-g-pow(sigma,2)/2;
    alpha = 0.00;
    beta = 0.02;

    do
    {
        do
        {

```

```
sum_B_plus = 0.0;
sum_B_minus = 0.0;
sum_B_plus2 = 0.0;
sum_B_minus2 = 0.0;
sum_B_plus_GRID = 0.0;
sum_B_plus_GRID2 = 0.0;

for(k=0;k<SIM;k++)
{
  for(i=0;i<T;i++)
  {
    zahlen[i] = nsc(&calc_seed);
    zahlen2[i] = -zahlen[i];
  }

  simulation(T, alpha, beta, b, g, sigma, zahlen, sim_erg);
  sum_B_plus = sum_B_plus + sim_erg[0];
  sum_B_minus = sum_B_minus + sim_erg[1];

  simulation(T, alpha, beta, b, g, sigma, zahlen2, sim_erg);
  sum_B_plus2 = sum_B_plus2 + sim_erg[0];
  sum_B_minus2 = sum_B_minus2 + sim_erg[1];

  simulation(T, alpha, beta+GRID, b, g, sigma, zahlen, sim_erg);
  sum_B_plus_GRID = sum_B_plus_GRID + sim_erg[0];

  simulation(T, alpha, beta+GRID, b, g, sigma, zahlen2, sim_erg);
  sum_B_plus_GRID2 = sum_B_plus_GRID2 + sim_erg[0];
}

d1=(r-g+alpha*pow(sigma,2))/sigma - sigma/2;
d2=(g-r)/sigma + sigma/2;
V_A = pow(exp((1-alpha)*(g-r-alpha*sigma*sigma/2))*phi(d1)
          + exp(g-r)*phi(d2),T);

V_B_plus = pow(M_E,-r*T)*(sum_B_plus + sum_B_plus2)/(2*SIM);
V_B_minus = pow(M_E,-r*T)*(sum_B_minus + sum_B_minus2)/(2*SIM);

V_B_plus_GRID = pow(M_E,-r*T)*(sum_B_plus_GRID
                       + sum_B_plus_GRID2)/(2*SIM);

Abl_num = (V_B_plus_GRID - V_B_plus)/GRID;

if((V_A + V_B_plus -1)/Abl_num < beta);
{
```



```

        beta = beta - (V_A + V_B_plus -1)/Abl_num;
    }
}
while(betrag(V_A + V_B_plus -1)>0.001);

if((V_A + V_B_plus -1)/Abl_num < beta);
{
    beta = beta + (V_A + V_B_plus -1)/Abl_num;
}
...

if(1-V_A > 0.1)
{
    alpha = alpha + 0.01;
}
else
{
    alpha = alpha + 0.001;
}
}
while(V_A <= 1);
}

//*****
int main()
{
    ...

    modell_2_mit_const(r, sigma, T, g, output);
}

```

Mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto

Indirekte Methode

```

#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
#define GRID 0.00001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation_modell_3_indirekt_const(double alpha, double beta,
        double gamma, double sigma, double r, double g, int T,
        double *zahlen, double *sim_erg)
{
    ...
    A[0]=1.0;
    B[0]=0.0;
    S[0]=1.0;

```

```

for(i=1;i<=T;i++)
{
  if(i>1)
  {
    zahlen_summe=zahlen_summe + zahlen[i-2];
    summe_delta=(i-1)*(r-sigma*sigma/2)+sigma*zahlen_summe;
  }

  S[i]=S[i-1]*pow(M_E, max(g, log(1+(alpha+beta)*(B[i-1]/S[i-1]
    -gamma)))));
  A[i]=A[i-1]*pow(M_E, max(g, log(1+alpha*(B[i-1]/S[i-1]-gamma)))));
  B[i]=B[i-1]+pow(M_E,summe_delta)*(pow(M_E, r-sigma*sigma/2
    + sigma*zahlen[i-1])-1)-S[i]+S[i-1];
}
sim_erg[0]=A[T];
sim_erg[1]=B[T];

return(*sim_erg);
}

//*****
void modell_3_indirekt_const(double r, double sigma, int T, double g,
    double gamma, FILE *output)
{
  ...
  srand( time(NULL) );
  calc_seed = rand();

  alpha=0.0;
  beta=0.05;
  do
  {
    do
    {
      sum_A=0.0;
      sum_A_abl=0.0;
      sum_B_plus=0.0;
      sum_B_minus=0.0;
      sum_B_plus_abl=0.0;

      sum_A2=0.0;
      sum_A_abl2=0.0;
      sum_B_plus2=0.0;
      sum_B_minus2=0.0;
    }
  }
}

```

```
sum_B_plus_abl2=0.0;

for(i=1;i<=SIM;i++)
{
  for(m=0;m<T;m++)
  {
    zahlen[m]=nsc(&calc_seed);
    zahlen2[m]=-zahlen[m];
  }
  simulation_modell_3_indirekt_const(alpha, beta, gamma, sigma,
                                     r, g, T, zahlen, sim_erg);

  sum_A=sum_A + sim_erg[0];
  sum_B_plus=sum_B_plus + max0(sim_erg[1]);
  sum_B_minus=sum_B_minus + max0(-sim_erg[1]);

  simulation_modell_3_indirekt_const(alpha, beta, gamma, sigma,
                                     r, g, T, zahlen2, sim_erg);

  sum_A2=sum_A2 + sim_erg[0];
  sum_B_plus2=sum_B_plus2 + max0(sim_erg[1]);
  sum_B_minus2=sum_B_minus2 + max0(-sim_erg[1]);

  simulation_modell_3_indirekt_const(alpha, beta+GRID, gamma, sigma,
                                     r, g, T, zahlen, sim_erg);

  sum_A_abl=sum_A_abl + sim_erg[0];
  sum_B_plus_abl=sum_B_plus_abl + max0(sim_erg[1]);

  simulation_modell_3_indirekt_const(alpha, beta+GRID, gamma, sigma,
                                     r, g, T, zahlen2, sim_erg);

  sum_A_abl2=sum_A_abl2 + sim_erg[0];
  sum_B_plus_abl2=sum_B_plus_abl2 + max0(sim_erg[1]);
}

A_sim=(sum_A+sum_A2)/2/SIM;
B_plus_sim=(sum_B_plus+sum_B_plus2)/2/SIM;
B_minus_sim=(sum_B_minus+sum_B_minus2)/2/SIM;

A_abl_num=((sum_A_abl+sum_A_abl2)/2/SIM-A_sim)/GRID;
B_plus_abl_num=((sum_B_plus_abl+sum_B_plus_abl2)
/2/SIM-B_plus_sim)/GRID;

V_A=pow(M_E,-r*T)*A_sim;
V_B_plus=pow(M_E,-r*T)*B_plus_sim;
V_B_minus=pow(M_E,-r*T)*B_minus_sim;

fair=(V_A+V_B_plus-1)/(A_abl_num+B_plus_abl_num);
```

```

        beta=beta-fair;
    }
    while(betrag(V_A+V_B_plus-1)>0.001);

    beta=beta+fair;
    ...
    alpha = alpha + 0.01;
}
while(alpha+beta<=1.02);
...
}

//*****
int main()
{
    ...

    modell_3_indirekt_const(r, sigma, T, g, gamma, output);
}

```

Direkte Methode

```

#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
#define GRID 0.000001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation_modell_3_direkt_const(double alpha, double xi,
                                        double gamma, double sigma, double r, double g,
                                        int T, double *zahlen, double *sim_erg)
{
    ...
    A[0]=1.0;
    B[0]=0.0;
    S[0]=1.0;

    for(i=1;i<=T;i++)
    {
        if(i>1)
        {
            zahlen_summe=zahlen_summe + zahlen[i-2];
            summe_delta=(i-1)*(r-sigma*sigma/2)+sigma*zahlen_summe;
        }

        S[i]=S[i-1]*pow(M_E, max(g, log(1+(alpha)*(B[i-1]/S[i-1]-gamma))));
        A[i]=A[i-1]*pow(M_E, max(g, log(1+alpha*(B[i-1]/S[i-1]-gamma)))-xi);
        B[i]=B[i-1]+pow(M_E,summe_delta)*(pow(M_E, r-sigma*sigma/2

```

```
        + sigma*zahlen[i-1])-1)-S[i]+S[i-1];
    }

    for(j=0;j<T;j++)
    {
        maxima[j]=max(g, log(1+alpha*(B[j]/S[j]-gamma)));
    }

    for(k=0;k<T;k++)
    {
        summe_maxima = summe_maxima + maxima[k];
    }
    sim_erg[0]=A[T];
    sim_erg[1]=B[T];
    sim_erg[2]=-T*pow(M_E, summe_maxima)*pow(M_E,-T*xi);

    return(*sim_erg);
}

//*****
void modell_3_direkt_const(double r, double sigma, int T, double g,
                          double gamma, FILE *output)
{
    ...
    srand( time(NULL) );
    calc_seed = rand();

    alpha=0.0;
    xi=0.001;
    ...

    for(j=1;j<=101;j++)
    {
        do
        {
            sum_A=0.0;
            sum_B_plus=0.0;
            sum_B_minus=0.0;
            sum_A_abl=0.0;

            sum_A2=0.0;
            sum_B_plus2=0.0;
            sum_B_minus2=0.0;
            sum_A_abl2=0.0;
```

```

for(i=1;i<=SIM;i++)
{
  for(m=0;m<T;m++)
  {
    zahlen[m]=nsc(&calc_seed);
    zahlen2[m]=-zahlen[m];
  }
  simulation_modell_3_direkt_const(alpha, xi, gamma, sigma,
                                  r, g, T, zahlen, sim_erg);
  sum_A=sum_A + sim_erg[0];
  sum_B_plus=sum_B_plus + max0(sim_erg[1]);
  sum_B_minus=sum_B_minus + max0(-sim_erg[1]);
  sum_A_abl=sum_A_abl+sim_erg[2];

  simulation_modell_3_direkt_const(alpha, xi, gamma, sigma,
                                  r, g, T, zahlen2, sim_erg);

  sum_A2=sum_A2 + sim_erg[0];
  sum_B_plus2=sum_B_plus2 + max0(sim_erg[1]);
  sum_B_minus2=sum_B_minus2 + max0(-sim_erg[1]);
  sum_A_abl2=sum_A_abl2+sim_erg[2];
}

A_sim=(sum_A+sum_A2)/2/SIM;
B_plus_sim=(sum_B_plus+sum_B_plus2)/2/SIM;
B_minus_sim=(sum_B_minus+sum_B_minus2)/2/SIM;
A_abl_sim=(sum_A_abl+sum_A_abl2)/2/SIM;

V_A=pow(M_E,-r*T)*A_sim;
V_B_plus=pow(M_E,-r*T)*B_plus_sim;
V_B_minus=pow(M_E,-r*T)*B_minus_sim;

fair=(V_A+V_B_plus-1)/A_abl_sim;
xi=xi-fair;
}
while(betrag(V_A+V_B_plus-1)>0.001);

xi=xi+fair;
...
alpha = alpha + 0.01;
}
...
}

//*****
int main()

```

```

{
    ...
    modell_3_direkt_const(r, sigma, T, g, gamma, output);
}

```

Simulationen mit stochastischer Zinsrate

Jährliche Aufteilung eines Überschusses

Ohne Zwischenkonto

```

#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
//*****
double simulation(int T, double alpha, double g, double *delta,
                 double *sim_erg)
{
    ...
    for(i=1;i<=T;i++)
    {
        summe_maxima = summe_maxima + max0(delta[i]-g);
    }

    sim_erg[0]=pow(M_E,alpha*summe_maxima);
    sim_erg[1]=summe_maxima*pow(M_E,alpha*summe_maxima);

    return(*sim_erg);
}

//*****
int main()
{
    ...
    r[0] = r_start;
    r2[0] = r_start;
    beta[0] = 0.0;
    beta2[0] = 0.0;
    delta[0] = 0.0;
    delta2[0] = 0.0;

    ...

    srand( time(NULL) );

    do
    {

```

```
do
{
    sum_A = 0.0;
    sum_A2 = 0.0;
    sum_A_ab1 = 0.0;
    sum_A_ab12 = 0.0;

    for(k=0;k<SIM;k++)
    {
        //Simulieren der T-dim. Vektoren r, delta und beta
        //-----
        for(i=1;i<=T;i++)
        {
            xt=i;
            xs=i-1;

            berechne_covmatrix(kappa, sigma_r, sigma_d, rho, xt, xs,
                                covmatrix);
            zerlege(covmatrix, c);

            erw_r = (r[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
            erw_delta = (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))*(r[xs]
                - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))*(xt-xs);
            erw_beta = beta[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
                *(r[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

            erw_r2 = (r2[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
            erw_delta2 = (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))*(r2[xs]
                - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))*(xt-xs);
            erw_beta2 = beta2[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
                *(r2[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

            zahlen[0] = erw_r;
            zahlen[1] = erw_delta;
            zahlen[2] = erw_beta;
            zahlen[3] = erw_r2;
            zahlen[4] = erw_delta2;
            zahlen[5] = erw_beta2;

            zahlenNd3(c, zahlen);

            r[i] = zahlen[0];
            delta[i] = zahlen[1];
            beta[i] = zahlen[2];
            r2[i] = zahlen[3];
        }
    }
}
```



```

        delta2[i] = zahlen[4];
        beta2[i] = zahlen[5];
    }
    //-----
    simulation(T, alpha, g, delta, sim_erg);
    sum_A = sum_A + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
    sum_A_abl = sum_A_abl + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[1];

    simulation(T, alpha, g, delta2, sim_erg);
    sum_A2 = sum_A2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
    sum_A_abl2 = sum_A_abl2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[1];
}
V_A = pow(M_E,g*T)*(sum_A + sum_A2)/(2*SIM);
A_abl = pow(M_E,g*T)*(sum_A_abl + sum_A_abl2)/(2*SIM);

    alpha = alpha - (V_A - 1)/A_abl;
}
while(betrag(V_A - 1)>0.001);

    alpha = alpha + (V_A - 1)/A_abl;
    ...
    g = g + 0.002;
}
while(alpha>=0);
    ...
}

```

Mit Zwischenkonto

```

#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
#define GRID 0.00001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation(int T, double alpha, double beta_anteil, double g,
                 double *delta, double *sim_erg)
{
    ...
    for(k=1;k<=T;k++)
    {
        summe_delta = summe_delta + delta[k];
        summe_maxima = summe_maxima + max0(delta[k]-g);
    }
    AT = pow(M_E, g*T)*pow(M_E,alpha*summe_maxima);

    for(i=1;i<=T;i++)
    {

```

```
    summe=0.0;
    for(j=1;j<i;j++)
    {
        summe = summe + (g + alpha*max0(delta[j] - g));
    }

    CT = CT+pow(M_E,summe)*(pow(M_E,beta_anteil*max0(delta[i]-g))-1);
}
BT = pow(M_E,summe_delta) - AT - CT;

sim_erg[0]=AT;
sim_erg[1]=max0(BT);
sim_erg[2]=max0(-BT);

return(*sim_erg);
}

//*****
int main()
{
    ...
    r[0] = r_start;
    r2[0] = r_start;
    delta[0] = 0.0;
    delta2[0] = 0.0;
    beta[0] = 0.0;
    beta2[0] = 0.0;

    ...
    srand( time(NULL) );

    do
    {
        do
        {
            sum_A = 0.0;
            sum_A2 = 0.0;
            sum_B_plus = 0.0;
            sum_B_plus2 = 0.0;
            sum_B_minus = 0.0;
            sum_B_minus2 = 0.0;
            sum_A_GRID = 0.0;
            sum_A_GRID2 = 0.0;
            sum_B_plus_GRID = 0.0;
            sum_B_plus_GRID2 = 0.0;
```

```

for(k=0;k<SIM;k++)
{
  //Simulieren der T-dim. Vektoren r, delta und beta
  //-----
  for(i=1;i<=T;i++)
  {
    xt=i;
    xs=i-1;

    berechne_covmatrix(kappa, sigma_r, sigma_d, rho, xt, xs,
                       covmatrix);
    zerlege(covmatrix, c);

    erw_r = (r[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
    erw_delta = (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))*(r[xs]
        - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))*(xt-xs);
    erw_beta = beta[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa
        *(xt-xs)))*(r[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

    erw_r2 = (r2[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
    erw_delta2 = (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))*(r2[xs]
        - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))*(xt-xs);
    erw_beta2 = beta2[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa
        *(xt-xs)))*(r2[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

    zahlen[0] = erw_r;
    zahlen[1] = erw_delta;
    zahlen[2] = erw_beta;
    zahlen[3] = erw_r2;
    zahlen[4] = erw_delta2;
    zahlen[5] = erw_beta2;

    zahlenNd3(c, zahlen);

    r[i] = zahlen[0];
    delta[i] = zahlen[1];
    beta[i] = zahlen[2];
    r2[i] = zahlen[3];
    delta2[i] = zahlen[4];
    beta2[i] = zahlen[5];
  }
  //-----

simulation(T, alpha, beta_anteil, g, delta, sim_erg);

```

```
sum_A = sum_A + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus = sum_B_plus + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[1];
sum_B_minus = sum_B_minus + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[2];

simulation(T, alpha, beta_anteil, g, delta2, sim_erg);
sum_A2 = sum_A2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus2 = sum_B_plus2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[1];
sum_B_minus2 = sum_B_minus2 + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[2];

simulation(T, alpha, beta_anteil+GRID, g, delta, sim_erg);
sum_A_GRID = sum_A_GRID + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus_GRID = sum_B_plus_GRID + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[1];

simulation(T, alpha, beta_anteil+GRID, g, delta2, sim_erg);
sum_A_GRID2 = sum_A_GRID2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus_GRID2 = sum_B_plus_GRID2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[1];
}

V_A = (sum_A + sum_A2)/(2*SIM);
V_B_plus = (sum_B_plus + sum_B_plus2)/(2*SIM);
V_B_minus = (sum_B_minus + sum_B_minus2)/(2*SIM);

V_A_GRID = (sum_A_GRID + sum_A_GRID2)/(2*SIM);
V_B_plus_GRID = (sum_B_plus_GRID + sum_B_plus_GRID2)/(2*SIM);

Abl_num = (V_A_GRID - V_A)/GRID + (V_B_plus_GRID - V_B_plus)/GRID;

beta_anteil = beta_anteil - (V_A + V_B_plus -1)/Abl_num;

}
while(betrag(V_A + V_B_plus -1)>0.001);

beta_anteil = beta_anteil + (V_A + V_B_plus -1)/Abl_num;
...
if(V_A < 0.98)
{
    alpha = alpha + 0.01;
}
else
{
    alpha = alpha + 0.002;
}
}
while(V_A<=1);
...
```

```
}

```

Mit Berücksichtigung des Guthabens am Zwischenkonto

Indirekte Methode

```
#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
#define GRID 0.00001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation(int T, double alpha, double g, double gamma,
                 double beta_anteil, double *delta, double *sim_erg)
{
    ...
    A[0] = 1.0;
    B[0] = 0.0;
    S[0] = 1.0;
    X[0] = 1.0;

    for(i=1;i<=T;i++)
    {
        maxima_1[i-1] = max(g, log(1 + (alpha+beta_anteil)*(B[i-1]/S[i-1]
            - gamma)));
        summe_maxima_1 = summe_maxima_1 + maxima_1[i-1];
        maxima_2[i-1] = max(g, log(1 + alpha*(B[i-1]/S[i-1] - gamma)));
        summe_maxima_2 = summe_maxima_2 + maxima_2[i-1];

        S[i] = pow(M_E, summe_maxima_1);
        A[i] = pow(M_E, summe_maxima_2);
        X[i] = pow(M_E,delta[i]);
        B[i] = B[i-1] + X[i] - X[i-1] - S[i] + S[i-1];
    }
    sim_erg[0]=A[T];
    sim_erg[1]=B[T];

    return(*sim_erg);
}

//*****
int main()
{
    ...

    r[0] = r_start;
    r2[0] = r_start;
    delta[0] = 0.0;
    delta2[0] = 0.0;

```

```

beta[0] = 0.0;
beta2[0] = 0.0;

srand( time(NULL) );
...

do
{
    do
    {
        sum_A = 0.0;
        sum_B_plus = 0.0;
        sum_B_minus = 0.0;
        sum_A_GRID = 0.0;
        sum_B_plus_GRID = 0.0;

        sum_A2 = 0.0;
        sum_B_plus2 = 0.0;
        sum_B_minus2 = 0.0;
        sum_A_GRID2 = 0.0;
        sum_B_plus_GRID2 = 0.0;

        for(k=0;k<SIM;k++)
        {
            //Simulieren der T-dim. Vektoren r, delta und beta_anteil
            //-----
            for(i=1;i<=T;i++)
            {
                xt=i;
                xs=i-1;

                erw_r = (r[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
                erw_delta = delta[xs]+(1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
                    *(r[xs] - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))
                    *(xt-xs);
                erw_beta = beta[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa
                    *(xt-xs)))*(r[xs]-theta) + theta*(xt-xs);

                erw_r2 = (r2[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
                erw_delta2 = delta2[xs]+(1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
                    *(r2[xs] - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))
                    *(xt-xs);
                erw_beta2 = beta2[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa
                    *(xt-xs)))*(r2[xs]-theta) + theta*(xt-xs);
            }
        }
    }
}

```

```

    berechne_covmatrix(kappa, sigma_r, sigma_d, rho, xt, xs,
                      covmatrix);
    zerlege(covmatrix, c);

    zahlen[0] = erw_r;
    zahlen[1] = erw_delta;
    zahlen[2] = erw_beta;
    zahlen[3] = erw_r2;
    zahlen[4] = erw_delta2;
    zahlen[5] = erw_beta2;

    zahlenNd3(c, zahlen);

    r[i] = zahlen[0];
    delta[i] = zahlen[1];
    beta[i] = zahlen[2];
    r2[i] = zahlen[3];
    delta2[i] = zahlen[4];
    beta2[i] = zahlen[5];
}
//-----

simulation(T, alpha, g, gamma, beta_anteil, delta, sim_erg);
sum_A = sum_A + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus = sum_B_plus + max0(sim_erg[1]*pow(M_E,-beta[T]));
sum_B_minus = sum_B_minus + max0(-sim_erg[1]*pow(M_E,-beta[T]));

simulation(T, alpha, g, gamma, beta_anteil, delta2, sim_erg);
sum_A2 = sum_A2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus2 = sum_B_plus2 + max0(sim_erg[1]*pow(M_E,-beta2[T]));
sum_B_minus2 = sum_B_minus2 + max0(-sim_erg[1]*pow(M_E,-beta2[T]));

simulation(T, alpha, g, gamma, beta_anteil+GRID, delta, sim_erg);
sum_A_GRID = sum_A_GRID + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus_GRID = sum_B_plus_GRID + max0(pow(M_E,-beta[T])
                                         *sim_erg[1]);

simulation(T, alpha, g, gamma, beta_anteil+GRID, delta2, sim_erg);
sum_A_GRID2 = sum_A_GRID2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus_GRID2 = sum_B_plus_GRID2 + max0(pow(M_E,-beta2[T])
                                           *sim_erg[1]);
}

V_A = (sum_A + sum_A2)/2/SIM;
V_B_plus = (sum_B_plus + sum_B_plus2)/2/SIM;

```

```

V_B_minus = (sum_B_minus + sum_B_minus2)/2/SIM;

V_A_GRID = (sum_A_GRID + sum_A_GRID2)/(2*SIM);
V_B_plus_GRID = (sum_B_plus_GRID + sum_B_plus_GRID2)/(2*SIM);

Abl_num = (V_A_GRID - V_A)/GRID + (V_B_plus_GRID - V_B_plus)/GRID;
beta_anteil = beta_anteil - (V_A + V_B_plus - 1)/Abl_num;
}
while(betrag(V_A + V_B_plus - 1)>0.0009);

beta_anteil = beta_anteil + (V_A + V_B_plus - 1)/Abl_num;
...
if(V_A<0.99)
{
    alpha = alpha + 0.025;
}
else
{
    alpha = alpha + 0.01;
}
}
while(V_A<=1);
...
}

```

Direkte Methode

```

#define SIM 30000 //Anzahl der Simulationsdurchläufe
#define GRID 0.00001 // "h" für numerische Differentiation
//*****
double simulation(int T, double alpha, double g, double gamma,
                 double xi, double *delta, double *sim_erg)
{
    ...
    A[0] = 1.0;
    B[0] = 0.0;
    S[0] = 1.0;
    X[0] = 1.0;

    for(i=1;i<=T;i++)
    {
        maxima[i-1] = max(g, log(1 + alpha*(B[i-1]/S[i-1] - gamma)));
        summe_maxima = summe_maxima + maxima[i-1];

        S[i] = pow(M_E, summe_maxima);
        A[i] = pow(M_E, summe_maxima)*pow(M_E,-i*xi);
    }
}

```



```
    X[i] = pow(M_E,delta[i]);
    B[i] = B[i-1] + X[i] - X[i-1] - S[i] + S[i-1];
}
sim_erg[0]=A[T];
sim_erg[1]=B[T];
sim_erg[2]=-T*A[T];

return(*sim_erg);
}

/*****
int main()
{
    ...

    r[0] = r_start;
    r2[0] = r_start;
    delta[0] = 0.0;
    delta2[0] = 0.0;
    beta[0] = 0.0;
    beta2[0] = 0.0;

    ...

    srand( time(NULL) );

    for(j=1;j<=21;j++)
    {
        do
        {
            sum_A = 0.0;
            sum_B_plus = 0.0;
            sum_B_minus = 0.0;
            sum_A_abl = 0.0;

            sum_A2 = 0.0;
            sum_B_plus2 = 0.0;
            sum_B_minus2 = 0.0;
            sum_A_abl2 = 0.0;

            for(k=0;k<SIM;k++)
            {
                //Simulieren der T-dim. Vektoren r, delta und beta
                //-----
                for(i=1;i<=T;i++)
```

```

{
  xt=i;
  xs=i-1;

  erw_r = (r[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
  erw_delta = delta[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
    *(r[xs] - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))
    *(xt-xs);
  erw_beta = beta[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
    *(r[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

  erw_r2 = (r2[xs] - theta)*pow(M_E,-kappa*(xt-xs)) + theta;
  erw_delta2 = delta2[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
    *(r2[xs] - theta) + (theta - 0.5*pow(sigma_d,2))
    *(xt-xs);
  erw_beta2 = beta2[xs] + (1/kappa)*(1-pow(M_E,-kappa*(xt-xs)))
    *(r2[xs] - theta) + theta*(xt-xs);

  berechne_covmatrix(kappa, sigma_r, sigma_d, rho, xt, xs,
    covmatrix);
  zerlege(covmatrix, c);

  zahlen[0] = erw_r;
  zahlen[1] = erw_delta;
  zahlen[2] = erw_beta;
  zahlen[3] = erw_r2;
  zahlen[4] = erw_delta2;
  zahlen[5] = erw_beta2;

  zahlenNd3(c, zahlen);

  r[i] = zahlen[0];
  delta[i] = zahlen[1];
  beta[i] = zahlen[2];
  r2[i] = zahlen[3];
  delta2[i] = zahlen[4];
  beta2[i] = zahlen[5];
}
//-----

simulation(T, alpha, g, gamma, xi, delta, sim_erg);
sum_A = sum_A + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus = sum_B_plus + max0(sim_erg[1]*pow(M_E,-beta[T]));
sum_B_minus=sum_B_minus+max0(-sim_erg[1]*pow(M_E,-beta[T]));
sum_A_abl = sum_A_abl + pow(M_E,-beta[T])*sim_erg[2];

```

```
simulation(T, alpha, g, gamma, xi, delta2, sim_erg);
sum_A2 = sum_A2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[0];
sum_B_plus2=sum_B_plus2+ max0(sim_erg[1]*pow(M_E,-beta2[T]));
sum_B_minus2=sum_B_minus2+max0(-sim_erg[1]*pow(M_E,-beta2[T]));
sum_A_abl2 = sum_A_abl2 + pow(M_E,-beta2[T])*sim_erg[2];
}

V_A = (sum_A + sum_A2)/2/SIM;
V_B_plus = (sum_B_plus + sum_B_plus2)/2/SIM;
V_B_minus = (sum_B_minus + sum_B_minus2)/2/SIM;
A_abl = (sum_A_abl + sum_A_abl2)/2/SIM;

if(betrag(V_A + V_B_plus - 1)>0.004)
{
    xi_vorher=xi;
    xi = xi - ((V_A + V_B_plus - 1)/A_abl);
}
else
{
    if(betrag(V_A + V_B_plus - 1)<=0.004 &&
        betrag(V_A + V_B_plus - 1)>0.002)
    {
        xi_vorher=xi;
        xi = xi - ((V_A + V_B_plus - 1)/A_abl)/2;
    }
    else
    {
        xi_vorher=xi;
        xi = xi - ((V_A + V_B_plus - 1)/A_abl)/3;
    }
}
}
while(betrag(V_A + V_B_plus - 1)>0.0008);
...
alpha = alpha + 0.05;
}
...
}
```

Literaturverzeichnis

- [1] David F. Babbel and Craig Merrill. Economic valuation models for insurers. Technical Report 97-44, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania, October 1997. <http://ideas.repec.org/p/wop/pennin/97-44.html>.
- [2] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial Calculus*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [4] Phelim P. Boyle and Mary R. Hardy. Reserving for maturity guarantees: Two approaches. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21(2):113–127, 1997. <http://ideas.repec.org/a/eee/insuma/v21y1997i2p113-127.html>.
- [5] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models*. Springer, 2001.
- [6] Eric Briys and Francois de Varenne. On The Risk Of Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls. *The Journal of Risk and Insurance*, 64(4):673–694, 1997.
- [7] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 2:385–407, März 1985.
- [8] L. U. Dothan. On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6:59–69, 1978.
- [9] Damir Filipovic. *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*. Springer, 2001.
- [10] George S. Fishman. *Monte Carlo - Concepts, Algorithms and Applications*. Springer, 1996.
- [11] Anders Grosen and Peter Lochte Jorgensen. Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options and Bonus Policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26:35–57, 2000.
- [12] Mette Hansen and Kristian R. Miltersen. Minimum Rate of Return Guarantees: The Danish Case. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4:280–318, 2002.

- [13] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.
- [14] John C. Hull and Alan White. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [15] Jessica James and Nick Webber. *Interest Rate Modelling*. John Wiley & Sons, 2001.
- [16] Damien Lambertson and Bernard Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 1996.
- [17] Kristian R. Miltersen and Svein-Arne Persson. Pricing Rate of Return Guarantees in a Heath-Jarrow-Morton Framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(3):307–325, 1999.
- [18] Kristian R. Miltersen and Svein-Arne Persson. Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4:257–279, 2003.
- [19] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 1997.
- [20] F. Niederl and M. Piok. Win rand 1.0. <ftp://zid.tu-graz.ac.at/WinRand/>.
- [21] Antoon Pelsser. Pricing and hedging guaranteed annuity options via static option replication. <http://www.qgroup.org.au/SFMW/pelsser.pdf>, Oct. 2002.
- [22] Christian Schachner. Erweiterung des black-scholes modells: Stochastische volatilität. Master's thesis, Technische Universität Graz, 2003.
- [23] Thorsten Schmidt. Finanzmathematik. http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/FiMa2_final.pdf, Aug. 2004. Vorlesungsskriptum.
- [24] Thorsten Schmidt. Zinsstrukturmodelle. http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/FM_skriptWS04.05.pdf, Jan. 2005. Vorlesungsskriptum.
- [25] Irwin Vanderhoof and Edward I. Altman. *The Fair Value of Insurance Liabilities*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [26] Oldrich Vasicek. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, Aug. 1977.