

DISSERTATION

# **Die stochastische Modellierung des EEX-Spotmarktes und die Bewertung von Swing-Optionen**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen  
Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften

vorgelegt der  
Fakultät für Technische Mathematik und Technische Physik  
an der Technischen Universität Graz

DI Sigrid Gerlinde Kern

Institut für Statistik  
Technische Universität Graz  
Steyrergasse 17  
A-8010 Graz

Graz, Februar 2006



Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und mich sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

KERN SIGRID GERLINDE



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist das Ergebnis des Forschungsprojektes *Bewertung von Swing-Optionen* im Auftrag von Steweag-Steg, Abteilung Größtkunden und Trading, Portfolio- und Risikomanagement, an dem ich während meiner Anstellung am Institut für Statistik beteiligt war. An dieser Stelle möchte ich mich für die hervorragende Zusammenarbeit bei Herrn MBA DI Dr. Gerald Supper und MBA DI Dkfm. Friedrich Gruber bedanken.

Weiters gebührt besonderer Dank Univ.-Prof. DI Dr. Ernst Stadlober, Vorstand des Instituts für Statistik an der Technischen Universität Graz, für die ausgezeichnete fachliche Betreuung dieser Arbeit, den vielen nützlichen Ratschlägen und die Gewährung der für die Erstellung dieser Arbeit nötigen Freiheiten.

Auch möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. István Berkes für die Begutachtung dieser Arbeit bedanken.

An allen Mitgliedern des Instituts für Statistik übersende ich ebenfalls ein Danke für die anregenden Diskussionen, die mich sehr bereichert haben, die fruchtbare wissenschaftliche Atmosphäre und die wunderschöne Zeit.

Auch möchte ich der Landesstatistik Steiermark vor allem Hofrat Dr. Ernst Burger für die Gewährung eines längeren Urlaubs zur Fertigstellung dieser Arbeit ein Danke aussprechen.

Zum Schluss richte ich ein herzliches Dankeschön an meine Familie, die ich über alles liebe und schätze. Ohne sie wäre ich nie soweit gekommen. Ihr widme ich diese Arbeit.

---

# Kurzfassung

Der Strommarkt ist im Vergleich zu den Aktienmärkten noch sehr jung und besitzt das besondere Spezifikum, dass Strom nicht speicherbar ist. Durch die Liberalisierung des europäischen Strommarktes werden zunehmend Finanzprodukte wie Swing-Optionen und Multi-Exercise Optionen gehandelt und gewinnen als Instrumente zur Risikoabsicherung für Energiedienstleistungsunternehmen wie z.B. Steweag-Steg immer mehr an Bedeutung. Für die Bewertung solcher Produkte braucht man zunächst ein praktikables Spotpreismodell. Wir entwickeln daher ein stochastisches Spotpreismodell (auf Stundenbasis) für den EEX-Markt. Der Einsatz von linearen Zustandsraummodellen mit Regime-Switching erlaubt die Modellierung von Preisspikes unter Berücksichtigung von Einflussfaktoren wie Tagestypen, Tagesperioden und langfristigen Trends. Die Qualität unseres Ansatzes wird über eine Simulationsstudie überprüft.

Unser Preismodell ist schließlich die Grundlage für die Bewertung von Swing-Optionen. Im speziellen werden die Eigenschaften von vier bei der Steweag-Steg eingesetzten Multi-Exercise Optionen (virtuelle Speicherkraftwerke) mit sehr unterschiedlichen Restriktionen untersucht. Alle in der Arbeit benötigten Algorithmen sind in Form von Matlab-Codes realisiert.

# Abstract

Compared with stock markets the electricity market is a rather new development. A specific feature of it is that electric current is not storable. The liberalization of the European energy trade opened the door to financial derivatives as swing options and multi-exercise options which become more and more important as instruments for hedging the risk of traders like Steweag-Steg. In order to value such derivatives one needs a suitable description of the spot price. For the European Energy Exchange EEX we develop a stochastic model for the price on hourly basis having some remarkable characteristics. Linear state space models with regime switching allow the modeling of price spikes considering crucial factors as the type of the day, period of the day and long term trends. The quality of our approach is investigated by a simulation study.

Finally, our pricing model provides the basis for calculating the value of swing options. In particular, we analyze four multi-exercise options (virtual power stations with reservoir) with considerably differing restrictions. All algorithms used in the paper are implemented as Matlab programs.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lineare Zustandsraummodelle mit Regime-Switching</b>	<b>5</b>
2.1	Lineare Zustandsraummodelle . . . . .	5
2.1.1	Maximum-Likelihood-Schätzung von Zustandsraummodellen . . . . .	6
2.2	Markov-Switching Autoregression . . . . .	9
2.2.1	Maximum-Likelihood-Schätzung bei autoregressiven Modellen mit Markov-Switching . . . . .	10
2.3	Lineare Zustandsraummodelle mit Regime-Switching . . . . .	13
2.3.1	Maximum-Likelihood-Schätzung - Approximation von [31] . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Der EEX-Spotmarkt</b>	<b>23</b>
3.1	Der Preismechanismus am EEX-Spotmarkt . . . . .	23
3.1.1	Die Preisermittlung beim geschlossenen Auktionshandel . . . . .	24
3.1.2	Der fortlaufende Handel . . . . .	26
3.2	Die Charakteristika des Spotpreises . . . . .	27
3.2.1	Die Nachfrage . . . . .	32
3.2.2	Das Angebot . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Modellierung von Strommärkten und Bewertung von Derivativen</b>	<b>39</b>
4.1	Spotpreismodelle . . . . .	39
4.1.1	Modellierung der Saisonalität . . . . .	39
4.1.2	Mean Reversion . . . . .	40
4.1.3	Zeitabhängige Volatilität . . . . .	42
4.1.4	Modellierung von Preisspikes . . . . .	44
4.1.5	Langfristige Schwankungen . . . . .	45
4.2	Die Bewertung von Stromderivaten . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Modellierung des EEX-Spotpreises für die Preisfestsetzung von Stromderivaten</b>	<b>51</b>
5.1	Die Hauptkomponentenmethode . . . . .	53
5.2	Das allgemeine Modell . . . . .	55
5.3	Die Modellierung des Bedarfs . . . . .	56
5.3.1	Die stochastischen Komponenten $R_t^L$ und $\epsilon_t^L$ . . . . .	59
5.4	Ermittlung des Gestaltparameters der Angebotskurve . . . . .	67
5.5	Die Modellierung des Angebotes . . . . .	69
5.5.1	Die stochastischen Komponenten $R_t^B$ , $Y_t$ und $\epsilon_t^B$ . . . . .	71
5.6	Die Performance des Preismodells - Eine Simulationsstudie . . . . .	86

<b>6 Die Swing-Option</b>	<b>107</b>
6.1 Die mathematische Formulierung . . . . .	107
6.2 Existenz einer optimalen Lösung . . . . .	111
6.3 Berechnung der optimalen Lösung . . . . .	117
6.3.1 Die Rückwärtsinduktion . . . . .	117
6.4 Approximation . . . . .	118
6.4.1 Der Longstaff und Schwartz Algorithmus . . . . .	119
6.4.2 Adaptierung des Longstaff und Schwartz Algorithmus auf mehrfach ausübbarer Verträge . . . . .	121
6.5 Anwendungen . . . . .	124
6.5.1 Die einfache Swing-Option . . . . .	126
6.5.2 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Minimal- und Maximalständen . .	132
6.5.3 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Restriktionen bei der Ausübung . .	137
6.5.4 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Wochenrestriktionen . . . . .	140
6.5.5 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Ausübungsverboten . . . . .	148
<b>A Komponenten der Nachfrage- und Angebotsseite</b>	<b>159</b>

# Tabellenverzeichnis

3.1	Anteil der Energieträger in Deutschland 2002 . . . . .	36
5.1	Die geschätzten Parameter der stochastischen Komponenten $R_t^L(i), i = 1, 2, 3$ .	60
5.2	Die geschätzten Parameter $\hat{\sigma}_h$ der Störgröße $\epsilon_t^L$ bezogen auf $\hat{\sigma}_{\max}^L$ für $h =$ $1, \dots, 24$ . . . . .	65
5.3	Parameter des Nichtarbeitstagsprozesses - Normalzustand $N_t^0$ . . . . .	77
5.4	Parameter des Nichtarbeitstagsprozesses - Spikezustand $N_t^1$ . . . . .	77
5.5	Parameter des Schalters $E_t^0$ für den Nichtarbeitstagsprozess . . . . .	77
5.6	Parameter des Arbeitstagsprozesses - Normalzustand $A_t^0$ . . . . .	78
5.7	Parameter des Arbeitstagsprozesses - Spikezustand $A_t^1$ . . . . .	78
5.8	Parameter des Schalters $E_t^1$ für den Arbeitstagsprozess . . . . .	78
5.9	Schätzung des Parameters $\hat{\sigma}_Y^2$ für verschiedene Lieferperioden (Q: Quartal, J: Jahr) . . . . .	83
5.10	Die geschätzten Parameter $\hat{\sigma}_h^2$ von $\epsilon_t^B, h = 1, \dots, 24$ . . . . .	84
6.1	Der Preis der Swingoption für $M$ Ausübungsrechte . . . . .	128
6.2	Die obere Schranke des Preises der Swingoption für $M$ Ausübungsrechte . . .	128
6.3	Wöchentliche Aufstockung des virtuellen Speichers . . . . .	133
6.4	Preis der Swing-Option in Abhängigkeit von der Gesamtausübungsmenge . . .	153
6.5	Preis/ $P_0$ der Swing-Option in Abhängigkeit von der Zahl der Ausübungsverbote	153



# Abbildungsverzeichnis

3.1	Ermittlung des Gleichgewichtspreises . . . . .	25
3.2	Der EEX-Spotmarkt vom 16.06.2001 bis 30.04.2003, links: Preis auf 200 EUR/MWh beschränkt und rechts: gesamte Skala . . . . .	28
3.3	Preisspike am 07.01.2003 . . . . .	28
3.4	Die Spotpreise vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 unterteilt nach Jahreszeiten für Arbeitstage: Frühling (162 Tage), Sommer (176 Tage), Herbst (188 Tage) und Winter (176 Tage) . . . . .	29
3.5	Die Spotpreise vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 unterteilt nach Jahreszeiten für Nichtarbeitstage: Frühling (83 Tage), Sommer (85 Tage), Herbst (85 Tage) und Winter (94 Tage) . . . . .	30
3.6	Korrelationskoeffizienten zur Illustration der Abhängigkeit der Stunden für Ar- beitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 162, Sommer 176, Herbst 188 und Winter 176 . . . . .	31
3.7	Korrelationskoeffizienten zur Illustration der Abhängigkeit der Stunden für Nicht- arbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 83, Sommer 85, Herbst 85 und Winter 94 . . . . .	31
3.8	Die empirische Autokorrelationsfunktion des EEX-Spotpreises auf Stundenba- sis für 3 Tage (links) und für mehr als 3 Wochen (rechts) . . . . .	32
3.9	Völlig unelastische Nachfrage . . . . .	33
3.10	Der Zusammenhang zwischen den Spotpreisen und den Netzübergabewerten für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 . . . . .	33
3.11	Spotpreis und Bedarf (skaliert) vom 06.08.2001 bis 13.08.2001 . . . . .	34
3.12	Der Bedarf für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 . . . . .	34
3.13	Korrelationskoeffizienten des Bedarfs für Arbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 162, Sommer 176, Herbst 188 und Winter 176 . . . . .	35
3.14	Korrelationskoeffizienten des Bedarfs für Nichtarbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 83, Sommer 85, Herbst 85 und Winter 94 . . . . .	36
4.1	Beispiel eines Regime-Switching . . . . .	45
5.1	Die stochastischen Komponenten $r_t^L(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	60
5.2	Die empirische Autokorrelationsfunktion der drei stochastischen Komponenten $r_t^L(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	61
5.3	Residuen der stochastischen Komponenten $r_t^L(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	62
5.4	Standardisierte Residuen der stochastischen Komponenten $r_t^L(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	63
5.5	Die empirische Autokorrelationsfunktion der Residuen der drei stochastischen Komponenten $r_t^L(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	64

5.6	Der Vergleich des Modells $\hat{l}_t$ mit den Beobachtungen $l_t$ vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 . . . . .	66
5.7	Vergleich des Modells - Differenzplot, $l_t - \hat{l}_t$ vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 . . . . .	66
5.8	Der Vergleich des Modells $\hat{l}_t$ mit den Beobachtungen $l_t$ vom 17.09.2001 bis 20.09.2001 . . . . .	67
5.9	Der Vergleich des Bedarfs mit dem Spotpreis (logarithmiert) . . . . .	68
5.10	Der Vergleich des Spotpreises (logarithmiert) zwischen Arbeitstagen, Samstag/Fenstertagen und Sonn-/Feiertagen . . . . .	68
5.11	Die stochastischen Komponenten $r_t^B(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	72
5.12	Die stochastischen Komponenten $r_t^B(i)$ nach Arbeits-bzw. Nichtarbeitstag, $i = 1, 2, 3$ . . . . .	73
5.13	Die empirische Autokorrelationsfunktion von $r_t^B(i)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	74
5.14	Modell der stochastischen Komponenten $R_t^B$ für Arbeits- bzw. Nichtarbeitstage	75
5.15	Interpolierte Forwardkurve vom 2.1.2003 der EEX Grundlast mit Fälligkeit Jänner 2003 bis Dezember 2004 . . . . .	85
5.16	Forwardkurve vom 2.1.2003 der EEX Grundlast mit Fälligkeit Juli 2003 bis Dezember 2004 im Vergleich zu den geschätzten Erwartungswerten $\hat{S}_{T,T}$ . . . . .	85
5.17	$\mu_T^*$ aus der EEX Grundlast mit Lieferzeit Juli 2003 bis Dezember 2004, ausgehend vom 2.1.2003 . . . . .	86
5.18	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 . . . . .	89
5.19	Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 . . . . .	90
5.20	1 Preissimulation (auf Stundenbasis und logarithmischer Basis) und die Zustände in den drei Hauptkomponenten von $B_t$ (bei grauer Hinterlegung: Regime befindet sich im außernatürlichen Zustand an Arbeitstagen, bei hellgrauer an Nichtarbeitstagen) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 . . . . .	91
5.21	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Nicht-/Arbeitstag Onpeak (08:00 - 20:00) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante . . . . .	92
5.22	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Nicht-/Arbeitstag Offpeak (00:00-08:00 und 20:00 - 00:00) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Variante . . . . .	93
5.23	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Wochenende (Samstag und Sonntag) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante . . . . .	94
5.24	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Feiertag bzw. Fenstertag mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante . . . . .	95
5.25	1000 Preissimulationen Arbeitstag (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003: Vergleich mit der ersten Modellvariante Histogramm . . . . .	96
5.26	1000 Preissimulationen Nichtarbeitstag (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003: Vergleich mit der ersten Modellvariante Histogramm . . . . .	97
5.27	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate März, April und Mai 2003, Arbeitstag . . . . .	98
5.28	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate März, April und Mai 2003, Nichtarbeitstag . . . . .	99
5.29	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Juni, Juli und August 2003, Arbeitstag . . . . .	100

5.30	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Juni, Juli und August 2003, Nichtarbeitstag . . . . .	101
5.31	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate September, Oktober und November 2003, Arbeitstag . . . . .	102
5.32	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate September, Oktober und November 2003, Nichtarbeitstag . . . . .	103
5.33	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Dezember 2002, Jänner und Februar 2003, Arbeitstag . . . . .	104
5.34	1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Dezember 2002, Jänner und Februar 2003, Nichtarbeitstag . . . . .	105
6.1	Der Preis der Swing-Option in Abhängigkeit von den Ausübungsrechten (links) und der Preis pro Ausübungsrecht (rechts) . . . . .	129
6.2	Die Verteilung des Preises für $M = 100$ Ausübungsrechte über einen Zeitraum von $T = 100$ Tagen bei $N = 500$ Simulationen . . . . .	130
6.3	Die Verteilung des Preises für $M = 100$ Ausübungsrechte über einen Zeitraum von $T = 100$ Tagen bei $N = 500$ Simulationen . . . . .	131
6.4	Die Minimal- und Maximalstände des virtuellen Speichers . . . . .	133
6.5	Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm) . . . . .	138
6.6	Verlauf des Niveaus durch die approximierte Ausübungsstrategie auf Stundenbasis (links) sowie die obere, untere Schranke und Quartile der Niveaustände bei 1000 Simulationen (rechts) . . . . .	139
6.7	Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm) . . . . .	141
6.8	Verlauf des Niveaus durch die approximierte Ausübungsstrategie auf Stundenbasis (links) sowie die obere, untere Schranke und Quartile der Niveaustände bei 1000 Simulationen (rechts) . . . . .	142
6.9	Die Minimal- und Maximalstände des virtuellen Speichers mit Wochenrestriktionen . . . . .	143
6.10	Die Bestimmung der unteren zulässigen Grenze von $W_t$ . . . . .	144
6.11	Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm) . . . . .	146
6.12	Der Verlauf des Gesamtniveaus (auf Stundenbasis) - links 1000 Simulationen, rechts untere, obere Schranke und Quartile bei 1000 Simulationen und unten der Verlauf der Wochenstände (auf Tagesbasis) . . . . .	147
6.13	Die Verteilung des Preises bei 500 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm) . . . . .	154
6.14	Der Preis in Abhängigkeit von der Ausübungsmenge und den Ausübungsverboten	155
6.15	Die Verläufe der Zustände $P_t$ , $W_t$ und $N_t$ . . . . .	156
6.16	Der Verlauf des Zustandes $U_t$ . . . . .	157
A.1	Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - Bedarf Arbeitstag	160
A.2	Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - Bedarf Nichtarbeitstag . . . . .	160
A.3	Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - $B_t$ Arbeitstag .	161

A.4	Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - $B_t$ Nichtarbeitstag . . . . .	161
A.5	Ergebnisse des mittleren Bedarfs für $L_t$ und Nichtarbeitstag . . . . .	162
A.6	Ergebnisse des mittleren Bedarfs für $L_t$ und Arbeitstag . . . . .	162
A.7	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $L_t$ . . . . .	163
A.8	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $L_t$ . . . . .	164
A.9	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $L_t$ . . . . .	165
A.10	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $L_t$ . . . . .	166
A.11	Ergebnisse der mittleren Ausgangsbasis auf der Angebotsseite für $B_t$ und Nichtarbeitstag . . . . .	167
A.12	Ergebnisse der mittleren Ausgangsbasis auf der Angebotsseite für $B_t$ und Arbeitstag . . . . .	167
A.13	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $B_t$ . . . . .	168
A.14	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $B_t$ . . . . .	169
A.15	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $B_t$ . . . . .	170
A.16	Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für $B_t$ . . . . .	171

# Kapitel 1

## Einleitung

Der Strommarkt ist im Vergleich zu anderen Märkten wie z.B. Aktienmärkten noch sehr jung. Die European Energy Exchange (EEX) mit Hauptsitz Leipzig existiert erst seit ungefähr sechs Jahren. Einerseits wird elektrischer Strom als standardisierte Ware (Commodity) wie Aluminium, Erdöl, Erdgas, Weizen, Stahl, Gold etc. gehandelt. Andererseits hat der elektrische Strom eine einzigartige Eigenschaft: Strom kann man nicht lagern. Daher ist die Stromlieferung zu einem Tageszeitpunkt ein anderes Produkt wie zu einem anderen. So variieren die Preise im Spothandel je nach Tageszeit zwischen knappen 10 Euro/MWh und bis über 100 Euro/MWh. In besonders chaotischen Fällen kann der Strompreis auch einige tausend Euro/MWh betragen (siehe Chaos in Kalifornien 2000 in [12]). Daher ist das Stromgeschäft eine Branche, die einige Besonderheiten aufweist und somit eine spezielle Behandlung benötigt.

Die Liberalisierung, die in vielen Ländern durchgeführt wurde und auch nicht vor Österreich Halt gemacht hat, führt dazu, dass der Großhandelsmarkt immer wichtiger wird und immer mehr neue Produkte entstehen, die unter anderem am Markt gehandelt oder außerhalb des Marktgeschehens angeboten werden, um einerseits den vielseitigen Bedarf an Strom (Volumenrisiko) abzudecken und andererseits das Preisrisiko so gut wie möglich zu minimieren. Durch diesen Veränderungsprozess entsteht ein verstärkter Preiswettkampf, sowohl in der Stromproduktion als auch in der Verteilung durch Energiedienstleister. Waren einst nur physikalische Aspekte bei der Preisfestsetzung bedeutsam, so sind es heute überwiegend die Nachfrage und das Angebot am Großhandelsmarkt.

In allen deregulierten Strommärkten kann man feststellen, dass diese hoch volatil sind, saisonalen Effekten unterliegen und unerwartet hohe Preisanstiege, die sofort auf das Normalniveau zurückkehren (Preisspikes) erleben. Diese Spikes entstehen unter anderem durch Versorgungsengpässe oder durch kurzfristige Veränderungen in der Nachfrage. Im Gegensatz zu Finanzmärkten (Aktien und Anleihen z.B.) oder anderen Rohstoffmärkten erweist sich dieser Markt daher als sehr komplex. Auch die durch die Deregulierung motivierte Einführung von neuen Managementinstrumenten wie Risikomanagements, Derivaten und Absicherungsstrategien basierend auf klassischen Konzepten steht hinsichtlich dieser Komplexität und vor allem der Nichtlagerbarkeit des Stromes vor einer großen Herausforderung.

Etablierte Märkte wie z.B. Nord-Pool (siehe [35]), der Anfang der neunziger Jahre startete, sowie der EEX-Spotmarkt (siehe [18]) bieten bereits neben den Spotpreisen (Handel mit kurzfristigen Energielieferungen, die am nächsten Tag geliefert werden) Produkte wie Forwards und

europäische Optionen auf Forwards (Terminmarkt) an.

Auch in Österreich rücken seit der Voll liberalisierung mit 1. Oktober 2001 wirtschaftliche Aspekte in Energiedienstleistungsunternehmen, wie z.B. bei Steweg-Steg, immer stärker in den Vordergrund. Steweg-Steg GmbH, die größte Tochter der Energie Steiermark, die im Jahr 2002 als neue Gesellschaft aus Steweg, der steirischen Wasserkraft- und Elektrizitäts-Aktiengesellschaft, und Steg, der steiermärkischen Elektrizitäts-Aktiengesellschaft entstand, sieht eine ihrer Kernkompetenzen im Handel von langfristigen Produkten bis zur stündlichen Eindeckung von Kundenlastgängen (siehe [www.e-steiermark.com](http://www.e-steiermark.com)). Die vollständige Marktöffnung ermöglicht nun den Zugang zum Großhandelsmarkt, der nicht nur den Spot- bzw. den Terminmarkt, sondern auch bilaterale Vertragsverhandlungen (OTC - Over The Counter) umfasst, und bietet neue Möglichkeiten und Instrumente an. Es stellt sich jetzt die Frage, wie man mit diesen Produkten umgeht, wo sie eingesetzt werden können und welche Kosten sie verursachen.

Ein spezieller Vertragstyp, der unter dem Begriff *Multi-Exercise Option*, *Swing-Option* oder *virtuelles Speicherkraftwerk* zu finden ist, gewinnt für Steweg-Steg immer mehr an Bedeutung, da diese Vertragsform als ein geeignetes Risikomanagementinstrument gegen Volumenrisiko und Preisrisiko einsetzbar ist. Bei solchen virtuellen Speicherkraftwerken darf der Kunde unter gewissen Restriktionen auswählen, wann er die elektrische Energie abrufen möchte. Die Standardrestriktionen solcher Produkte sind die maximale Energiemenge, der Anmeldezeitpunkt für den gewünschten Energiebezug (normalerweise bis einen Tag davor), die maximale Leistung, und die Leistungsschritte. Zusatzrestriktionen können eine Vorgabe der minimal abzunehmenden Energiemengen, eine minimal abzunehmende Leistung oder sogar spezielle Zeitfunktionen als obere und untere Grenzen sein.

Wenn man nun so einen Vertrag erwerben bzw. verkaufen möchte, ist natürlich die Preisfestsetzung von Interesse, sowie die Bestimmung der Zeitpunkte, an denen die Energiemengen unter Berücksichtigung der Restriktionen abgerufen werden.

Da für den Verkauf eines solchen Produktes nicht notwendigerweise Speicherkraftwerke oder Gaskraftwerke gleicher Flexibilität gebaut werden müssen, und vom Käufer abgerufene Mengen, die vom Verkäufer aus dem eigenen Kraftwerkspark nicht aufgebracht werden können, von letzterem für den Käufer vom Spotmarkt bezogen werden können, erfolgt eine Bewertung dieser Produkte nicht nach den Kosten solcher Kraftwerke sondern nach den Spotmarktpreisen. Zur Bewertung dieser virtuellen Speicherkraftwerke wird davon ausgegangen, dass der Käufer versucht, immer die wertvollsten Energiemengen abzurufen. Da im Allgemeinen der Anmeldezeitpunkt für die Abrufung der Energie jeweils einen Tag vor der Lieferung liegt, versucht der Käufer möglichst dann seine Swing-Optionen auszuüben, wenn der Spotpreis am höchsten ist. Daher ist die Charakterisierung und das Verstehen des Strompreises einer der wesentlichen Bestandteile der Marktanalyse und Grundlage für Bewertung von Produkten, die von diesen Preisen abhängen.

Das **Ziel dieser Arbeit** ist nach einer eingehenden Studie des Strommarktes - wir betrachten im speziellen den EEX-Spotmarkt (siehe [18]) - ein adäquates Spotpreismodell aufzustellen, das alle wesentlichen Charakteristika des Marktes und zwar

- die saisonalen Effekte

- die Preisspikes
- die Volatilität und
- die langfristigen Schwankungen, die einen starken Ausdruck in den Forwards finden,

beinhalten soll. Darauf aufbauend werden wir einen Algorithmus zur Bewertung von virtuellen Speicherkraftwerken entwickeln, der neben der Preisfestsetzung auch Entscheidungsfunktionen für die abzurufenden Mengen unter Einhaltung der vorgegebenen Restriktionen angibt und für Praktiker eine Hilfestellung ist. Dazu wird mit Hilfe von Optimierungsalgorithmen jene optimale Ausübungsstrategie unter Berücksichtigung aller Restriktionen bestimmt, die den maximalen mittleren Ertrag am Spotmarkt erzielt.

Bei der Bewertung der Swing-Option ist zu überlegen, nach welchem Gesichtspunkt die Preisfestlegung stattfindet. Im Sinne der Finanzmathematik wäre ein äquivalentes Martingalmaß zu suchen, mit dem der maximale mittlere Ertrag dieses Vertrages zu berechnen ist. Da das äquivalente Martingalmaß aber direkt in Zusammenhang mit einem selbstfinanzierenden Portfolio steht, stoßen wir auf das Problem der Speicherbarkeit des Stromes. Wie mit dieser Problematik umgegangen wird, wird in Abschnitt 4.2 diskutiert.

Da der Spotmarktpreishandel auf Tagesbasis erfolgt, werden wir die stochastische Modellierung in diskreter Zeit durchführen. An manchen Stellen werden wir aufgrund der vereinfachten Notation die Problematik in stetiger Zeit betrachten, aber die Erkenntnisse auf diskrete Zeiteinheiten übertragen. Im Kapitel 2 werden wir uns mit den Hauptwerkzeugen für unsere Modellierung und zwar den linearen Zustandsraummodellen mit Regime-Switching beschäftigen. Das Hauptaugenmerk ist das Schätzen der unbekannt Parameter solcher Modelle. Insbesondere werden wir den Algorithmus von Kim und Nelson [32] erläutern, da er für die Kalibrierung unseres Modells eine wesentliche Rolle spielt.

In Kapitel 3 wird der *European Energy Exchange Market* (siehe auch unter [www.eex.de](http://www.eex.de)) mit Hauptsitz in Leipzig genauer beschrieben, die Preisfestsetzung durch Nachfrage und Angebot erläutert und die Charakteristiken des Preises analysiert. Wir werden sowohl die Angebotsseite, repräsentiert durch die Stromerzeuger, und die Nachfrageseite, vor allem Energiedienstleistungsunternehmen, durchleuchten und die Mechanismen, die auf diesem Markt ablaufen, herausarbeiten.

Im Kapitel 4 werden wir uns mit der aktuellen Literatur zur Modellierung von Strommärkten auseinander setzen. Da die Liberalisierung des Strommarktes noch recht jung ist, wurde die wissenschaftliche Behandlung dieses Themas erst in den letzten Jahren verstärkt in Angriff genommen. Neben den Modellierungskonzepten von Spotmärkten (siehe Abschnitt 4.1) wird auch die Bewertung von Stromderivaten (siehe Abschnitt 4.2) diskutiert. Konzepte aus der klassischen Finanzmathematik scheitern daran, dass Strom nicht gespeichert werden kann. Wie man dieses Problem dennoch lösen kann, lässt sich mit [37] motivieren und mit dem Ansatz von [7] durchführen. Dieser Zugang ist auch auf unser Modell übertragbar und wird daher von uns ausgenutzt.

Anschließend werden wir uns in Kapitel 5 auf den Kern unserer Arbeit konzentrieren und mit Hilfe der Idee von [43] den Spotmarkt als ein mehrdimensionales Marktmodell (24 Stunden)

betrachten und mit Hilfe der Hauptkomponentenmethode einige wenige unabhängige Faktoren extrahieren, die die stochastischen Komponenten des Preises widerspiegeln. Diese werden wir im Gegensatz zu [43] über lineare Zustandsraummodelle mit Regime-Switching modellieren, nachdem wir die Hauptkomponenten exploratorisch herausgefiltert haben. Regime-Switching ist ein Oberbegriff für Modelle, die zustandsabhängige Entwicklungen berücksichtigen. Meist wird diese Zustandsveränderung durch eine Markovkette beschrieben. Für die Modellierung des Spotpreises ist diese Modellklasse sehr gut geeignet, da natürliche Vorgänge auf diesem Markt damit beschrieben werden können. Charakteristisch sind so genannte Preisspikes, die kurzfristig auftreten und als Übergang vom Normalzustand zu einem Ausnahmezustand angesehen werden können. Da diese Vorgänge nur als Ausdruck von Preisveränderungen zum Vorschein kommen und nicht direkt beobachtet werden, stellt die Schätzung dieser Modelle eine weitere Herausforderung dar. Der Algorithmus von Kim (siehe [32]) zur Schätzung der Parameter von Zustandsraummodellen mit Regime-Switching für multivariat normalverteilte Störgrößen zeigt sehr plausible Resultate. Abschließend überprüfen wir die Qualität unseres Modells in einer Simulationsstudie.

Das in Kapitel 5 eingeführte Modell wird dann in Kapitel 6 für die Bewertung von Swing-Optionen herangezogen. Im ersten Schritt wird die Problemstellung definiert und als ein stochastisches dynamisches Optimierungsproblem formuliert. Zur Lösung des Problems wird der Algorithmus von Longstaff und Schwartz [34], ursprünglich für amerikanische Optionen konzipiert, auf unsere Fragestellung übertragen. Der modifizierte Algorithmus liefert als Beiprodukt eine Approximation der optimalen Entscheidungsfunktionen. Wir zeigen anhand einer sehr einfachen Swing-Option, wie gut diese Methode in unserer Anwendung funktioniert. Anschließend werden wir noch vier in der Praxis anzutreffende *Multi-Exercise Optionen* betrachten, die sehr komplexe Restriktionen beinhalten.

# Kapitel 2

## Lineare Zustandsraummodelle mit Regime-Switching

### 2.1 Lineare Zustandsraummodelle

Die Anwendung von Zustandsraummodellen ist in der Praxis weit verbreitet (siehe z.B. Elektrotechnik und Wirtschaft). Sie ermöglicht eine Behandlung von unterschiedlichsten Zeitreihenmodellen. Charakteristisch für diese Modellklasse ist die Beschreibung von nicht beobachtbaren Einflüssen. Allgemein formuliert lautet das Modell für eine multivariate Zeitreihe  $Y_t \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \Phi_t \alpha_{t-1} + \Gamma_t x_t + G_t \eta_t \\ Y_t &= H_t \alpha_t + A_t x_t + D_t \epsilon_t,\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei  $\alpha_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi_t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $x_t \in \mathbb{R}^k$ ,  $\Gamma_t \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $G_t \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ,  $H_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $A_t \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $D_t \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $\eta_t \in \mathbb{R}^l$  und  $\epsilon_t \in \mathbb{R}^s$  sind. Die Variable  $x_t$  beschreibt exogene Einflüsse, wogegen  $\eta_t$  mit  $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$  und  $\text{Cov}(\eta_t) = Q_t$  und  $\epsilon_t$  mit  $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$  und  $\text{Cov}(\epsilon_t) = R_t$  die stochastischen Störungen sind. Zur vollständigen Spezifizierung von (2.1) benötigen wir noch folgende Annahmen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\alpha_0] &= a_0 & \text{Cov}(\alpha_0) &= P_0 \\ \mathbb{E}[\eta_t \eta'_s] &= 0 & \mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon'_s] &= 0 & \mathbb{E}[\eta_t \epsilon'_s] &= 0 \quad \forall t, s \\ \mathbb{E}[\alpha_0 \eta'_s] &= 0 & \mathbb{E}[\alpha_0 \epsilon'_s] &= 0 \quad \forall s.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Varianten mit anderen Annahmen findet man in [26]. Die erste Gleichung in (2.1) bezeichnet man als *Übergangsgleichung* und die zweite als *Beobachtungsgleichung*. Weiters werden die Matrizen  $\Phi_t$ ,  $\Gamma_t$ ,  $G_t$ ,  $Q_t$ ,  $H_t$ ,  $A_t$ ,  $D_t$  und  $R_t$  *Systemmatrizen* genannt. Wir nehmen an, dass diese Matrizen nicht stochastisch sind, aber sich mit der Zeit ändern können.

In diesem Modell sind sehr viele Spezialfälle wie z.B. ARIMA-Prozesse enthalten. Ein allgemeiner Überblick ist in [26] und [24] gegeben.

Angenommen die Störgrößen sowie die Anfangsverteilung sind multivariat normalverteilt, dann können die unbekannt Parameter mit Hilfe der Kalman-Filter Technik via Maximum-Likelihood geschätzt werden (siehe [26] und [24]).

### 2.1.1 Maximum-Likelihood-Schätzung von Zustandsraummodellen

Gegeben sei eine beobachtete Zeitreihe  $y_0^T = (y_0, \dots, y_T)$ . Wir nehmen an, dass diese Realisation vom Modell (2.1) stammt, wobei die Systemmatrizen durch eine spezielle Parameterkonstellation  $\theta \in \mathbb{R}^k$  spezifiziert sind. Zur Schätzung der Parameter wird die gemeinsame Dichte der Realisation betrachtet

$$L(y_0^T; \theta) = f(y_0^T; \theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | y_0^{t-1}; \theta) f(y_0; \theta). \quad (2.3)$$

Da die Anfangsverteilung, sowie die Störgrößen  $\eta_t$  und  $\epsilon_t$  normalverteilt sind, ist die Verteilung von  $Y_t$  bedingt auf die Information bis zum Zeitpunkt  $t-1$ , also  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Y_0, \dots, Y_{t-1})$ , wobei  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ , ebenfalls multivariat normalverteilt. Denn hier geht eine besondere Eigenschaft dieser Verteilung ein und zwar

**Lemma 2.1.1 (siehe [26]).** *Gegeben sei ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor, der aus den zwei Zufallsvektoren  $X$  und  $Y$  besteht, d.h.*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix} \right).$$

Für die Verteilung von  $X$  bedingt auf  $Y$  gilt

$$X|Y \sim N(\mu_{X|Y}, \Sigma_{X|Y}),$$

wobei

$$\mu_{X|Y} = \mu_X + \Sigma_{XY} \Sigma_{YY}^{-1} (Y - \mu_Y)$$

und

$$\Sigma_{X|Y} = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY} \Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{YX}.$$

Zur Berechnung der entsprechenden Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen wird der Kalmanfilter angewandt.

#### Der Kalmanfilter

Sei

$$\begin{aligned} a_{t|t-1} &= \mathbb{E}[\alpha_t | \mathcal{F}_{t-1}] & P_{t|t-1} &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ a_{t|t} &= \mathbb{E}[\alpha_t | \mathcal{F}_t] & P_{t|t} &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t})(\alpha_t - a_{t|t})' | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

und

$$y_{t|t-1} = \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] \quad V_{t|t-1} = \mathbb{E}[(Y_t - y_{t|t-1})(Y_t - y_{t|t-1})' | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Weiters wird angenommen, dass  $\alpha_0$ ,  $\eta_t$  und  $\epsilon_t$  multivariat normalverteilt mit den Eigenschaften (2.2) sind. Dann erhält man rekursiv für  $t = 0, \dots, T$  (siehe auch [26], [24] oder [32]):

- $a_{t|t-1} = \Phi_t a_{t-1|t-1} + \Gamma_t x_t$
- $P_{t|t-1} = \Phi_t P_{t-1|t-1} \Phi_t' + G_t Q_t G_t'$
- $y_{t|t-1} = H_t a_{t|t-1} + A_t x_t$
- $V_{t|t-1} = H_t P_{t|t-1} H_t' + D_t R_t D_t'$

- $a_{t|t} = a_{t|t-1} + P_{t|t-1}H_t'V_{t|t-1}^{-1}(Y_t - H_t a_{t|t-1} - A_t x_t)$
- $P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H_t'V_{t|t-1}^{-1}H_t P_{t|t-1}$ ,

und

$$\alpha_t | \mathcal{F}_t \sim N(a_{t|t}, P_{t|t})$$

sowie

$$Y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(y_{t|t-1}, V_{t|t-1}).$$

Mit Hilfe des Kalmanfilters können wir nun die Log-Likelihood-Funktion aufstellen als

$$l(y_0^T; \theta) = \log(L(y_0^T; \theta)) = \tag{2.4}$$

$$-\frac{n(T+1)}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \log(|V_{t|t-1}(\theta)|) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T (y_t - y_{t|t-1}(\theta))' V_{t|t-1}^{-1}(\theta) (y_t - y_{t|t-1}(\theta)).$$

Diese ist nun bezüglich der unbekannt Parameter  $\theta \in \mathbb{R}^k$  zu maximieren.

Eine spezielle Unterklasse von (2.1) sind die *zeitinvarianten* Modelle. Hier sind die Systemmatrizen konstant über die Zeit, d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \Phi \alpha_{t-1} + \Gamma x_t + G \eta_t \\ Y_t &= H \alpha_t + A x_t + D \epsilon_t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Man spricht von einem stationären Übergangsvektor  $\alpha_t$ , wenn alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $\Phi$

$$|\lambda(\Phi)| < 1$$

und  $\Gamma x_t \equiv c$ . Wenn dies der Fall ist, ist die stationäre Verteilung von

$$\alpha_t \sim N((I - \Phi)^{-1}c, P),$$

wobei  $I$  die  $(m \times m)$ -Einheitsmatrix und die  $(m \times m)$  Matrix  $P$  die Lösung von

$$P = \Phi P \Phi' + G Q G'$$

ist. Die Maximum-Likelihood-Schätzung erfolgt analog zu oben. Falls  $\alpha_t$  stationär ist, kann man die stationäre Verteilung von  $\alpha_t$  als Anfangsverteilung  $\alpha_0$  wählen. Wenn nicht alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $\Phi$  echt kleiner eins sind, verwendet man z.B. den *diffuse prior*-Ansatz (siehe Details in [26]) oder man nimmt an, dass  $\alpha_0$  ein unbekannter Parameter ist. Andere Möglichkeiten zur Behandlung des nicht stationären Falles in der Maximum-Likelihood-Schätzung sind in [30] und [8] gegeben.

Spezielle zeitinvariante Zustandsraummodelle, die in unserer Modellierung einen wesentlichen Bestandteil ausmachen, sind die eindimensionalen ( $n = 1$ ) ARIMA( $p, d, q$ )-Zeitreihen

$$\Delta^d Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta^d Y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i},$$

wobei

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} \\ \Delta^2 Y_t &= \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} \\ &\vdots \\ \Delta^d Y_t &= \Delta^{d-1} Y_t - \Delta^{d-1} Y_{t-1}.\end{aligned}$$

In den meisten Anwendungsfällen setzt man die Störgröße  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  mit  $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$  für  $s < t$  voraus. Als Zustandsraummodell kann man diese Zeitreihe z.B. folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \Phi \alpha_{t-1} + G \eta_t \\ \Delta^d Y_t &= H \alpha_t,\end{aligned}\tag{2.6}$$

wobei

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{m-1} & \phi_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \begin{aligned} G &= [1, 0, \dots, 0]' \in \mathbb{R}^{m \times 1} \\ \eta_t &\sim N(0, \sigma^2) \in \mathbb{R} \\ H &= [1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}] \in \mathbb{R}^{1 \times m} \end{aligned}$$

und  $m = \max(p, q + 1)$  sowie  $\phi_{p+1} = \dots = \phi_m = 0$  oder  $\theta_{q+1} = \dots = \theta_{m-1} = 0$ . Bei der Modellierung des Spotpreises (siehe Kapitel 5) werden wir überwiegend auf eine Unterklasse der ARIMA( $p, d, q$ )-Zeitreihen zurückgreifen und zwar die SARIMA( $P, D, Q$ )( $p, d, q$ ) $_s$ -Zeitreihen, die sich auf ähnliche Weise als Zustandsraummodell darstellen lassen. Hauptsächlich werden wir SARIMA(1, 0, 1)(1, 0, 1) $_7$ -Zeitreihen betrachten, die folgende Form besitzen:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_7 Y_{t-7} - \phi_1 \phi_7 Y_{t-8} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_7 \epsilon_{t-7} + \theta_1 \theta_7 \epsilon_{t-8}.$$

**Bemerkung 1.** Die Darstellung einer ARIMA( $p, d, q$ )-Zeitreihe als Zustandsraummodell ist nicht eindeutig. Es gibt verschiedene Möglichkeiten diesen Prozess als Zustandsraummodell zu beschreiben, wobei die Identifizierbarkeit immer noch gewährt ist (siehe [26]). Zur Schätzung der Parameter sollte jene Form herangezogen werden, die numerisch am stabilsten ist.

### Eigenschaften des Maximum-Likelihood-Schätzers (siehe z.B. [26])

Sei  $\hat{\theta}$  der  $k$ -dimensionale Maximum-Likelihood-Schätzer von (2.4) und angenommen die Informationsmatrix skaliert mit  $T^{-1}$  konvergiert zu einer positiv definiten Matrix  $IA(\theta)$ , d.h.

$$\frac{1}{T} I(\theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} IA(\theta)$$

dann besitzt  $\hat{\theta}$  eine  $k$ -dimensionale asymptotische Normalverteilung mit

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \stackrel{\text{a.s.}}{\approx} N(0, IA(\theta)^{-1}),$$

wenn gilt:

1.  $\theta \in \mathbb{R}^k$  ist ein innerer Punkt im Parameterraum,
2. die Log-Likelihood-Funktion besitzt die dritte partielle Ableitung bezüglich  $\theta \in \mathbb{R}^k$  und ist stetig in der Umgebung der wahren Werte  $\theta \in \mathbb{R}^k$  und
3.  $\theta \in \mathbb{R}^k$  ist identifizierbar.

Wir wenden uns nun einer speziellen Erweiterung von Zustandsraummodellen zu.

## 2.2 Markov-Switching Autoregression

Die erste Erweiterung von speziellen Zustandsraummodellen und zwar die zustandsabhängigen Markov-Switching Modelle für die Beschreibung von strukturellen Änderungen in Zeitreihen sind z.B. bei Hamilton (siehe [23], [24] und [25]) zu finden.

In vielen Disziplinen, in denen man sich mit der Analyse und Modellierung von Zeitreihen beschäftigt, treten atypische Phänomene auf. Meist liegen strukturelle Veränderungen vor, die man nur implizit erkennen kann, d.h. in der Zeitreihe kommt es zu einem drastischen Umbruch, dessen Grund auf dem ersten Blick nicht erkennbar ist, weil die notwendigen Informationen dem Beobachter nicht zugänglich sind. Daher werden im ersten Schritt plausible Erklärungsversuche für das auftretende Phänomen gesucht, um diese in der Modellierung zu berücksichtigen.

Mit *einfachen* Modellen lassen sich diese Vorgänge oft nicht beschreiben. Betrachten wir z.B. den Strommarkt, auf dem viele Teilnehmer handeln. Der Preis für eine Einheit Strom wird durch Nachfrage und Angebot bestimmt. Manchmal schnellt der Preis rasant schnell in die Höhe und kehrt anschließend rasch wieder auf das Normalniveau zurück. Dieses Phänomen, das wir mit *Preisspike* bezeichnen wollen, ist darauf zurückzuführen, dass bei gleich bleibender Nachfrage weniger Strom z.B. aufgrund von Kraftwerksausfällen angeboten werden kann. Dies hat einen raschen Preisanstieg zur Folge. Da aber die Ausfälle schnell behoben werden können, normalisiert sich der Preis nach kurzer Zeit wieder. Für die Marktteilnehmer ist die Information des Vorliegens eines Engpasses nicht immer zugänglich, daher kann diese Knappheit nur durch den Preisanstieg erahnt werden.

Wie in unserem Beispiel können diese Phänomene zwar meist erklärt werden, jedoch nicht explizit, um sie z.B. als Regressor in die Modellierung einfließen zu lassen, da eben diese Information dem Beobachter vorenthalten ist. Auch lassen sich in den meisten Fällen entsprechende Gesetzmäßigkeiten ableiten, da das Auftreten und Verschwinden dieser Einflusskomponenten nicht immer ganz willkürlich sind. Um diese strukturellen Veränderungen im Verlauf beschreiben zu können, kann man z.B. Markov-Switching Modelle heranziehen. Auf unser Problem gemünzt bedeutet dies, dass wir zunächst den Markt durch zwei Zustände beschreiben können, dem Normal- und dem Spikezustand:

- *Normalzustand*: Es liegen keine Engpässe vor, es gibt keine Kraftwerksausfälle, die Nachfrage verhält sich typisch.
- *Spikezustand*: Kraftwerke sind ausgefallen, Rohstoffe, zur Erzeugung von Strom sind überraschend teurer geworden oder die Nachfrage ist atypisch.

Je nachdem in welchem Zustand sich der Markt befindet, verhält sich dieser nach entsprechenden Mustern, im Normalzustand z.B. fluktuiert der Preis um ein mittleres Niveau.

Wenn die Modellierung des Zustandes durch eine homogene ergodische Markovkette erfolgt, dann spricht man von einem *Markov-Switching Prozess*. Der Markov-Switching Prozess ist ein bivariater Prozess  $\{(Z_t, Y_t)\}$ , wobei  $Z_t$  eine homogene, ergodische Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum  $\mathcal{Z}$  und  $Y_t$  eine inhomogene  $s$ -stufige Markovkette auf dem Zustandsraum  $\mathcal{Y}$  ist. Die bedingte Dichte von  $Y_t$  hängt vom Zustand  $Z_t$  und von den  $s$  letzten Beobachtungen ab. Die Modellklasse von Hamilton (siehe [15] oder [24]) lautet

$$Y_t = \sum_{i=1}^s a_i(Z_t) Y_{t-i} + \epsilon_t, \quad (2.7)$$

wobei  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, Q)$  und  $Z_t \in \{0, \dots, N\}$  eine Übergangsmatrix  $P$  mit Einträgen  $p_{ij} = P(Z_t = j | Z_{t-1} = i)$  und eine stationäre Verteilung  $\pi$  besitzt. Eine Besonderheit solcher Prozesse ist, dass nur der Prozess  $Y_t$  beobachtbar ist. Die Markovkette  $Z_t$  beschreibt uns den Zustand, gewöhnlich auch mit *Regime* bezeichnet, in welchem sich der Prozess  $Y_t$  befindet.

Im nächsten Schritt ist die Schätzung der unbekannt Parameter dieser Modellklasse

$$\theta = (a_1(0), \dots, a_1(N), \dots, a_s(0), \dots, a_s(N), p_{00}, \dots, p_{NN}, Q) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$$

für  $i = 0, \dots, N$ , von Interesse. Dazu wird die konditionale Log-Likelihood-Funktion herangezogen. Ähnlich zur Kalmanfiltertechnik hat man rekursiv die konditionale Dichte  $f(y_{s+1}^T | y_1^s)$  zu berechnen.

## 2.2.1 Maximum-Likelihood-Schätzung bei autoregressiven Modellen mit Markov-Switching

Gegeben sei eine beobachtete Zeitreihe  $y_0^T = (y_0, \dots, y_T)$ . Wir nehmen an, dass diese Realisation vom Modell (2.7) stammt. Zur Maximum-Likelihood-Schätzung müssen wir zunächst die konditionale Likelihood-Funktion aufstellen

$$L(y_0^T; \theta) = f(y_s^T | y_0^{s-1}; \theta) = \prod_{t=s}^T f(y_t | y_0^{t-1}; \theta). \quad (2.8)$$

Da keine geschlossene Form für die Verteilung von  $f(y_0^{s-1})$  gebildet werden kann, wird zur Parameterschätzung die konditionale Likelihood-Funktion herangezogen. Die Likelihood-Funktion besteht aus dem Produkt der Komponenten  $f(y_t | y_0^{t-1}; \theta)$ , die rekursiv zu berechnen sind. Zunächst vereinfachen wir die Notation, indem wir mit  $f(y_t | y_1^{t-1}) = f(y_t | y_1^{t-1}; \theta)$  bezeichnen.

Begonnen wird mit  $t = s$ . Um die Berechnung überhaupt beginnen zu können, müssen wir für den Startzeitpunkt Annahmen über die gefilterte Wahrscheinlichkeit von  $Z_{s-1}$  gegeben den Beobachtungen  $y_1^{s-1}$  treffen. Hamilton (siehe [24]) behandelt diese Größe als einen unbekannt Parameter und lässt sie in die Likelihood-Funktion einfließen:

$$P(Z_{s-1} = i | y_0^{s-1}) = \lambda_i \quad \text{für } i = 0, \dots, N \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$$

und

$$\theta = (a_1(0), \dots, a_1(N), \dots, a_s(0), \dots, a_s(N), p_{00}, \dots, p_{NN}, Q, \lambda_0, \dots, \lambda_N).$$

Somit können wir mit der Berechnung der Komponenten  $f(y_t|y_0^{t-1})$  für  $t = s, \dots, T$  beginnen:

$$\begin{aligned} f(y_t|y_0^{t-1}) &= \sum_{j=0}^N f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1})P(Z_t = j|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1})P(Z_t = j, Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Drei Terme sind für die Berechnung von  $f(y_t|y_0^{t-1})$  ausschlaggebend und zwar

1.  $f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1})$ ,
2.  $P(Z_t = j|Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  und
3.  $P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})$ .

**Term 1:** Die Dichte von  $y_t$  bedingt auf  $Z_t = j$  und  $y_0^{t-1}$  ist

$$\begin{aligned} f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1}) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_t - \sum_{l=1}^s a_l(j)y_{t-l}\right)'Q^{-1}\left(y_t - \sum_{l=1}^s a_l(j)y_{t-l}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Term 2:** Da die Markovkette nur vom vorherigen Zustand abhängt und dieser gegeben ist, sind die Beobachtungen selbst zur Berechnung von  $P(Z_t = j|Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  nicht nötig, d.h.

$$P(Z_t = j|Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}) = P(Z_t = j|Z_{t-1} = i) = p_{ij}. \quad (2.11)$$

**Term 3:** Abschließend muss die Berechnung von  $P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})$  für  $t > s$  durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) &= \sum_{h=0}^N P(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{h=0}^N \frac{f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-1})}{f(y_0^{t-1})}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei

$$\begin{aligned} f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-1}) &= \\ &= f(y_{t-1}|Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2})f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2}) \end{aligned}$$

und

$$f(y_0^{t-1}) = f(y_{t-1}|y_0^{t-2})f(y_0^{t-2}).$$

Wie man sieht, lässt sich die Berechnung von  $f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-1})$  in zwei weitere Terme aufsplittern und zwar

4.  $f(y_{t-1}|Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2})$  und
5.  $f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2})$ .

**Term 4:** Da die Verteilung von  $y_{t-1}$  bedingt auf  $Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h$ , und  $y_0^{t-2}$  nicht von  $Z_{t-2}$  abhängt (siehe Modell 2.7) erhalten wir die gleiche Dichte wie in Formel (2.10), d.h.

$$f(y_{t-1}|Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2}) = f(y_{t-1}|Z_{t-1} = i, y_0^{t-2}).$$

**Term 5:** Für  $f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2})$  gilt wegen (2.11)

$$\begin{aligned} f(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h, y_0^{t-2}) &= \\ P(Z_{t-1} = i, Z_{t-2} = h|y_0^{t-2})f(y_0^{t-2}) &= P(Z_{t-1} = i|Z_{t-2} = h)P(Z_{t-2} = h|y_0^{t-2})f(y_0^{t-2}), \end{aligned}$$

wobei die drei Terme in den vorigen Schritten berechnet wurden. Abschließend können wir diesen Ausdruck in Gleichung (2.12) einsetzen und erhalten Term 3

$$P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) = \frac{\sum_{h=0}^N f(y_{t-1}|Z_{t-1} = i, y_0^{t-2})P(Z_{t-1} = i|Z_{t-2} = h)P(Z_{t-2} = h|y_0^{t-2})}{f(y_{t-1}|y_0^{t-2})},$$

wobei  $f(y_{t-1}|y_0^{t-2})$  im vorigen Schritt mit Gleichung (2.9) berechnet wurde.

Nachdem alle Komponenten  $f(y_t|y_0^{t-1})$  für  $t = s, \dots, T$  ermittelt wurden, ergibt das Produkt die Likelihood-Funktion bzw. die summierten logarithmierten Komponenten die Log-Likelihood-Funktion, welche bezüglich der unbekannt Parameter  $\theta$  zu maximieren ist, d.h.

$$l(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=s}^T \log(f(y_t|y_0^{t-1}; \theta))$$

unter

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Die Eigenschaften dieser Schätzer wurden in [15] in einer allgemeineren Umgebung und für allgemeinere Modelle der Form

$$Y_t = f(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s}, Z_t) + \epsilon_t,$$

wobei  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} F(\epsilon)$  untersucht. Sie beweisen die Konsistenz und asymptotische Normalverteilung der Schätzer, d.h. die Informationsmatrix skaliert mit  $T^{-1}$  konvergiert zu einer positiv definiten Matrix  $IA(\theta)$ ,

$$\frac{1}{T} I(\theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} IA(\theta)$$

und  $\hat{\theta}$  ist asymptotisch normalverteilt mit

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \stackrel{\text{a.s.}}{\sim} N(0, IA(\theta)^{-1}).$$

## 2.3 Lineare Zustandsraummodelle mit Regime-Switching

Nun gehen wir einen Schritt weiter. In unserer Strommarktmodellierung werden die stationären SARIMA-Zeitreihen mit einer Periode von 7, die als spezielle Zustandsraummodelle angesehen werden können, großen Anklang finden (siehe Kapitel 5). Wenn wir jetzt nun auch den Zustand des Marktes in das Modell aufnehmen und somit das Verhalten des Marktes je nach Zustand, den wir mit einer Markovkette modellieren werden, unterscheiden möchten, führt uns dies zur Klasse der linearen *Zustandsraummodelle mit Markov-Switching*, die folgende Form besitzen

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \phi_t(Z_t)\alpha_{t-1} + \Gamma_t(Z_t)x_t + G_t(Z_t)\eta_t(Z_t) \\ Y_t &= H_t(Z_t)\alpha_t + A_t(Z_t)x_t + D_t(Z_t)\epsilon_t(Z_t),\end{aligned}\quad (2.13)$$

wobei  $\alpha_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $\phi_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $x_t \in \mathbb{R}^k$ ,  $\Gamma_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $G_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ,  $H_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $A_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $D_t(Z_t) \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $\eta_t(Z_t) \in \mathbb{R}^l$  und  $\epsilon_t(Z_t) \in \mathbb{R}^s$  und  $Z_t$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $Z_t \in \{0, \dots, N\}$ , Übergangsmatrix  $P$ , dessen Einträge  $p_{ij} = P(Z_t = j | Z_t = i)$  sind, und mit einer stationären Verteilung  $\pi$ . Die Variable  $x_t$  beschreibt wieder die exogenen Einflüsse, wogegen  $\eta_t(Z_t)$  mit  $\mathbb{E}[\eta_t | Z_t] = 0$  und  $\text{Cov}(\eta_t | Z_t) = Q_t(Z_t)$  und  $\epsilon_t$  mit  $\mathbb{E}[\epsilon_t | Z_t] = 0$  und  $\text{Cov}(\epsilon_t | Z_t) = R_t(Z_t)$  die stochastischen Störungen sind, die hier von Zustand  $Z_t$ , auch Regime genannt, abhängen. Zur vollständigen Spezifizierung von (2.13) benötigen wir noch folgende Annahmen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\alpha_0 | Z_0] &= a_0(Z_0) & \text{Cov}(\alpha_0 | Z_0) &= P_0(Z_0) \\ \mathbb{E}[\eta_t \eta_s' | Z_t, Z_s] &= 0 & \mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_s' | Z_t, Z_s] &= 0 & \mathbb{E}[\eta_t \epsilon_s' | Z_t, Z_s] &= 0 \quad \forall t, s, Z_t, Z_s \\ \mathbb{E}[\alpha_0 \eta_s' | Z_0, Z_s] &= 0 & \mathbb{E}[\alpha_0 \epsilon_s' | Z_0, Z_s] &= 0 \quad \forall s, Z_0, Z_t.\end{aligned}\quad (2.14)$$

In dieser Klasse können sich sowohl die Übergangsgleichung als auch die Beobachtungsgleichung durch den Schalter, der durch die Variable  $Z_t$  beschrieben wird, verändern. Wir haben hier zwei unbeobachtbare Komponenten und zwar die Übergangsgleichung und den Zustand des Systems. Durch diese Verallgemeinerung des linearen Zustandsraummodells kann eine große Bandbreite von Modellen eingebettet werden, wie z.B. das Modell von Hamilton (siehe Gleichung (2.7)), jedoch stößt man bei der Schätzung der Parameter durch die Maximum-Likelihood an die Grenzen dieser Methode. In den meisten Fällen ist keine exakte Berechnung mehr möglich, auch wenn die Störgrößen  $\eta_t(Z_t)$  und  $\epsilon_t(Z_t)$  sowie  $\alpha_0(Z_t)$  multivariate Normalverteilung besitzen. Daher sind Approximationen bei der Berechnung der Likelihood-Funktion nötig. Auf der Suche nach einer geeigneten Annäherung sind wir auf den Ansatz von Kim (siehe [31] und [32]) gestoßen. Dieser kombiniert die Kalmanfiltertechnik mit der Idee von Hamilton (siehe [23], [24] und [25]) und es zeigt sich, dass man mit diesem Algorithmus plausible Ergebnisse erzielen kann (siehe Kapitel 5).

In den nächsten Schritten beschäftigen wir uns mit folgendem Zustandsraummodell mit Markov-Switching

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \phi(Z_t)\alpha_{t-1} + \Gamma(Z_t)x_t + G(Z_t)\eta_t(Z_t) \\ Y_t &= H(Z_t)\alpha_t + A(Z_t)x_t + D(Z_t)\epsilon_t(Z_t), \text{ wobei}\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} | Z_t \sim N \left( 0, \begin{pmatrix} Q(Z_t) & 0 \\ 0 & R(Z_t) \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \alpha_0 | Z_0 \sim N(a_0(Z_0), P_0(Z_0)).$$

Die unbekannt Parameter

$$\theta = (\alpha_0(i), P_0(i), \phi(i), \Gamma(i), G(i), Q(i), H(i), A(i), D(i), R(i), p_{ij}, i, j = 0, \dots, N)$$

hängen ebenfalls vom Zustand des Systems ab.

### 2.3.1 Maximum-Likelihood-Schätzung - Approximation von [31]

Zur Herleitung des Algorithmus von [31] werden wir zur Vereinfachung der Notation den Parametervektor  $\theta$  nicht mitführen. Ausgangsbasis sind wieder die beobachteten Werte  $y_0^T = (y_0, \dots, y_T)$  einer Zeitreihe. Weiters nehmen wir an, sie stammt aus der Modellklasse (2.15). Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L(\theta) = f(y_0^T) = \prod_{t=1}^T f(y_t|y_0^{t-1})f(y_0), \quad (2.16)$$

wobei

$$f(y_0) = \sum_{j=0}^N P(Z_0 = j)f(y_0|Z_0 = j) = \sum_{j=0}^N \pi_j f(y_0|Z_0 = j) \quad (2.17)$$

mit

$$f(y_0|Z_0 = j) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|V(j)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(v_0'V(j)^{-1}v_0)\right), \quad (2.18)$$

wobei  $v_0(j) = y_0 - H(j)a_0(j) - A(j)x_0$  und  $V(j) = H(j)P_0(j)H(j)' + D(j)R(j)D(j)'$ . Die konditionale Verteilung von  $y_0$  gegeben den Zustand  $Z_0$  ist multivariat normalverteilt, weil  $\alpha_0$  und  $\epsilon_0$  gegeben den Zustand  $Z_0$  multivariat normalverteilt sind. Somit ist  $y_0$  gemischt normalverteilt. Weiters gilt nach dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(Z_0 = j|y_0) = \frac{\pi_j f(y_0|Z_0 = j)}{\sum_{j=0}^N \pi_j f(y_0|Z_0 = j)}. \quad (2.19)$$

Für die Berechnung der Likelihood-Funktion ist wieder sukzessive die bedingte Dichte  $f(y_t|y_0^{t-1})$  zu ermitteln. Es wird sich jedoch zeigen, dass die Bestimmung sehr komplex ist. Beginnen wir zunächst mit der bedingten Dichte von  $y_1$ , gegeben die Information bis zum Zeitpunkt 0, d.h.  $f(y_1|y_0)$ , und betrachten ihre Zusammensetzung. Anschließend werden wir  $f(y_2|y_0^1)$  im Detail betrachten und abschließend den allgemeinen Fall  $f(y_t|y_0^{t-1})$ . Wir werden die Approximation von [31] vorstellen und am Ende die Berechnungen der approximierten Log-Likelihood-Funktion schematisch darstellen.

**Die Bestimmung der Dichte  $f(y_1|y_0)$** 

Im ersten Schritt gehen wir analog zu (2.9) vor.

$$\begin{aligned}
 f(y_1|y_0) &= \sum_{j=0}^N f(y_1, Z_1 = j|y_0) \\
 &= \sum_{j=0}^N f(y_1|Z_1 = j, y_0)P(Z_1 = j|y_0) \\
 &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)P(Z_1 = j, Z_0 = i|y_0) \\
 &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)P(Z_1 = j|Z_0 = i)P(Z_0 = i|y_0).
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Zur Berechnung von  $f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)$  sind wieder drei Terme wesentlich:

1.  $f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)$ , der im nächsten Schritt zu berechnen ist,
2.  $P(Z_1 = j|Z_0 = i) = p_{ij}$  und
3.  $P(Z_0 = i|y_0)$  siehe Gleichung (2.19).

Zur Berechnung von  $f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)$  gehen wir von der Verteilung von  $(Y_0, Y_1)$  gegeben der Zustände  $Z_1 = j$  und  $Z_0 = i$  aus. Diese ist nämlich multivariat normalverteilt

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{pmatrix} | (Z_1 = j, Z_0 = i) \sim N \left( \begin{pmatrix} \bar{y}_1(i, j) \\ \bar{y}_0(i) \end{pmatrix}, \Sigma(i, j) \right)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1(i, j) &= H(j)(\phi(j)a_0(i) + \Gamma(j)x_1) + A(j)x_1, \\
 \bar{y}_0(i) &= H(i)a_0(i) + A(i)x_0
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

und

$$\Sigma(i, j) = \begin{pmatrix} V_1(i, j) & H(j)\phi(j)P_0(i)H(i)' \\ H(i)P_0(i)\phi(j)'H(j)' & V_0(i) \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

mit

$$\begin{aligned}
 V_0(i) &= H(i)P_0(i)H(i)' + D(i)R(i)D(i)', \\
 P_1(i, j) &= \phi(j)P_0(i)\phi(j)' + G(j)Q(j)G(j)', \\
 V_1(i, j) &= H(j)P_1(i, j)H(j)' + D(j)R(j)D(j)'.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Durch Anwendung von Lemma 2.1.1 gilt, dass

$$Y_1 | (Z_1 = j, Z_0 = i, Y_0 = y_0) \sim N(y_{1|0}(i, j), V_{1|0}(i, j)),$$

wobei

$$y_{1|0}(i, j) = \bar{y}_1(i, j) + H(j)\phi(j)P_0(i)H(j)'V_0(i)^{-1}(y_0 - \bar{y}_0(i))$$

und

$$V_{1|0}(i, j) = V_1(i, j) - H(j)\phi(j)P_0(i)H(j)'V_0(i)^{-1}H(j)P_0(i)\phi(j)'H(j)'$$

Daraus folgt, dass die bedingte Verteilung von  $Y_1|Y_0 = y_0$  nicht mehr normalverteilt, sondern gemischt normalverteilt ist, d.h.

$$f(y_1|y_0) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)P(Z_1 = j|Z_0 = i)P(Z_0 = i|y_0), \quad (2.24)$$

wobei

$$f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|V_{1|0}(i, j)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}y_{1|0}(i, j)'V_{1|0}(i, j)^{-1}y_{1|0}(i, j)\right),$$

$P(Z_1 = j|Z_0 = i) = p_{ij}$  und  $P(Z_0 = i|y_0)$  siehe Gleichung (2.19).

Für Bestimmung von  $f(y_2|y_0^1)$  ist die Berechnung der gefilterten Wahrscheinlichkeit des Zustandes  $Z_1$  gegeben den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t = 1$  notwendig:

$$P(Z_1 = j|y_0^1) = \sum_{i=0}^N \frac{f(y_1|Z_1 = j, Z_0 = i, y_0)P(Z_1 = j|Z_0 = i)P(Z_0 = i|y_0)}{f(y_1|y_0)}. \quad (2.25)$$

### Die Bestimmung von $f(y_2|y_0^1)$

Denn es gilt analog zu (2.20)

$$\begin{aligned} f(y_2|y_0^1) &= \sum_{j=0}^N f(y_2, Z_2 = j|y_0^1) & (2.26) \\ &= \sum_{j=0}^N f(y_2|Z_2 = j, y_0^1)P(Z_2 = j|y_0^1) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1)P(Z_2 = j, Z_1 = i|y_0^1) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1)P(Z_2 = j|Z_1 = i)P(Z_1 = i|y_0^1). \end{aligned}$$

Von den drei Termen, die den wesentlichen Bestandteil der bedingten Dichte  $f(y_2|y_0^1)$  ausmachen, sind bis auf die bedingte Dichte  $f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1)$  alle in diesem Schritt bekannt. Zur Berechnung von  $f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1)$  ist jedoch erforderlich, dass man die Änderungen der Zustände bis zum Zeitpunkt  $t = 0$  berücksichtigt, d.h.

$$f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1) = \sum_{h=0}^N f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, Z_0 = h, y_0^1)P(Z_0 = h|Z_2 = j, Z_1 = i, y_0^1).$$

Hier geht man analog zur Berechnung von  $f(y_1|y_0)$  vor und betrachtet die Verteilung von  $(Y_2, Y_1, Y_0)$  gegeben die Zustände  $Z_2 = j, Z_1 = i, Z_0 = h$ . Diese ist wiederum multivariat

normalverteilt

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{pmatrix} | (Z_2 = j, Z_1 = i, Z_0 = h) \sim N \left( \begin{pmatrix} \bar{y}_2(h, i, j) \\ \bar{y}_1(h, i) \\ \bar{y}_0(h) \end{pmatrix}, \Sigma_2(h, i, j) \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(h) &= H(h)a_0(h) + A(h)x_0, \\ \bar{y}_1(h, i) &= H(i)a_1(h, i) + A(i)x_1 \text{ mit } a_1(h, i) = \phi(i)a_0(i) + \Gamma(i)x_1, \\ \bar{y}_2(h, i, j) &= H(j)a_2(h, i, j) + A(j)x_2 \text{ mit } a_2(h, i, j) = \phi(j)a_1(h, i) + \Gamma(j)x_2 \end{aligned}$$

$$\Sigma_2(h, i, j) = \begin{pmatrix} V_2(h, i, j) & \Psi(h, i, j) \\ \Psi(h, i, j)' & \Sigma(h, i) \end{pmatrix},$$

mit

$$V_2(h, i, j) = H(j)P_2(h, i, j)H(j)' + D(j)R(j)D(j)',$$

wobei

$$P_2(h, i, j) = \phi(j)P_1(h, i)\phi(j)' + G(j)Q(j)G(j)'$$

und  $\Sigma(h, i)$ , die Kovarianzmatrix der gemeinsamen Verteilung von  $(Y_1, Y_0)$  bedingt auf die Zustände  $Z_0 = h, Z_1 = i$  ist (siehe (2.22)) sowie

$$\Psi(h, i, j) = [H(j)\phi(j)P_1(h, i)H(i)' \quad H(j)\phi(j)\phi(i)P_0(h)H(h)'].$$

Durch Anwenden des Lemmas 2.1.1 erhält man die Dichte  $f(y_2|Z_2 = j, Z_1 = i, Z_0 = h, y_0^1)$ , die ebenfalls multivariat normalverteilt ist. Nach (2.26) ist  $f(y_2|y_0^1)$  wieder gemischt normalverteilt.

### Die Bestimmung von $f(y_t|y_0^{t-1})$

Analog zu (2.26) gilt

$$\begin{aligned} f(y_t|y_0^{t-1}) &= \sum_{j=0}^N f(y_t, Z_t = j|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N f(y_t|Z_t = j, y_0^{t-1})P(Z_t = j|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j, Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Allgemein stößt man bei der Berechnung von  $f(y_t|y_0^{t-1})$  auf das Problem, dass man zur Bestimmung von  $f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  den gesamten Zustandsverlauf  $(Z_0, \dots, Z_t)$  berücksichtigen muss, d.h.

$$f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}) = \sum_{Z_0, \dots, Z_{t-2}} f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, Z_{t-2}, \dots, Z_0, y_0^{t-1})P(Z_{t-2}, \dots, Z_0|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}).$$

Bei  $N = 1$  und  $t = 10$  sind für die Berechnung von  $f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  bereits  $2^{10} = 1024$  Summierungen durchzuführen. Mit steigendem  $N$  und  $t$  wird somit die explizite Berechnung unmöglich. Die Approximation von Kim [31] setzt nun beim Term  $f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  an.

**Approximation von  $f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$ :** Zunächst führen wir einige Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} a_{t|t-1}(i, j) &= \mathbb{E}[\alpha_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}], \\ P_{t|t-1}(i, j) &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t-1}(i, j))(\alpha_t - a_{t|t-1}(i, j))'|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}], \\ a_{t|t}(i, j) &= \mathbb{E}[\alpha_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^t], \\ P_{t|t}(i, j) &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t}(i, j))(\alpha_t - a_{t|t}(i, j))'|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^t], \end{aligned}$$

wobei mit  $y_0^{t-1}$  die Konstellation  $(Y_0 = y_0, \dots, Y_{t-1} = y_t - 1)$  gemeint ist. Weiters sei

$$\begin{aligned} a_{t|t}(j) &= \mathbb{E}[\alpha_t|Z_t = j, y_0^t], \\ P_{t|t}(j) &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t}(j))(\alpha_t - a_{t|t}(j))'|Z_t = j, y_0^t]. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass

$$\alpha_{t-1}|(Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}) \sim N(a_{t-1|t-1}(i), P_{t-1|t-1}(i)), \quad (2.28)$$

wäre

$$\alpha_t|(Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}) \sim N(a_{t|t-1}(i, j), P_{t|t-1}(i, j)), \quad (2.29)$$

mit

$$a_{t|t-1}(i, j) = \phi(j)a_{t-1|t-1}(i) + \Gamma(j)x_t \quad (2.30)$$

$$P_{t|t-1}(i, j) = \phi(j)P_{t-1|t-1}(i)\phi(j)' + G(j)Q(j)G(j). \quad (2.31)$$

und

$$Y_t|(Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}) \sim N(\bar{y}_{t|t-1}(i, j), V_{t|t-1}(i, j)), \quad (2.32)$$

wobei

$$\bar{y}_{t|t-1}(i, j) = H(j)a_{t|t-1}(i, j) + A(j)x_t, \quad (2.33)$$

$$V_{t|t-1}(i, j) = H(j)P_{t|t-1}(i, j)H(j)' + D(j)R(j)D(j)'. \quad (2.34)$$

Mit Hilfe der Kalmanfiltertechnik würde man

$$a_{t|t}(i, j) = a_{t|t-1}(i, j) + P_{t|t-1}(i, j)H(j)'V_{t|t-1}(i, j)^{-1}(y_t - \bar{y}_{t|t-1}(i, j)) \quad (2.35)$$

$$P_{t|t}(i, j) = P_{t|t-1}(i, j) - P_{t|t-1}(i, j)H(j)'V_{t|t-1}(i, j)^{-1}H(j)P_{t|t-1}(i, j) \quad (2.36)$$

erhalten und hätte

$$\alpha_t | (Z_{t-1} = i, Z_t = j, y_0^t) \sim N(a_{t|t}(i, j), P_{t|t}(i, j)). \quad (2.37)$$

Der springende Punkt ist die Annahme (2.28). Unter der Voraussetzung in (2.15), dass

$$\alpha_0 | Z_0 = i \sim N(a_0(i), P_0(i)),$$

folgt nämlich, dass  $\alpha_{t-1} | Z_{t-1} = i, y_0^{t-1}$  gemischt-normalverteilt ist. Die Approximation von Kim [31] ersetzt nun bei jedem Schritt  $t = 1, \dots, T$  die Verteilung von  $\alpha_t | Z_t = j, y_0^t$  durch eine Normalverteilung (siehe (2.28)),

$$f_{\alpha_t | (Z_t = j, Y_0^t)} \approx f_{N(a_{t|t}(j), P_{t|t}(j))}, \quad (2.38)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{t|t}(j) &= \mathbb{E}[\alpha_t | Z_t = j, y_0^t], \\ &= \sum_{i=0}^N \Delta_t(i, j) a_{t|t}(i, j) \end{aligned} \quad (2.39)$$

mit

$$\Delta_t(i, j) = \frac{P(Z_t = j, Z_{t-1} = i | y_0^t)}{P(Z_t = j | y_0^t)}$$

und

$$\begin{aligned} P_{t|t}(j) &= \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t}(j))(\alpha_t - a_{t|t}(j))' | Z_t = j, y_0^t], \\ &= \sum_{i=0}^N \Delta_t(i, j) \{ \mathbb{E}[(\alpha_t - a_{t|t}(i, j) + a_{t|t}(i, j) - a_{t|t}(j)) \\ &\quad (\alpha_t - a_{t|t}(i, j) + a_{t|t}(i, j) - a_{t|t}(j))' | Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^t] \} \\ &= \sum_{i=0}^N \Delta_t(i, j) \{ P_{t|t}(i, j) + (a_{t|t}(j) - a_{t|t}(i, j))(a_{t|t}(j) - a_{t|t}(i, j))' \}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Daraus folgt, dass  $\alpha_{t+1} | Z_{t+1} = j, Z_t = i, y_0^t$  ebenfalls durch eine Normalverteilung angenähert wird (siehe (2.29)) und schließlich  $Y_{t+1} | Z_{t+1} = j, Z_t = i, y_0^t$  (siehe (2.32)).

Durch diese Approximation kann die Kalmanfiltertechnik zur Bestimmung der multivariaten Normalverteilung von

$$\begin{aligned} \alpha_t | (Z_{t-1} = i, Z_t = j, y_0^{t-1}), \\ Y_t | (Z_{t-1} = i, Z_t = j, y_0^{t-1}) \end{aligned}$$

und

$$\alpha_t | (Z_{t-1} = i, Z_t = j, y_0^t)$$

herangezogen werden. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  werden die  $(N + 1) \times (N + 1)$  Posteriors  $(a_{t|t}(i, j)$  und  $P_{t|t}(i, j)$ ) auf  $(N + 1) \times 1$  Posteriors  $(a_{t|t}(j)$  und  $P_{t|t}(j)$ ) reduziert. Durch die Normapproximation von  $\alpha_t|(Z_t = j, y_0^t)$  kann man die Verteilung gegeben die Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t$  für den nächsten Zeitpunkt annähern.

Nach Bestimmung von  $f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})$  ist  $P(Z_t = j|y_0^t)$  zu berechnen, da dies für die Approximation von  $f(y_{t+1}|y_0^t)$  benötigt wird.

$$\begin{aligned}
 P(Z_t = j|y_0^t) &= \sum_{i=0}^N P(Z_t = j, Z_{t-1} = i|y_0^t), \\
 &= \sum_{i=0}^N \frac{f(Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_t|y_0^{t-1})}{f(y_t|y_0^{t-1})}, \\
 &= \sum_{i=0}^N \frac{f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j, Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})}{f(y_t|y_0^{t-1})}, \\
 &= \sum_{i=0}^N \frac{f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})}{f(y_t|y_0^{t-1})}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

mit

$$\begin{aligned}
 f(y_t|y_0^{t-1}) &= \\
 &\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}).
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Fasst man die einzelnen Schritte zusammen so erhält man die approximative Likelihoodfunktion wie folgt:

### Berechnung der approximierten Likelihood-Funktion

0. Berechne  $f(y_0)$  und  $P(Z_0|y_0)$  nach den Gleichungen (2.17) und (2.19) und  $a_{0|0}(j)$  und  $P_{0,0}(j)$  für  $j = 1, \dots, N$ .

Für  $t = 1, \dots, T$  führe Schritte 1 bis 3 durch:

1.  $a_{t|t-1}(i, j), P_{t|t-1}(i, j), \bar{y}_{t|t-1}(i, j), V_{t|t-1}(i, j), a_{t|t}(i, j), P_{t|t}(i, j)$  mittels Kalmanfiltertechnik (siehe Gleichungen (2.30) bis (2.35))
2. Nach Hamilton

$$P(Z_t = j, Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}) = P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1}),$$

und nach (2.42)

$$f(y_t|y_0^{t-1}) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})$$

sowie nach (2.41)

$$P(Z_t = j|y_0^t) = \sum_{i=0}^N \frac{f(y_t|Z_t = j, Z_{t-1} = i, y_0^{t-1})P(Z_t = j|Z_{t-1} = i)P(Z_{t-1} = i|y_0^{t-1})}{f(y_t|y_0^{t-1})}$$

3. Durchführung der Normalapproximation und Berechnung von  $a_{t|t}(j)$  und  $P_{t|t}(j)$  nach (2.39) und (2.40):

$$a_{t|t}(j) = \sum_{i=0}^N \Delta_t(i, j) a_{t|t}(i, j)$$

mit

$$\Delta_t(i, j) = \frac{P(Z_t = j, Z_{t-1} = i | y_0^t)}{P(Z_t = j | y_0^t)}$$

und

$$P_{t|t}(j) = \sum_{i=0}^N \Delta_t \{ P_{t|t}(i, j) + (a_{t|t}(j) - a_{t|t}(i, j))(a_{t|t}(j) - a_{t|t}(i, j))' \}.$$

Am Ende erhält man

$$L(\theta) = f(y_0, \dots, y_T) = \prod_{t=1}^T f(y_t | y_0^{t-1}) f(y_0)$$

bzw.

$$l(\theta) = \log f(y_0, \dots, y_T) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | y_0^{t-1}) + \log f(y_0).$$



# Kapitel 3

## Der EEX-Spotmarkt

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Preisgestaltung des EEX-Spotmarktes (siehe [20]) beschäftigen. Die European Energy Exchange (EEX) mit Sitz in Leipzig ist die größte Strombörse Europas. Sie existiert seit Juni 2000 und ist daher noch sehr jung.

Folgende zwei Bereiche sind auf dieser Börse angesiedelt:

- Der **Spotmarkt**, auch **Day-Ahead-Markt** genannt, umfasst das Handeln von Produkten, die am darauf folgenden Tag geliefert werden. Das sind
  - Einzelstunden oder
  - Blocklieferungen wie z.B.
    - \* Off Peak I (00:00-08:00)
    - \* Night (00:00-06:00)
    - \* Rush Hour (17:00-20:00)
    - \* etc.
  - ab 2005 werden zusätzlich Spotkontrakte auf EU-Emissionsrechte angeboten.
- Der **Terminmarkt** handelt mit standardisierten Produkten, die Lieferungen über einen längeren Zeitraum vorsehen. Im konkreten Fall sind dies Futures auf Monats-, Quartals- und Jahresbasis. Weiters sind seit kurzem Optionen europäischen Typs auf Futures am Terminmarkt erhältlich.

Da die Charakterisierung und das Verstehen des Strompreises einer der wesentlichen Bestandteile der Marktanalyse und Grundlage für Bewertung von Produkten, die von diesen Preisen abhängen, ist, konzentrieren wir uns zunächst auf den Ablauf der Preisfestsetzung am EEX-Spotmarkt.

### 3.1 Der Preismechanismus am EEX-Spotmarkt

Generell sind am EEX-Spotmarkt zwei unterschiedliche Handelsformen anzutreffen und zwar

- der *geschlossene Auktionshandel* und
- der *fortlaufende Handel*.

Für den *geschlossenen Auktionshandel* wird das zweiseitige Auktionsprinzip (siehe [20]) verwendet. Darunter versteht man die Preisfestsetzung nach Sammlung aller Gebote sowohl von der Angebots- als auch von der Nachfrageseite. Da die abgegebenen Gebote für die anderen Marktteilnehmer nicht bekannt sind, spricht man hier von einem geschlossenen Auktionshandel. Diese Handelsform wird für Stunden- und Blockverträge angewandt.

Der *fortlaufende Handel* tritt in Verbindung mit Baseload- (Lieferungen über den ganzen Tag) und Peakload-Kontrakten (Lieferung zwischen 8.00 Uhr und 20.00 Uhr) auf. Im Gegensatz zum geschlossenen Handel werden die eintreffenden Aufträge sofort auf Ausführbarkeit überprüft und die Preisgrenze, sowie die je Preisgrenze kumulierten Kauf- bzw. Verkaufsmengen für alle Teilnehmer angezeigt.

### 3.1.1 Die Preisermittlung beim geschlossenen Auktionshandel

Die Preisermittlung erfolgt über die Nachfrage- und Angebotssituation. Es werden zunächst für jedes Gut (in unserem Fall sind das die Stunden) alle Gebote aufgenommen, die dann zu einem bestimmten Zeitpunkt zur Preisfestlegung herangezogen werden. Die abgegebenen Gebote eines Mitbieters sind dabei den anderen Marktteilnehmern nicht bekannt. Man unterscheidet zwischen

- *preisabhängigen* und
- *preisunabhängigen* Geboten.

Bei preisabhängigen Geboten werden die Preis-Mengen Kombinationen angegeben, bei denen man kaufen bzw. verkaufen möchte. Wogegen preisunabhängige Gebote ihre Menge stets zu Marktpreisen erhalten, d.h. unabhängig davon welchen Preis das Gut erzielt, möchte man die gewünschte Menge kaufen bzw. verkaufen. Generell werden die Kauf- und Verkaufsoffer, also die Gebote mit Preis- und Mengenangaben, für jede einzelne Stunde zu einer Nachfrage- bzw. Angebotskurve aggregiert und durch lineare Interpolation zu einer stetigen Angebots- bzw. Nachfragekurve umgewandelt, die anschließend für die Bestimmung des Preises herangezogen wird. Der Schnittpunkt beider Kurven ergibt den marktklärenden Preis und das marktklärende Volumen. Zu diesem Preis werden alle Kaufgebote, die einen höheren Preis für das Gut bezahlen wollten, und alle Verkaufsangebote, die einen niedrigeren Preis verlangten, zu diesem Preis abgenommen (siehe Abbildung 3.1).

Die Gebote für die Blockverträge werden in die Stundenauktion integriert. Zuvor werden sie zu preisunabhängigen Geboten für die betreffenden Stunden umgewandelt. Die von den Marktteilnehmern für die Blockkontrakte festgesetzten Preisgrenzen werden im ersten Schritt vernachlässigt. Danach wird der durchschnittliche Stundenpreis für den betroffenen Block mit den von den Teilnehmern geforderten Preisgrenzen verglichen. Ist dieser durchschnittliche Preis größer oder gleich dem Preislimit der entsprechenden Verkaufsgebotsblöcke bzw. niedriger oder gleich dem der Kaufgebotsblöcke, dann wird das entsprechende Gebot erfüllt. Wenn nicht alle Gebote abgedeckt werden können, werden Prioritäten gesetzt. Z.B. haben jene Verkaufsgebote mit den niedrigsten Preisen und jene Kaufgebote mit den höchsten Preisen gegenüber anderen Geboten Vorrang. Besitzen zwei oder mehr Blockgebote den gleichen Preis, wird jenes Gebot mit dem größten Volumen zur Abdeckung vorgezogen. Ansonsten, wenn Preis und Auftragsmenge bei zwei oder mehr Geboten, die im ersten Kalkulationsschritt nicht akzeptiert wurden,

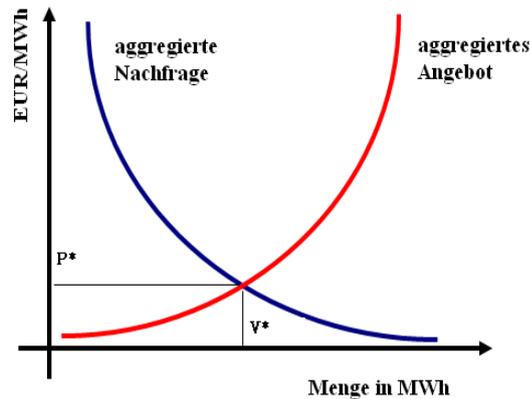


Abbildung 3.1: Ermittlung des Gleichgewichtspreises

gleich sind, erhält jene Order, die als erstes aufgenommen wurde, die oberste Priorität.

Abschließend wird noch kurz auf die flexiblen Stundengebote eingegangen. Das sind Verkaufsgbote, die in der teuersten Stunde zur Ausführung kommen, sofern die Preisgrenze zulässig ist. Die teuerste Stunde ist der höchste Preis jener Stunde, der nach der Preisfestsetzung unter Berücksichtigung aller Stunden- und Blockgebote und vor Einbindung der flexiblen Stundengebote erreicht wird. Somit kann sich die teuerste Stunde vor Ausführung des flexiblen Stundengebotes von der teuersten nach Ausführung unterscheiden. Weiters werden Blockgebote gegenüber diesem Gebotstyp vorrangig behandelt. Bei der Überprüfung auf Ausführbarkeit werden Gebote dieser Art mit niedrigerem Limit, sowie bei identischem Preis jene, die früher geordert wurden, vorgezogen. Weiters ist hier das maximale Volumen zur Zeit auf 250 MW beschränkt.

Der exakte Ablauf der Preisermittlung am EEX-Spotmarkt erfolgt in drei Schritten. Zunächst werden die gesamte Nachfrage und das gesamte Angebot aggregiert und anschließend der Gleichgewichtspreis (marktklärende Preis) sowie -volumen (marktklärende Menge) wie oben beschrieben bestimmt. Im zweiten Schritt wird diese Prozedur in den einzelnen Gebotsgebieten durchgeführt. Da sich natürlich die Nachfrage- und Angebotsstruktur unterscheiden kann, erhält man für jedes Gebiet einen marktklärenden Gebietspreis und ein marktklärendes Gebietsvolumen. Anschließend werden diese Preisunterschiede folgendermaßen verringert. Liegt der Gebietspreis über dem Gleichgewichtspreis werden preisunabhängige Angebote ansonsten preisunabhängige Nachfragen in dieses Gebiet, sofern keine Engpasssituation im Übertragungsnetz vorliegt, transferiert. Begonnen wird hier mit Gebietspreisen, die die größte Abweichung in beiden Richtungen zum Gleichgewichtspreis besitzen. Dann setzt man diesen Vorgang für alle Gebiete fort. Sofern die Übertragungskapazitäten bei diesen Transaktionen nicht erreicht werden und keine Engpässe vorliegen, erhalten alle Gebiete den gleichen Gleichgewichtspreis, der im ersten Schritt ermittelt wurde.

Liegen Kapazitätsengpässe in den entsprechenden Gebotsgebieten vor, so kann keine vollständige Preisanpassung durchgeführt werden. Entweder wird die zur Verfügung stehende Kapazität vollständig ausgenutzt, d.h. die Angebots- bzw. Nachfragekurve werden parallel um die noch vorhandene Kapazität verschoben und der daraus resultierende Preis ist dann verbindlich für dieses Gebiet oder die Kapazität wird Null gesetzt und es erfolgt keine Preisanpassung.

Abschließend ist noch der Fall zu erwähnen, wenn bei der Preisermittlung kein Gleichgewichtspreis bestimmt werden kann. Hier ermöglicht die Börse eine zweite Auktion. Kann noch immer kein Schnittpunkt ermittelt werden, so werden die Blockgebote, die die betroffenen Stunden enthalten, nicht berücksichtigt, das zu einer Neuberechnung führt. War dieser Vorgang ebenfalls erfolglos, wird eine pro Rata Zuteilung festgelegt (siehe Details in [20]).

### 3.1.2 Der fortlaufende Handel

Beim fortlaufenden Handel stehen auf der EEX folgende Kontrakte zur Verfügung (i) Baseload (Lieferung eines ganzen Tages), (ii) Peakload (Lieferung zwischen 08.00 und 20.00 eines Tages zwischen Montag und Freitag), (iii) Weekend Baseload (Lieferung für Samstag und Sonntag).

Den Handelsablauf kann man in vier Phasen, deren Zeitplan von der EEX-Börse vorgegeben ist, unterteilen.

1. Vorhandel
2. Haupthandel
  - (a) Eröffnungsauktion
  - (b) Fortlaufender Handel
  - (c) Schlussauktion
3. Nachhandel
4. Tagesendverarbeitung

In der Vorhandelsphase werden die Kauf- und Verkaufsangebote von den Teilnehmern eingegeben, gelöscht oder verändert. Es erfolgen noch keine Geschäftsabschlüsse.

Die Haupthandelsphase beginnt mit der Eröffnungsauktion. Zunächst erfolgt eine ganz kurze Aufrufphase, in der die Mitbieter Aufträge eingeben, ändern oder löschen können. Die aktuelle Ordersituation wird dabei veröffentlicht. Wenn sich ausführbare Aufträge gegenüberstehen, wird der indikative Auktionspreis, der Preis, der sich für die Auktion ergeben würde, wenn die Phase der Preisermittlung bereits vorbei wäre, angezeigt. Kann dieser nicht berechnet werden, wird der beste Kaufpreis oder der beste Verkaufspreis angegeben.

Anschließend nach Ende dieser Phase wird die Preisermittlung nach dem Meistausführungsprinzip durchgeführt. Der Preis wird aus allen gültigen Aufträgen ermittelt. Es ist jener Preis, bei dem die größtmögliche Menge mit gleichzeitig minimalstem Überhang ausgeführt werden kann, wobei sich die Kauf- und Verkaufsaufträge als ausführungsfähig bezüglich Preis und Auftragsart erweisen müssen. Die folgenden zwei Auftragsarten sind die wesentlichsten:

- *Unlimitierte Aufträge* (Market Order) sind Aufträge ohne Preisgrenzen.
- *Limitierte Aufträge* (Limit Order) besitzen Preisbeschränkungen.

Nach der Preisermittlung tritt man in die Marktausgleichsphase ein. Hier werden die nicht ausführbaren Aufträge für einen bestimmten Zeitraum zum Auktionspreis angeboten. Eine Änderung bzw. Löschung des Auftrages ist nicht möglich. Während dieser Phase werden die Geschäftsabschlüsse allen Teilnehmern angezeigt. Am Ende der Auktion werden alle nicht ausgeführten bzw. nur teilweise ausgeführten Aufträge in die nächste Phase, dem fortlaufenden Handel, mitgenommen.

Im fortlaufenden Handel ist das Orderbuch offen, es werden die Preisgrenzen und die je Preisgrenze kumulierten Auftragsmengen angezeigt. Jeder neu eintreffende Auftrag wird sofort auf Ausführbarkeit mit den im Orderbuch befindlichen Aufträgen überprüft, die dann auch bei positiver Bescheinigung teilweise oder ganz ausgeführt werden. Die nicht ausgeführten Aufträge werden nach Preis- und Zeitpräferenzen im Orderbuch sortiert, falls keine anderen Beschränkungen vorliegen. Diese Prioritäten bewirken, dass Kaufaufträge mit höherer Preisgrenze solchen mit niedrigeren vorgezogen werden, sowie umgekehrt für Verkaufsaufträge jene mit niedrigerer Preisgrenze vorrangig zu behandeln sind. Falls zwei oder mehrere Aufträge gleiche Konstellationen vorweisen, wird die zeitliche Reihenfolge der eingegebenen Aufträge berücksichtigt. Unlimitierte Aufträge haben Vorrang gegenüber limitierten.

Nach Abschluss des fortlaufenden Handels erfolgt die Schlussauktion, in der analog zur Eröffnungsauktion eine Aufrufs-, Preisermittlungs- und Marktausgleichsphase stattfindet. Dafür ist eine sehr kurze Zeitdauer angesetzt. Hier ist das Orderbuch teilweise geschlossen. Prinzipiell werden alle Aufträge, sowohl die aus dem fortlaufenden Handel noch offenen als auch jene, die auf diese Auktion beschränkt sind, zusammengeführt. Bei nicht Ausführbarkeit wird kein Auktionspreis ermittelt und der beste Kauf- bzw. Verkaufspreis wird veröffentlicht. Am Ende des Handelstages werden dann offene Positionen endgültig gelöscht. In der Nachhandelsphase werden die abgeschlossenen Geschäfte bearbeitet (weitere Details siehe in [20]).

Durch diesen Ablauf ergibt sich für den Preis am EEX-Spotmarkt eine typische Charakterisierung, wobei die Nachfrage und die Angebotsseite zwei ganz wesentliche Parameter in der Preisermittlung der gehandelten Güter sind. Wie die Eigenschaften des Spotpreises nun tatsächlich aussehen, werden wir im nächsten Abschnitt erläutern.

## 3.2 Die Charakteristika des Spotpreises

Der Spotmarkt unterscheidet sich von herkömmlichen Märkten neben der Speicherunfähigkeit des Stromes dadurch, dass der Preis einen Tag vor Lieferung bereits feststeht. Wie zuvor beschrieben erfolgt die Preisfestsetzung über die Nachfrage- und Angebotssituation. Diese wiederum kann von anderen Faktoren wie Jahreszeit, Temperatur oder Kapazitätsengpässen abhängig sein.

Betrachtet man die Preisentwicklung des Spotmarktes von Beginn an, so stellt man fest, dass der Preis neben saisonalen Einflüssen auch anderen starken Schwankungen unterlegen ist. Weiters kehrt der Preis nach einer gewissen Zeit wieder auf ein mittleres Niveau zurück (im Englischen *Mean Reversion*) und man kann rasante Preisanstiege mit sofortiger Rückkehr auf das mittlere Niveau beobachten. Dieser Effekt, den wir im weiteren Verlauf als *Preisspike* bezeichnen werden, ist unter anderem auf Kapazitätsengpässe zurückzuführen.

In Abbildung 3.2 sehen wir den Preisverlauf am EEX-Spotmarkt für das Gut Strom im Zeitraum vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 auf Stundenbasis (links ist der Preisbereich auf 200 EUR/MWh beschränkt und rechts wird der gesamte Bereich dargestellt). Der Preis kehrt stets auf ein mittleres Niveau zurück, wobei extreme Preisanstiege mit einer sofortigen Rückkehr gekoppelt sind. In Abbildung 3.3 ist der Preisspike in der Stunde 19 (zwischen 18 : 00 Uhr und 19 : 00 Uhr) vom 07.01.2003 dargestellt. Diese Stunde erzielte einen Preis von EUR 1719,72. Am nächsten Tag betrug der Preis für diese Stunde nur mehr EUR 23,24. Dieses Phänomen ist ganz typisch für den Strommarkt.

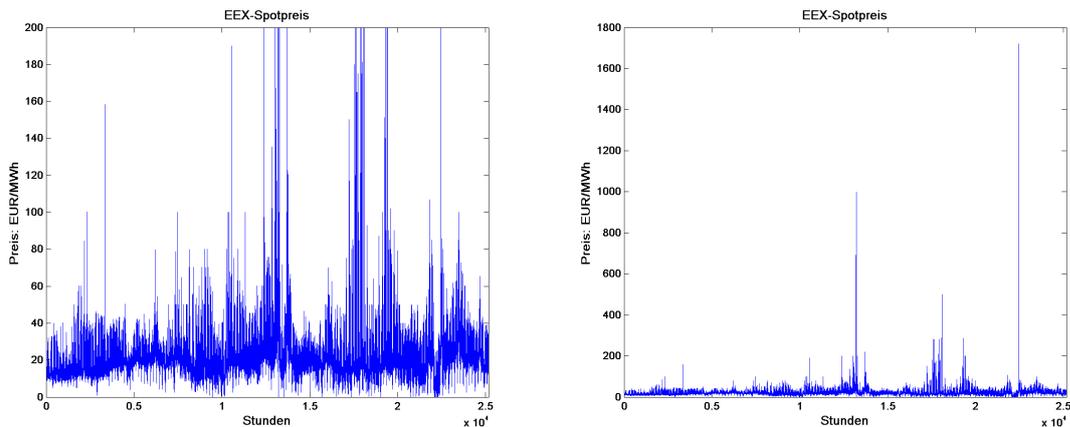


Abbildung 3.2: Der EEX-Spotmarkt vom 16.06.2001 bis 30.04.2003, links: Preis auf 200 EUR/MWh beschränkt und rechts: gesamte Skala

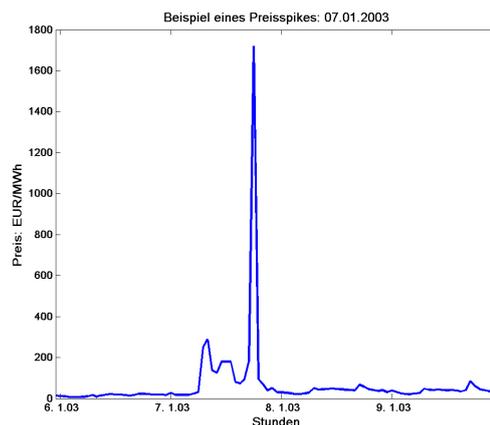


Abbildung 3.3: Preisspike am 07.01.2003

Weitere Untersuchungen ergeben, dass der Preis saisonalen Schwankungen unterworfen ist. In Abbildung 3.4 und 3.5 ist der Spotpreis (Zeitraum: 16.06.2001 bis 30.04.2003) in die vier Jahreszeiten

- Frühling: März, April, Mai

- Sommer: Juni, Juli, August
- Herbst: September, Oktober, November
- Winter: Dezember, Jänner, Februar

und in Arbeits- bzw. Nichtarbeitstage (Wochenende, Feiertag und Fenstertag) unterteilt. Der Preis an Nichtarbeitstagen unterliegt geringeren Schwankungen als an Arbeitstagen, und das extreme Spikeverhalten scheint hier nicht vorhanden zu sein. An Arbeitstagen erkennt man sehr wohl viele Sprünge, die überwiegend im Sommer und Winter zu verzeichnen sind. Der Frühling hingegen scheint überhaupt nicht anfällig für Preisspikes zu sein. Betrachtet man die Jahre 2000 bis 2003, zeigt sich, dass im Sommer 2002 ein stärkeres Spikeverhalten vorlag, im Winter war das Jahr 2001 heftiger von solchen Sprüngen betroffen. Der Herbst war im Vergleich zu den Jahreszeiten Sommer und Winter weitaus seltener mit rasanten Preisanstiegen konfrontiert. Im Jahr 2001 überschritt der Preis einmal die 200 Euro-Grenze. Weiters erhält man auch den Eindruck, wenn man die Jahreszeiten an Arbeitstagen vergleicht, dass der Sommer im Gegensatz zum Frühling volatiliter ist.

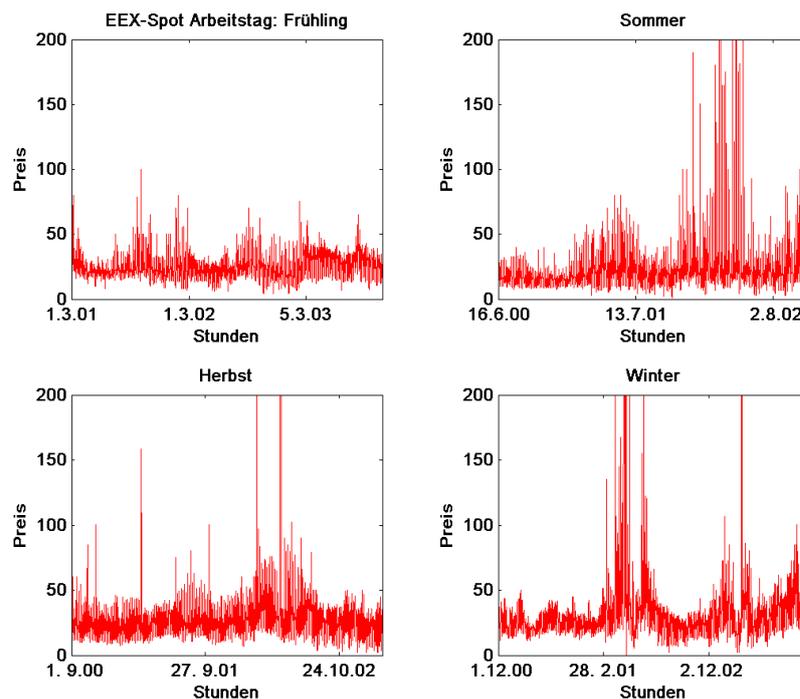


Abbildung 3.4: Die Spotpreise vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 unterteilt nach Jahreszeiten für Arbeitstage: Frühling (162 Tage), Sommer (176 Tage), Herbst (188 Tage) und Winter (176 Tage)

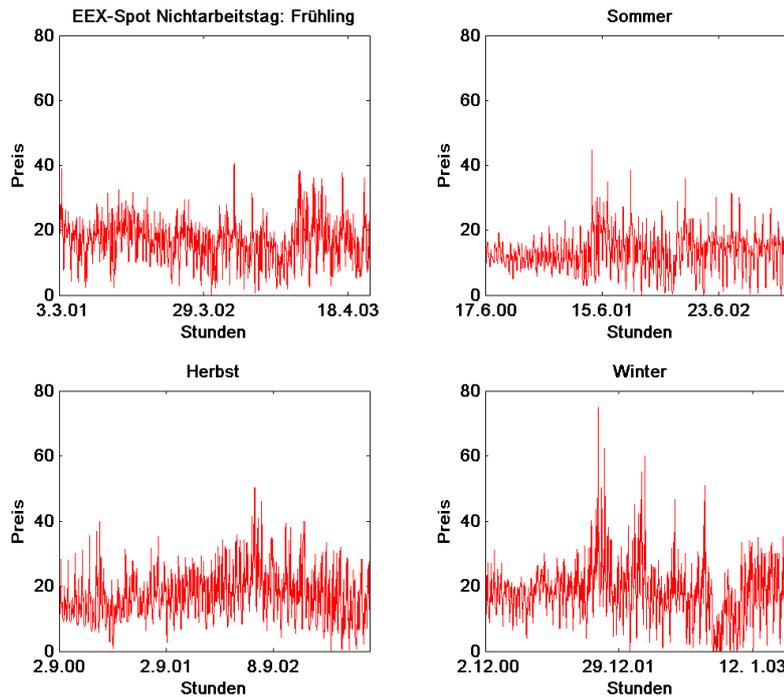


Abbildung 3.5: Die Spotpreise vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 unterteilt nach Jahreszeiten für Nichtarbeitstage: Frühling (83 Tage), Sommer (85 Tage), Herbst (85 Tage) und Winter (94 Tage)

In Abbildung 3.6 und 3.7 ist die Abhängigkeitsstruktur der Stunden in Form von empirischen Korrelationskoeffizienten, unterteilt in Jahreszeiten und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag dargestellt. Generell kann man feststellen, dass die Preise der Stunden hoch korreliert sind. Bei Nichtarbeitstagen besitzen die Stunden eine stärkere Interaktion. Bei den Arbeitstagen sind eher Gruppierungen anzutreffen. Zum Beispiel könnte man den Winter in folgende Cluster (Korrelationskoeffizient  $> 0,7$ ) einteilen

- Stunde 1 bis 7
- Stunde 10 bis 20
- Stunde 21 bis 24.

Mit Hilfe der empirischen Autokorrelationsfunktion (siehe Abbildung 3.8 links) lassen sich die Abhängigkeiten innerhalb des Tages ebenfalls bestätigen. Weiters stellen wir auch Wocheneffekte fest (siehe Abbildung 3.8 rechts).

Wie man sieht, ist die Struktur des Spotpreises hoch komplex. Sie hängt von vielen Faktoren und deren Interaktionen ab, die man nicht vernachlässigen soll. Da sich der Preis aus der Nachfrage-Angebotskonstellation ergibt, sollten wir diese beiden Seiten genauer durchleuchten und uns die wesentlichen Faktoren extrahieren.

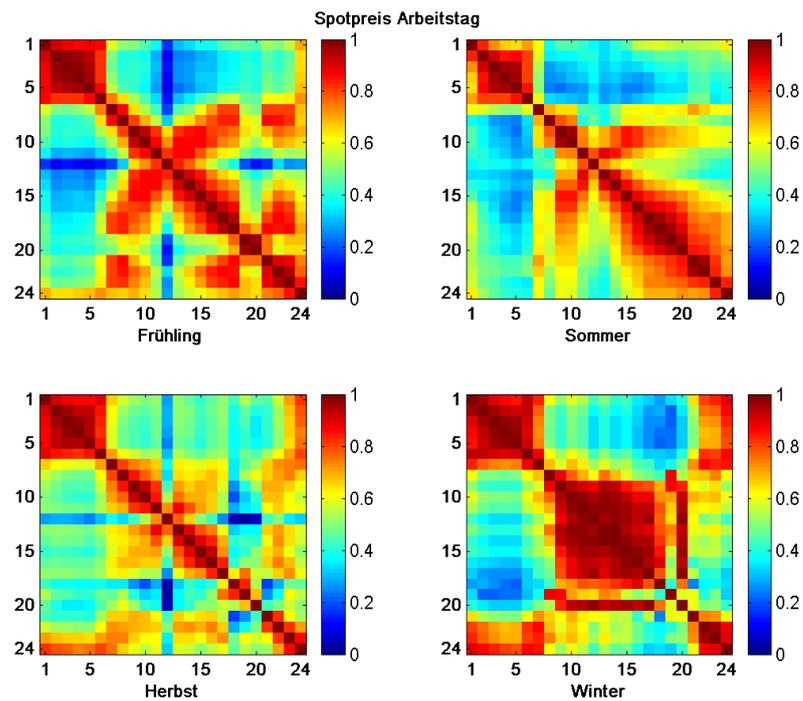


Abbildung 3.6: Korrelationskoeffizienten zur Illustration der Abhängigkeit der Stunden für Arbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 162, Sommer 176, Herbst 188 und Winter 176

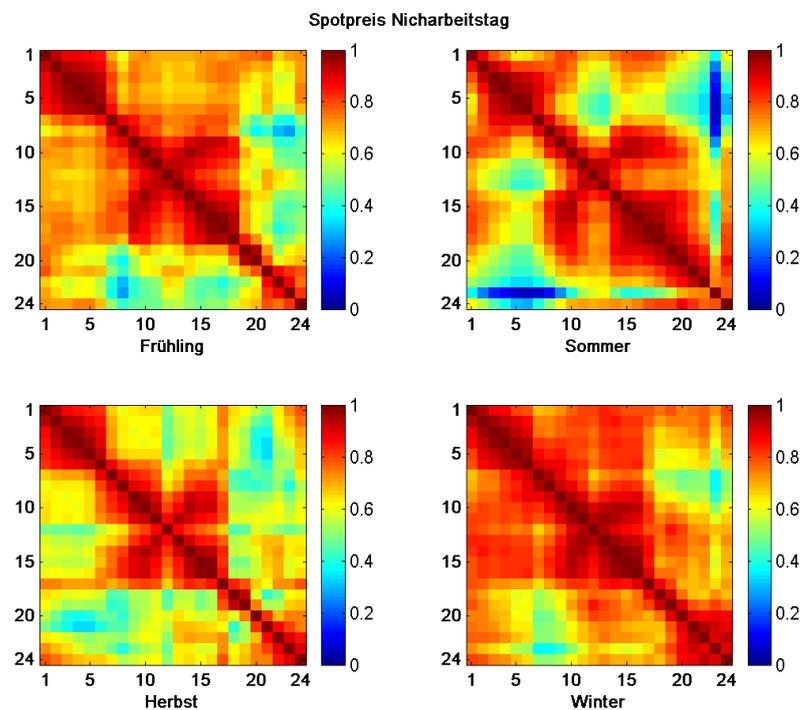


Abbildung 3.7: Korrelationskoeffizienten zur Illustration der Abhängigkeit der Stunden für Nichtarbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 83, Sommer 85, Herbst 85 und Winter 94

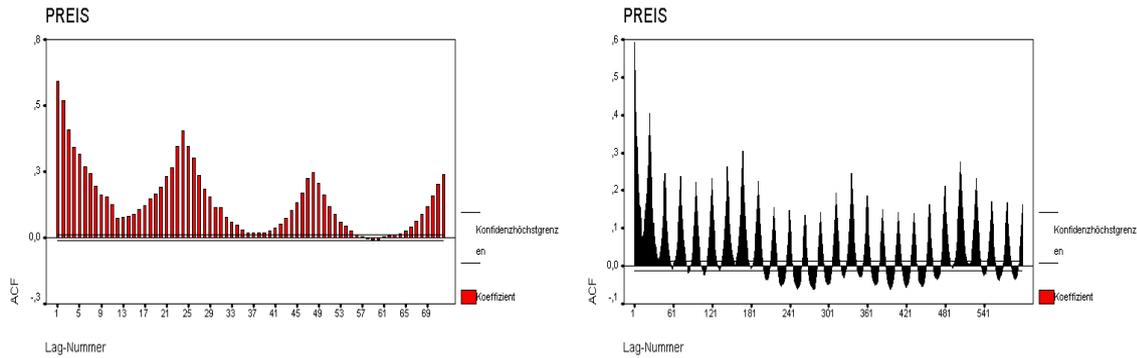


Abbildung 3.8: Die empirische Autokorrelationsfunktion des EEX-Spotpreises auf Stundenbasis für 3 Tage (links) und für mehr als 3 Wochen (rechts)

### 3.2.1 Die Nachfrage

Zur Beschreibung der Nachfrage bewährt sich der Begriff der Preiselastizität. Dieser beschreibt die Auswirkung einer Preisänderung auf die Nachfragemenge des entsprechenden Gutes. Dieser Index setzt sich zusammen aus

$$e_N = \frac{(V_1^N - V_2^N)/V_1^N}{(P_1^N - P_2^N)/P_1^N},$$

wobei  $V_1^N$  die Nachfragemenge zum Preis  $P_1^N$  und  $V_2^N$  die Nachfragemenge zum Preis  $P_2^N$  ist. Ist diese Kenngröße

- $|e_N| > 1$ , dann spricht man von einer *elastischen* Nachfrage, d.h. eine Preisveränderung um eine Einheit bewirkt eine Mengenveränderung um mehr als eine Einheit.
- $|e_N| = 1$ , dann bezeichnet man die Nachfrage als *isoelastisch*, d.h. steigt oder fällt der Preis um eine Einheit, so erfolgt eine entsprechende Veränderung der Nachfragemenge genau um eine Einheit.
- $|e_N| < 1$ , dann ist die Nachfrage *unelastisch*, die Nachfrage reagiert bei einer Preisveränderung um eine Einheit mit einer Mengenveränderung um weniger als eine Einheit.

Eine *völlig unelastische* Nachfrage liegt vor, wenn der Index  $e_N = 0$  ist. Damit kommt zum Ausdruck, dass die Nachfrage überhaupt nicht auf Preisänderungen reagiert.

Da die Liberalisierung des Stromes noch kaum Spuren bei den Endverbrauchern hinterlassen hat und die Deregulierung des Strommarktes immer noch im Fluss ist, kann man in unserem Fall die Nachfrage als völlig unelastisch betrachten. Das wiederum bedeutet, dass die Nachfrage unabhängig vom Marktpreis (siehe Abbildung 3.9) ist und folglich direkt mit dem Bedarf gleichgesetzt werden kann.

Das führt uns schließlich zur Analyse des Bedarfs. Dazu ziehen wir die Netzübergabewerte für den Großraum Graz heran. Zunächst müssen wir untersuchen, ob ein Zusammenhang zwischen diesen Bedarfsdaten und den deutschen Spotpreisen besteht. In Abbildung 3.10 sind unsere Bedarfsdaten den Spotpreisen in Form eines Scatterplots gegenübergestellt. Dabei lässt sich ein

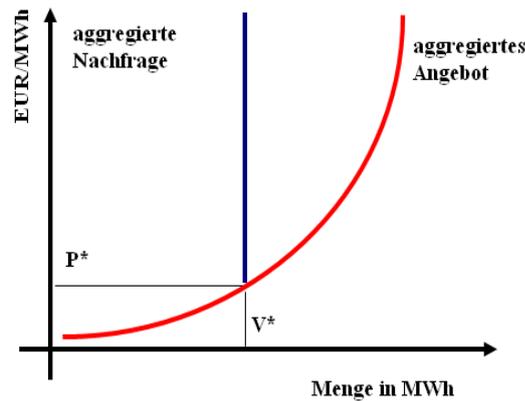


Abbildung 3.9: Völlig unelastische Nachfrage

positiver Zusammenhang erkennen. In Abbildung 3.11 werden die beiden Zeitreihen für eine Woche im August 2001 gegenübergestellt. Das typische Verhalten des Spotpreises kann mit dem Bedarf erklärt werden. Deshalb wird diese Komponente in der Modellierung der Spotpreise auch berücksichtigt.

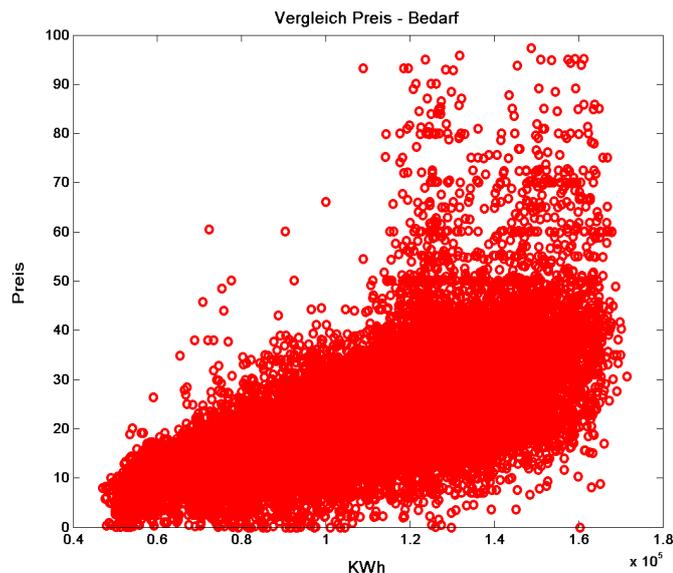


Abbildung 3.10: Der Zusammenhang zwischen den Spotpreisen und den Netzübergabewerten für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003

Im nächsten Schritt unterziehen wir die Bedarfsdaten einer genaueren Analyse. In Abbildung 3.12 ist der Verlauf der Netzübergabewerte für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 dargestellt. Hier erkennt man eindeutig die jahreszeitlichen Schwankungen. Im Sommer und Winter ist der Bedarf höher als im Frühling und Herbst.

Betrachten wir den Zeitausschnitt aus Abbildung 3.11, so sehen wir ein typisches Wochenverhalten. Innerhalb eines Arbeitstages sinkt der Bedarf bis ca. 5 Uhr, steigt bis zu Mittag an,

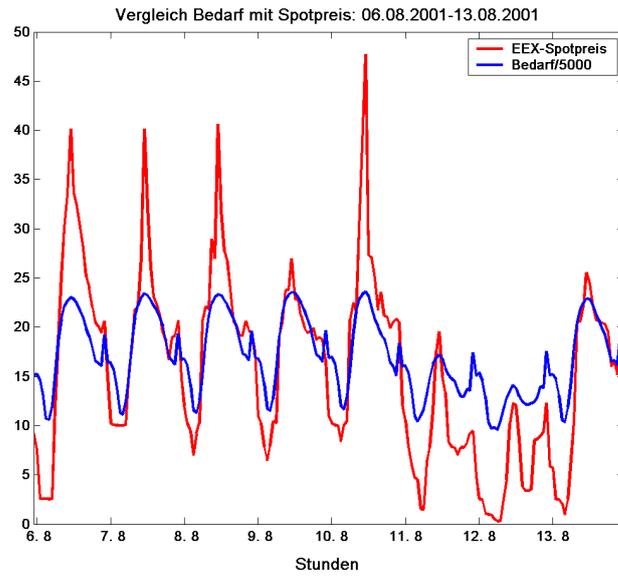


Abbildung 3.11: Spotpreis und Bedarf (skaliert) vom 06.08.2001 bis 13.08.2001

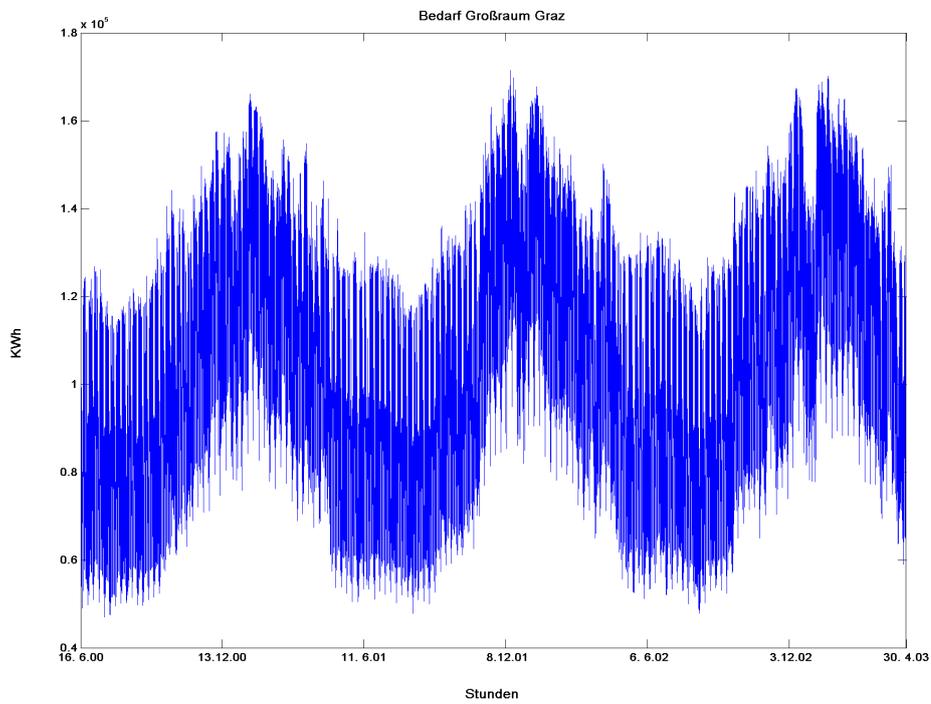


Abbildung 3.12: Der Bedarf für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003

sinkt dann wieder bis 20 Uhr, steigt danach wieder kurz an und fällt wiederum ab. An Nichtarbeitstagen verläuft der Bedarf etwas anders. Wir erhalten somit drei Saisonalitätszyklen:

- den Jahreszyklus
- den Wochenzyklus und
- den Tageszyklus.

Dass hier ebenfalls starke Abhängigkeiten anzutreffen sind, zeigen uns die Abbildungen 3.13 und 3.14, wo die empirischen Korrelationen der 24 Stunden aufgeteilt nach den Jahreszeiten und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag grafisch dargestellt sind. An Arbeitstagen ist die Interaktion zwischen den einzelnen Stunden sehr stark, wobei sie im Herbst am stärksten anzutreffen ist. An Nichtarbeitstagen fällt sie hingegen geringer aus. Hier könnte man entsprechende Cluster bilden.

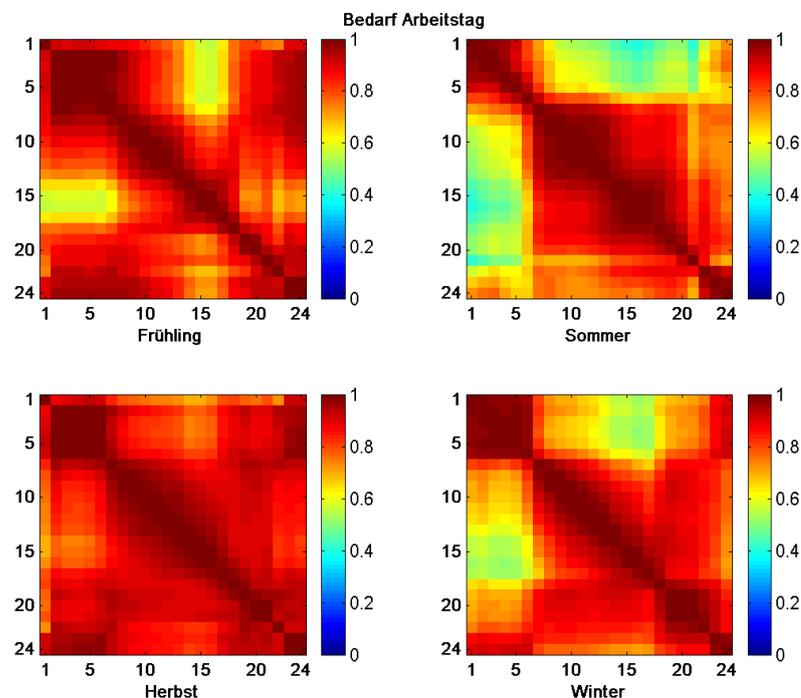


Abbildung 3.13: Korrelationskoeffizienten des Bedarfs für Arbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 162, Sommer 176, Herbst 188 und Winter 176

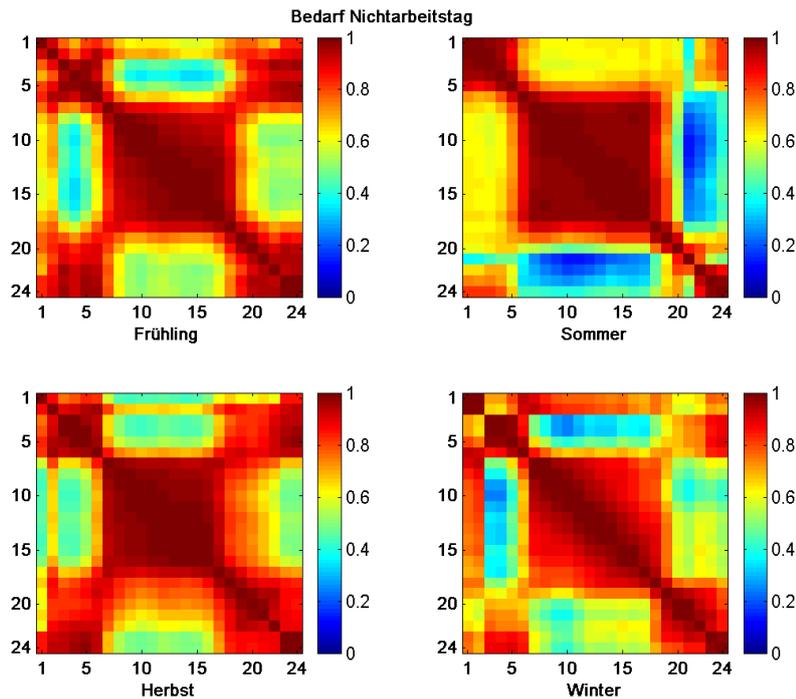


Abbildung 3.14: Korrelationskoeffizienten des Bedarfs für Nichtarbeitstage: Beobachtungen pro Zelle - Frühling 83, Sommer 85, Herbst 85 und Winter 94

### 3.2.2 Das Angebot

Im Gegensatz zur Nachfrage besitzt die Angebotsseite preiselastische Züge und reagiert in gewissen Preisregionen sofort auf Änderungen. Daher wird der marktklärende Preis von der Angebotsseite wesentlich beeinflusst. Daher hängt die Angebotskurve von ihren Vertretern ab. Diese sind Stromproduzenten, Zwischenhändler sowie Spekulanten. Bei Stromerzeugern wiederum ist die Art der Stromgewinnung ausschlaggebend für ihre Preis-Mengen Gebote. In Tabelle 3.1 ist die Zusammensetzung der Energieträger für die Stromerzeugung in Deutschland (Quelle: [48]) dargestellt.

Die Kernenergie deckt fast ein Drittel der Stromerzeugung ab. Am stärksten sind die Kohle-

Energieträger	%
Kernenergie	29,0
Braunkohle	27,0
Steinkohle	23,0
Erdgas	9,0
Wasser	5,0
Wind	3,0
Sonstige	3,0
Heizöl	1,0

Tabelle 3.1: Anteil der Energieträger in Deutschland 2002

kraftwerke vertreten, wogegen der Anteil der Wasserkraftwerke sehr gering ist. In [48] wird auch bekannt gegeben, dass die Grundleistung hauptsächlich durch Braunkohle, Kernenergie und Laufwasser (43%) abgedeckt wird, Mittel- und Spitzenleistung durch die restlichen Energieträger. Weiters erhält man in [16] den Einblick in die Vielfalt des deutschen Strommarktes. Anfang 2003 waren ca. 1100 Unternehmen auf dem Strommarkt aktiv (ohne Berücksichtigung privater Betreiber von Windanlagen und kleineren Wasserkraftwerken). Davon sind

- 700 Unternehmen reine Stromerzeuger (63, 63%)
- 100 überregionale Verbundunternehmen (9, 10%)
- 150 regionale Versorger (13, 63%)
- die restlichen 150 (13, 63%) sind größere, mittlere und kleinere Stadtwerke, kleine private Versorger, Händler und Ökostromanbieter.

Der überwiegende Anteil der Angebotsseite besteht somit aus Stromproduzenten.

Daher lässt sich die Annahme rechtfertigen, dass der Preis am Spotmarkt abhängig von der Art der Stromerzeugung und deren Flexibilität ist. Da Kernkraftwerke eine längere Anlaufzeit besitzen, scheiden sie zur Deckung von Spitzenleistungen aus. Deshalb kommen sie nur für die Grundleistung in Frage. Wogegen Gaskraftwerke, Pump- und Speicherwasserkraftwerke eher nach Bedarf eingesetzt werden können.

Ein weiterer wesentlicher Einflussfaktor auf der Angebotsseite ist auch die Verfügbarkeit der entsprechenden Kraftwerke. Auf Wartungsarbeiten kann der Markt noch eher reagieren, da diese sicherlich einige Zeit zuvor bekannt gegeben werden. Unerwartete Ausfälle jedoch führen dazu, dass der Markt kurzfristig in einem Ungleichgewicht ist, die die Angebotsseite beeinflusst und somit folglich den Spotpreis in die Höhe treiben kann. Da aber diese Ausfälle so schnell wie möglich behoben werden, erfolgt auch eine rasche Normalisierung des Marktes. Andererseits können auch verfehlte Bedarfsabschätzungen von der Angebotsseite dazu führen, dass eine Unausgewogenheit am Markt besteht.

Langfristige Einflussfaktoren, z.B. die Preisentwicklung von Rohstoffen, die in der Stromerzeugung verwendet werden, oder generell die wirtschaftliche Entwicklung des Landes, sowie die Entwicklung des Bedarfs, sind in der Preisentwicklung des Spotmarktes auch nicht zu vernachlässigen. Wenn man die gesamte Charakteristik des Spotpreises betrachtet, stellt man fest, dass viele Komponenten sowohl auf der Angebots- als auch auf der Nachfrageseite eine wichtige Rolle in der Preisfestsetzung spielen. In der Modellierung des Spotpreises sollte das berücksichtigt werden. Auf der anderen Seite soll man jedoch versuchen, das Modell so einfach wie möglich zu halten, da man darauf aufbauend Fragestellungen verschiedenster Art, z.B. in unserem Fall Bewertung von Swing-Optionen, behandeln möchte.

Im nächsten Abschnitt werden wir einen kurzen Blick auf die Modellierungsarten des Spotmarktes werfen. Weiters werden wir uns Gedanken über die Bewertung von Verträgen, die vom Spotmarkt abhängen, machen. Die Nichtspeicherbarkeit des Stromes stellt uns vor eine große Herausforderung. Klassische Instrumente der Finanzmathematik sind nicht direkt anwendbar. Aber mit der Idee von [37] lässt sich ein Zugang über den Marktpreis des Risikos motivieren, der z.B. bereits in [7] umgesetzt wurde.



# Kapitel 4

## Modellierung von Strommärkten und Bewertung von Derivativen

### 4.1 Spotpreismodelle

Der Spotpreis hat ganz charakteristische Züge und unterliegt saisonalen Schwankungen, kehrt stets auf ein mittleres Niveau zurück, entwickelt rasante Preisanstiege, die unmittelbar wieder auf das mittlere Niveau zurückfallen (Preisspikes) und lässt langfristige Einflüsse wie Rohstoffkosten und wirtschaftliche Entwicklung erahnen.

Im Zuge der Liberalisierung der Strommärkte hat sich auch die Aufmerksamkeit auf die Modellierung der Spotpreise verstärkt. In diesem Abschnitt werden wir einige Modelle vorstellen und die Einbindung der Eigenschaften des Preismodells diskutieren, da ja das Ziel dieser Arbeit unter anderem das Aufstellen eines adäquaten Preismodells ist, das einerseits die charakteristischen Eigenschaften des Spotpreises aufweist und andererseits so einfach wie möglich für andere Anwendungen wie z.B. für die Bewertung von Swing-Optionen gebaut ist.

Zunächst müssen wir eine Grundsatzentscheidung bezüglich Behandlung des Gutes Strom treffen. Am Spotmarkt werden die Preise für jede einzelne Stunde bestimmt. Somit ist es sehr nahe liegend, die Stunden als eigene Güter, die sehr stark miteinander korrelieren (siehe Abbildung 3.7 und 3.6), anzusehen. Das wiederum bedeutet, wir müssen einen 24-dimensionalen Preisprozess mit den oben genannten Eigenschaften sowie den Interaktionen innerhalb der Komponenten modellieren. Das birgt sicherlich eine Herausforderung. Ein anderer Zugang, der z.B. in [7] verwendet wird, ist die Annahme, man hat nur ein Gut (den Strom), dessen Preis auf Stundenbasis erhältlich ist. Zwar entspricht dies weniger der Realität, aber führt sicherlich zu einigen Vereinfachungen und ist auch gängig in der Literatur, wobei anzumerken ist, dass sich bisher nur einige Autoren mit der Modellierung von Spotpreisen auf Stundenbasis beschäftigt haben (siehe [7], [40], [43] und [22]).

Im ersten Schritt betrachten wir die Modellierung der Saisonalität.

#### 4.1.1 Modellierung der Saisonalität

Zur Einbindung von saisonalen Komponenten gibt es eine Vielzahl von Vorschlägen. Bezeichnen wir mit  $(S_t)_{t=0}^T$  unseren Preisprozess für den Zeitraum  $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$ , wobei die Frage der

Mehrdimensionalität zunächst außer Acht gelassen wird. Die Berücksichtigung der Saisonalität kann dann z.B. in Form einer deterministischen Funktion erfolgen, d.h.

$$S_t = g(f(t), X_t),$$

wobei die Funktion  $g(\cdot, \cdot)$  die Struktur des Preisprozesses bestimmt,  $f(t)$  die deterministische Funktion und  $X_t$  die stochastische Komponente beschreibt. Als deterministische Komponente wird z.B. in [35], wo der mittlere Tagespreis betrachtet wird, eine Funktion mit Dummy-Variablen vorgeschlagen

$$f(t) = \alpha + \beta_0 D_t + \sum_{j=1}^{11} \beta_j M_t^j,$$

wobei

$D_t$  der Indikator für Arbeitstag

$M_t^j$  der Indikator für Monat  $j$ ,  $j = 1, \dots, 11$  und

$\alpha$  das Ausgangsniveau für Nichtarbeitstag im Monat Dezember ist.

Natürlich kann diese Funktion auf den entsprechenden Preisprozess adaptiert werden, z.B. durch Einbinden von Wochentagen, eines zeitlichen Trends, von expliziten Feiertagen, Feiertagen, etc. Weiters findet man in [35] und [21] deterministische Funktionen mit Sinus und Kosinus Komponenten für die Saisonalität, z.B. schlugen die Autoren von [21] vor:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma \cos(\epsilon + 2\pi \frac{t}{260}) + \delta \cos(\zeta + 4\pi \frac{t}{260}),$$

wobei hier nur Preise auf Tagesbasis für die Wochentage ( $52 \times 5$  pro Jahr) betrachtet werden.

Die Einbindung der Saisonalität in Form einer deterministischen Komponente lässt viele Möglichkeiten zu. Aber es wird sich zeigen, dass dadurch nicht die gesamte Saisonalität abgedeckt wird, also eine gewisse regelmäßige stochastische Variation vorliegt. Diese kann man z.B. mit entsprechenden SARIMA-Zeitreihen modellieren (siehe [7]).

### 4.1.2 Mean Reversion

Die Rückkehr auf ein mittleres Niveau, die eben sehr typisch für den Spotpreis ist, lässt sich z.B. im eindimensionalen durch einen stationären autoregressiven Prozess erster Ordnung abbilden, dies ist die diskretisierte Form der stochastischen Differentialgleichung für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess (siehe [29], [35] und [39]). Die Autoren von [35] setzen als Preismodell folgende Gleichung an:

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(f(t) + X_t) \\ X_t &= \rho X_{t-1} + \epsilon_t, \end{aligned}$$

wobei  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  und  $|\rho| < 1$ . Im mehrdimensionalen kann man entsprechend agieren. Auch mit SARMA-Prozessen kann die Berücksichtigung der Mean Reversion Eigenschaft erfolgen. Die Autoren von [7] arbeiten mit SARMA-Prozessen mit Periode 24.

Einen anderen Ansatz verfolgen die Autoren von [22], die den neuseeländischen Spotmarkt

(New Zealand Electricity Market - NZEM), der den Strom sogar in halbstündlichen Einheiten handelt, betrachten. Sie modellieren die Preise 48-dimensional, zunächst mit *PAR*-Modellen (periodischen autoregressiven Modellen), die – folgen wir der Nomenklatur von [22]– folgende Struktur haben. Sei  $p_{n,t}$  der Preis der Halbstunde  $n$  des Zeitpunktes  $t$ , dann lautet das Modell:

$$\begin{aligned}
 p_{1,t} &= \beta_{1,1}p_{48,t-1} + \beta_{1,2}p_{47,t-1} + \cdots + \beta_{1,48}p_{1,t-1} + \sum_{i=1}^7 \alpha_{1,i}d_{i,t} + \sum_{j=1}^{23} \gamma_{1,j}m_{j,t} + u_{1,t} \\
 p_{2,t} &= \beta_{2,1}p_{1,t} + \beta_{2,2}p_{48,t-1} + \cdots + \beta_{2,48}p_{2,t-1} + \sum_{i=1}^7 \alpha_{2,i}d_{i,t} + \sum_{j=1}^{23} \gamma_{2,j}m_{j,t} + u_{2,t} \\
 &\vdots \\
 p_{47,t} &= \beta_{47,1}p_{46,t} + \beta_{47,2}p_{45,t} + \cdots + \beta_{47,48}p_{47,t-1} + \sum_{i=1}^7 \alpha_{47,i}d_{i,t} + \sum_{j=1}^{23} \gamma_{47,j}m_{j,t} + u_{47,t} \\
 p_{48,t} &= \beta_{48,1}p_{47,t} + \beta_{48,2}p_{46,t} + \cdots + \beta_{48,48}p_{48,t-1} + \sum_{i=1}^7 \alpha_{48,i}d_{i,t} + \sum_{j=1}^{23} \gamma_{48,j}m_{j,t} + u_{48,t},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei

$$u_t \sim N(0, \Omega)$$

und  $d_{i,t}$  Wochendummy- und  $m_{j,t}$  Monatsdummyvariablen sind. Der Aufwand der Schätzung der unbekannt Parameter dieses Modells verringert sich beträchtlich, wenn sich die Varianz-Kovarianzstruktur der stochastischen Komponenten  $u_t$  auf eine Diagonalmatrix reduziert. Dadurch ist es möglich, die Preise  $p_{n,t}$  separat zu schätzen (siehe auch [36]).

Die Anzahl der geschätzten Parameter ist sehr groß und bestimmte Charakteristiken des Preisprozesses (Preisspikereffekte, zeitabhängige Volatilität, jahreszeitliche Saisonalitäten) sind nicht berücksichtigt. Bei vollständigem Ausschöpfen des Modells (4.1) beträgt die Anzahl der Parameter 2832. Dies stellt bei kurzen Zeitreihen ein Problem dar, wie dies bei deregulierten Strommärkten meist der Fall ist. Natürlich kann man nach eingehender Analyse gewisse Abhängigkeitsannahmen straffen, z.B. dass der Preis von Halbstunde  $n$  zum Zeitpunkt  $t$  nur von den Gütern  $n - 1$  und  $n - 2$ , sowie von einigen Gütern am Vortag abhängt. Dadurch können andere fehlende Komponenten modellmäßig eingebaut werden. Doch die Kalibrierung wird dadurch nicht einfacher.

Durch dieses Problem motiviert schlagen die Autoren von [22] ein spezielles Zustandsraummodell vor, dass die Güter eines Tages in spezielle Untermärkte einteilt, die mit Interaktionen untereinander verbunden sind:

$$p_{n,t} = \delta_n + \sum_{i=1}^6 \alpha_i d_{i,t} + \sum_{j=1}^{11} \gamma_j m_{j,t} + s_{k_n,t} + \theta_{n,t}, \text{ wobei } \theta_{n,t} \sim N(0, \phi_n^2), \tag{4.2}$$

und  $k_n$  angibt, zu welcher Marktgruppe das Gut  $n$  gehört, und  $s_{k_n,t}$  das Modell für die entsprechende Marktgruppe ist.

Der Preis  $p_{n,t}$  des Gutes  $n$  zum Zeitpunkt  $t$  setzt sich also aus dem Grundpreis  $\delta_n$ , der bezüglich

der wöchentlichen  $\alpha_i d_{i,t}$  und monatlichen  $\gamma_j m_{j,t}$  Effekte variiert, dem Preisverhalten  $s_{k_n,t}$  der Marktgruppe  $k_n$  und einer zusätzlichen Störgröße  $\theta_{n,t}$  zusammen, wobei in [22] die Halbstunden zu folgenden vier Marktgruppen zusammengefasst werden:

$$k_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \dots, 14, \\ 2 & \text{falls } n = 15, \dots, 18, \\ 3 & \text{falls } n = 19, \dots, 33, 38, \dots, 48, \\ 4 & \text{falls } n = 34, \dots, 37, \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} s_{1,t} &= \beta_{1,1}s_{4,t-1} + \beta_{1,2}s_{3,t-1} + \beta_{1,3}s_{2,t-1} + \beta_{1,4}s_{1,t-1} + \epsilon_{1,t}, \\ s_{2,t} &= \beta_{2,1}s_{1,t} + \beta_{2,2}s_{4,t-1} + \beta_{2,3}s_{3,t-1} + \beta_{2,4}s_{2,t-1} + \epsilon_{2,t}, \\ s_{3,t} &= \beta_{3,1}s_{2,t} + \beta_{3,2}s_{1,t} + \beta_{3,3}s_{4,t-1} + \beta_{3,4}s_{3,t-1} + \epsilon_{3,t}, \\ s_{4,t} &= \beta_{4,1}s_{3,t} + \beta_{4,2}s_{2,t} + \beta_{4,3}s_{1,t} + \beta_{4,4}s_{4,t-1} + \epsilon_{4,t}, \\ \epsilon_{k,t} &\sim N(0, \sigma_k^2). \end{aligned}$$

Zur Schätzung der Parameter, 138 an der Zahl, wird die Likelihood-Maximierung mittels Kalmanfiltertechnik (siehe [26]) verwendet.

Die Anzahl der Parameter ist jedoch noch immer groß und es fehlen charakteristische Eigenschaften des Spotmarktes (zeitabhängige Volatilität, Preisspikereffekte). Die Idee der Zustandsraummodelle hat bei uns dennoch großen Anklang gefunden, da man bei dieser Form von Modellen eben spezielle Abhängigkeitsstrukturen berücksichtigen kann. Doch die Schätzung der Parameter stellt eine unüberwindbare Hürde dar, wenn man alle wesentlichen Komponenten des Preisprozesses berücksichtigen und mit klassischer Schätztheorie arbeiten möchte.

### 4.1.3 Zeitabhängige Volatilität

Die Fluktuationen der Spotpreise zeigen zeitabhängige Strukturen. Im Sommer und Winter scheinen sie volatiliter als im Frühling und Herbst zu sein. Durch eine GARCH-Komponente im Preisprozess kann eine zeitabhängige Volatilität mitberücksichtigt werden. In [17] wird als Modell ein AR(1)-GARCH(1,1)-Prozess herangezogen:

$$\begin{aligned} S_t &= f(t) + X_t \\ X_t &= \rho X_{t-1} + \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(X_{t-1} - \rho X_{t-2})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

wobei  $\eta_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ . Der Nachteil von GARCH-Prozessen ist, dass sie zu jedem Zeitpunkt eine andere Volatilität, die vom Verlauf der Vergangenheit abhängt, erzeugen, wogegen der Spotpreis nur saisonale Volatilitäten aufweist. Eine entsprechende Alternative wären allgemeine Zustandsmodelle der Form

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(f(t) + X_t) \\ X_t &= H_t \alpha_t + A_t x_t + D_t \epsilon_t, \\ \alpha_t &= \phi_t \alpha_{t-1} + \Gamma_t x_t + G_t \eta_t \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_t, \phi_t, x_t, \Gamma_t, G_t, H_t, A_t, D_t$ , und die stochastischen Störgrößen  $\eta_t$  und  $\epsilon_t$  entsprechende zeitabhängige Strukturen aufweisen. Hier kann man durch entsprechendes Setzen der Parameter die Volatilität gezielt einbringen.

Auf der Suche nach alternativen Ansätzen stießen wir auf die Arbeit [43], in der mit Hilfe der Hauptkomponentenmethode eine Dimensionsreduktion durchgeführt wird. Dabei wird zunächst von der tatsächlichen Preisentstehung ausgegangen und die Nachfrage und Angebotsseite unter der Annahme, dass die Nachfrage vollkommen unelastisch ist, modelliert. Dadurch kann man den Bedarf gleich der Nachfrage setzen. Weiters nimmt man an, dass die aggregierte Angebotskurve für die einzelnen Stunden von exponentieller Gestalt ist, wobei die Steigung für alle Stunden gleich bleibt und nur das Anfangsniveau variiert. Somit ist das Modell des Spotpreises zur Stunde  $h$  am Tag  $t$  durch

$$S_t(h) = \exp(aL_t(h) + B_t(h)) \quad (4.3)$$

gegeben, wobei

- $L_t(h)$  der Bedarf zur Stunde  $h$
- $a$  der Gestaltparameter der Angebotskurve und
- $B_t(h)$  das Anfangsniveau des Angebotes zur Stunde  $h$  ist.

In der Modellierung wird der Preisprozess  $S_t$  24-dimensional betrachtet, wobei die  $h$ -te Komponente des Preisprozesses  $S_t$  durch (4.3) beschrieben wird. Zusammengefasst sind der Bedarf  $L_t \in \mathbb{R}^{24}$  und das Anfangsniveau  $B_t \in \mathbb{R}^{24}$  die wesentlichen Komponenten, die im weiteren Schritt stochastisch modelliert werden. Zunächst wird mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse die Dimension des Problems reduziert, sowohl auf der Nachfrageseite ( $L_t$ ) als auch auf der Angebotsseite ( $B_t$ ), wobei die Varianz-Kovarianzstruktur der 24 Stunden monatlich und nur unter Berücksichtigung der Wochentage Montag bis Freitag betrachtet und in latente Faktoren zerlegt wird. Anschließend werden die entsprechenden ersten  $k$  Hauptkomponenten – wir bezeichnen sie nach [43] hier allgemein mit  $w_t^i$  – mit einem Zwei-Faktorenmodell der Form

$$\begin{aligned} e_{t+1}^i - e_t^i &= -\alpha e_t^i + \sigma_t^i \epsilon_t^i \\ \delta_{t+1}^i - \delta_t^i &= \kappa^i + \sigma_\delta^i \eta_t^i \end{aligned}$$

und

$$w_t^i = e_t^i + \delta_t^i \text{ für } i = 1, \dots, k \quad (4.4)$$

stochastisch modelliert. Die Autoren in [43] sprechen von einem *Bid-based Stochastic Model*.

Bei diesem Ansatz wird die Idee der zeitabhängigen Volatilität durch die Analyse der monatlich aufgesplitterten Varianz-Kovarianzstrukturen eingebunden. Durch die Hauptkomponentenmethode wird das hoch dimensionale Problem auf einige wenige Faktoren reduziert, welche die Eigenschaften des Modells noch gut abbilden können. Im Gegensatz zu Zustandsraummodellen werden die latenten Faktoren, das sind die ermittelten Hauptkomponenten, als beobachtete Realisationen angenommen und durch ein entsprechendes Modell (siehe (4.4)) kalibriert.

Aus Sicht der praktischen Anwendung ist diese Modellierungsart schnell umsetzbar, da die hoch dimensionale Parameterschätzung vermieden und dadurch die Aufstellung des Modells erleichtert wird. Daher werden wir diesen Ansatz in Kapitel 5 weiterverfolgen und ihn für unser Problem entsprechend modifizieren.

#### 4.1.4 Modellierung von Preisspikes

Die bisherigen Modelle haben die Sprungkomponente, besonders die auf Strommärkten vertreten ist, noch nicht berücksichtigt. Zu deren Einbindung gibt es ebenfalls Modellierungsvorschläge. In [1] wird ein nichtlinearer Zusammenhang des Preises zwischen Nachfrage und Angebot angenommen

$$\begin{aligned} S_t &= \begin{cases} f_\alpha(X_t) & 1 + \alpha X_t > \epsilon_0 \\ \epsilon_0^{1/\alpha} & 1 + \alpha X_t \leq \epsilon_0 \end{cases} \\ dX_t &= -\lambda(X_t - a)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (1 + \alpha x)^{1/\alpha} \text{ für } \alpha \neq 0 \\ f_0(x) &= \exp(x) \text{ sonst.} \end{aligned}$$

$X_t$  ist ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess, wenn man sich in einer stetigen Zeitumgebung befindet und  $\epsilon_0$  ist die untere Preisschranke. Dieser nichtlineare Zusammenhang bewirkt für kleine  $\alpha$  ein stärkeres Preisspikeverhalten. Der Nachteil dieses Modells liegt in der Berechnung der Momente. Eine geschlossene Form für ein allgemeines  $\alpha$  ist nämlich nicht mehr möglich.

Andere Autoren ([17] und [21]) verwenden spezielle Sprungprozesse mit konstanter (siehe [17]) oder mit zeitabhängiger Sprungintensität (siehe [17] und [21]). Die Autoren von [21] verwenden folgendes Modell, betrachtet in stetiger Zeit und kalibriert in diskreter Zeit:

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(X_t), \\ dX_t &= \frac{\partial f(t)}{\partial t} dt + \theta(f(t) - X_t^-)dt + \sigma dW_t + h_t^- dJ_t, \end{aligned}$$

wobei  $f(t)$  die saisonale Komponente,  $W_t$  die Brownsche Bewegung,  $J_t$  die Sprungkomponente (zusammengesetzter Poissonprozess mit zeitabhängiger Intensität) und  $h_t^-$  die Sprungrichtung ist. Die Sprunghöhe wird hier mit einer abgeschnittenen exponentialverteilten Zufallsgröße modelliert.

In [17] werden einige Modellvarianten vorgestellt, einerseits mit einer Sprungkomponente, deren Sprunghöhe mit einer normalverteilten Zufallsvariable modelliert wird, andererseits ohne. Weiters gibt es auch die Kombination AR(1)-GARCH(1,1) mit Sprungkomponente und zeitabhängiger Sprungintensität:

$$\begin{aligned} S_t &= f(t) + X_t, \\ X_t &= \begin{cases} \rho X_{t-1} + \sigma_t \eta_t & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \lambda_t, \\ \rho X_{t-1} + \sigma_t \eta_t + \mu_J + \sigma_J \epsilon_t & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \lambda_t, \end{cases} \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(X_{t-1} - \rho X_{t-2})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

wobei  $\eta_t$  und  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ .

Eine attraktive Alternative zum Sprungprozess ist das *Markov-Regime-Switching* (siehe [24]),

[27], [29] und [32]). Hier geht man davon aus, dass der Preisprozess sich in verschiedenen Zuständen befinden kann. In [29] gibt es den Normal- und den Spikezustand, dessen Verhalten durch ein spezielles Modell beschrieben wird. Die Zuteilung des Zustandes wird mit Hilfe einer Markovkette modelliert, die jedoch nicht beobachtbar ist. In Abbildung 4.1 ist eine mögliche Interaktion dargestellt.

Dieser Modellierungsansatz ist sehr intuitiv. Preisspikes entstehen durch unerwartete Ausfälle von Generatoren, Erhöhung von Rohstoffpreisen oder durch unerwartet hohe Temperaturen etc. Meist sind diese Informationen für den Kunden nicht erhältlich oder lassen sich nur erraten. Sie sind jedoch maßgeblich bei der Preisfestsetzung. Nun können wir mit Hilfe eines Schalters oder Indikators diese Information in unser Modell einfließen lassen. Falls sich der Schalter in einem bestimmten Zustand befindet, verhält sich der Preis nach bestimmten Vorgaben, die wir modellieren. Man spricht von *Hidden Markov* Modellen, da dieser Schalter (i) nicht beobachtbar ist und (ii) mit einer Markovkette, meist homogen, abgebildet wird.

Mit Regime-Switching hat sich unter anderem Hamilton (siehe [23], [24] und [25]) beschäftigt. Er führte das *Markov-Switching* Autoregressionsmodell ein

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i(Z_t)X_{t-i} + \sigma(Z_t)\epsilon_t,$$

wobei  $Z_t$  eine homogene Markovkette, und  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$  ist. In [32] wird die Verallgemeinerung auf Zustandsraummodelle mit Markov-Switching beschrieben.

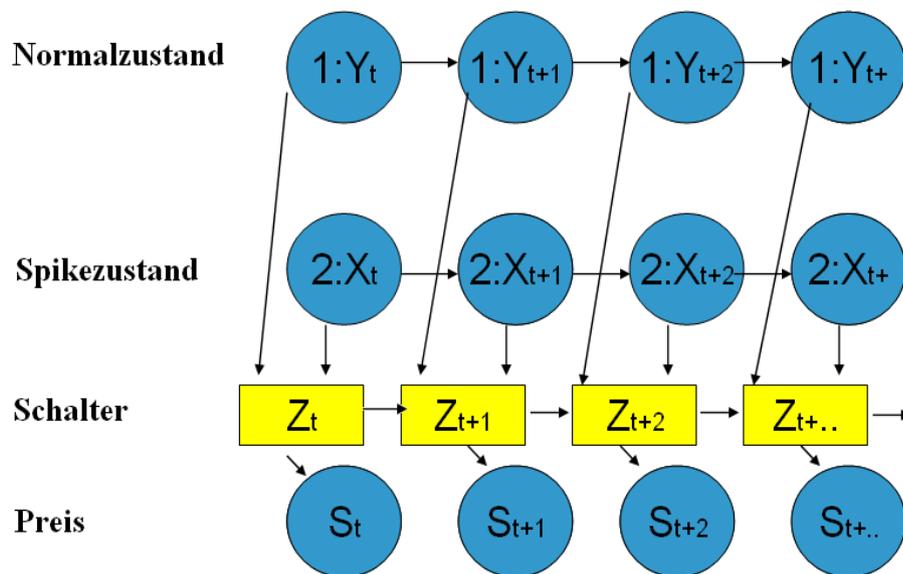


Abbildung 4.1: Beispiel eines Regime-Switching

### 4.1.5 Langfristige Schwankungen

Abschließend möchten wir noch eine Komponente ins Spiel bringen, die uns die langfristigen Entwicklungen bei der Preismodellierung beschreibt. Da wir Aspekte wie wirtschaftliche Entwicklung, Rohstoffverfügbarkeit, langfristige Bedarfsfragen und Forschungsfortschritte nicht

konkret modellieren können, weil diesbezüglich keine Informationen vorhanden sind, werden sie gewöhnlich in Form eines stochastischen nichtstationären Prozesses abgebildet. Nichtstationär deswegen, weil sich die Unsicherheiten der oben genannten Entwicklungen in den Forwardpreisen widerspiegeln und gleichzeitig ein natürlicher Bezug zu den Spotpreisen hergestellt werden soll. Der Forwardpreis setzt sich zwar zum Zeitpunkt  $t$  für einen Lieferzeitraum  $[T_1, T_2)$  (bei diskreter Zeitbetrachtung) aus

$$F_{t,T_1,T_2} = \mathbb{E}_Q \left[ \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{T=T_1}^{T_2-1} S_T | \mathcal{F}_t \right]$$

zusammen, wobei  $\mathcal{F}_t$  die Information bis zum Zeitpunkt  $t$  und  $\mathbb{E}_Q[\cdot]$  die Erwartung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Deshalb wird in [39] ein Modell der Form

$$\begin{aligned} dS_t &= -\lambda(S_t - A_t)dt + \sigma_1 S_t dW_t^{(1)}, \\ dA_t &= \mu A_t dt + \sigma_2 A_t dW_t^{(2)}, \end{aligned}$$

wobei  $W_t^{(1)}$  und  $W_t^{(2)}$  unkorrelierte Brownsche Bewegungen sind, vorgeschlagen. Einen ähnlichen Ansatz findet man in [41].

Auch die Autoren von [7] stellen über die langfristigen Schwankungen einen Zusammenhang zu den Forwardpreisen her. Gleichzeitig führen sie ein risikoneutrales Maß über den Marktpreis des Risikos (im engl. *market price of risk*) ein. Da wir diesen Ansatz sehr interessant finden und ihn auf unser Modell später übertragen können, gehen wir hier auf diese Vorgehensweise im nächsten Abschnitt näher ein und diskutieren die Bewertung von Stromderivaten.

## 4.2 Die Bewertung von Stromderivaten

Produkte in der Finanzwelt lassen sich im Allgemeinen in zwei Kategorien einteilen und zwar (i) in die zugrunde liegenden Güter (z.B. Aktien, Wechselkurse, Rohstoffe etc.), die selbst handelbar (z.B. Aktien) sein können und (ii) ihre Derivate, Verträge, die aufgrund des zugrunde liegenden Gutes Auszahlungen in bestimmter Form regeln.

Auf vielen Märkten ist das Handeln des zugrunde liegenden Gutes und deren Derivate sehr gängig, im Gegensatz zu den Strommärkten. Im Zuge der Liberalisierung rücken jedoch wirtschaftliche Aspekte in Energiedienstleistungsunternehmen immer stärker in den Vordergrund. So haben die Großhandelspreise (Wholesale-Market) bereits einen zentralen Stellenwert für die Profitabilität gewonnen. Die Beschäftigung mit rein physikalischen Aspekten geht deutlich zurück. Neue Produkte am Großhandelsmarkt entstehen. Nicht nur der Spothandel (Handel mit kurzfristigen Energielieferungen), sondern auch der Forwardhandel (Handel mit langfristigen Produkten bis 3 Kalenderjahre in die Zukunft) haben an Bedeutung gewonnen. Seit 1. Jänner 2005 werden auf dem EEX-Markt nicht nur Forwardprodukte sondern auch europäische Optionen auf Forwards gehandelt.

Auch flexible Produkte wie die Swing-Option gewinnen für die Risikominimierung an Bedeutung. Eine Swing-Option ist ein Vertrag, der dem Kunden erlaubt unter gewissen Restriktionen auszuwählen, wann er die elektrische Energie abrufen möchte. Die Standardrestriktionen solcher Produkte können die maximale Energiemenge, der Anmeldezeitpunkt für den gewünschten

Energiebezug (normalerweise bis ein Tag davor), die maximale Leistung, und die Leistungsschritte sein. Zusatzrestriktionen wie eine Vorgabe der minimalen abzunehmenden Energiemengen, eine minimal abzunehmende Leistung, oder sogar spezielle Zeitfunktionen als obere und untere Grenzen, innerhalb derer die Leistung abgerufen werden kann, können in Betracht gezogen werden.

Der Strommarkt und seine darauf aufbauenden Produkte verhalten sich ähnlich wie Finanz- oder andere Rohstoffmärkte. Nur ein wesentlicher Unterschied liegt zwischen diesen beiden Bereichen. Strom ist nicht lagerbar, d.h. bezieht man Strom, so muss dieser sofort verbraucht werden.

Dies stellt nun ein Problem in der Preisfestsetzung von Derivativen, das sind Produkte, die auf den Strompreis basieren, dar. In der klassischen Finanzmathematik spricht man bei der Preisfestsetzung für ein Derivat von einem fairen Preis, der gleich dem Anfangswert eines selbstfinanzierenden Portfolios – bestehend aus dem zugrunde liegenden Gut und einer risikolosen Anleihe (siehe [3], [13] und [42]) – sein muss. Am Ende der Laufzeit liefert dieses Portfolio den Ertrag des Derivats. Mit diesem Preis kann keine Arbitrage (risikoloser Gewinn) erzeugt werden. Weiters spricht man auch von einer risikoneutralen Bewertung. Risikoneutral deswegen, weil man eben durch entsprechendes Kaufen und Verkaufen des zugrunde liegenden Gutes ohne Geld von außen zuzufügen bzw. abzuzweigen, risikolos den Wert der Auszahlung des Vertrages erwirtschaftet.

Nun sieht man schon das Problem bei Strommärkten. Da Strom nicht lagerbar ist, kann dieser nicht gekauft und später wieder verkauft werden. Strom als direktes Gut einzusetzen ist somit nicht möglich.

Dennoch hat sich in diesem Forschungsbereich sehr viel getan. Dabei haben sich zwei Zugangsmöglichkeiten bei der Modellierung, die stochastisch erfolgt, heraus kristallisiert. Anstatt den Strommarkt direkt zu modellieren und davon den Forwardpreis abzuleiten, wird der Forwardpreis direkt modelliert. Diese Idee geht zurück auf [6]. Dabei wird die Zinstheorie verwendet (z.B. Heath-Jarrow-Morton Modell), um die gesamte Forwardkurve zu modellieren (siehe [9] oder [10]). Da Forwards handelbar sind, kann man die Standardmethoden der risikoneutralen Preisfestsetzung anwenden. Weiters wird oft ein vollständiger Markt angenommen, bei dem es einen einzigen fairen Preis gibt. Die Bestimmung des fairen Preises ist gleichbedeutend mit der Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes, unter dem der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Der faire Preis ist dann nichts anderes als der Erwartungswert der diskontierten Auszahlungsfunktion unter diesem Maß. Von einem vollständigen Markt spricht man, wenn es genau ein einziges Martingalmaß gibt (siehe dazu u.a. [3], [13], [38] und [42]). Der Nachteil dieser Modelle liegt in der geringen Liquidität der Forwards. Es werden nur bestimmte Lieferzeiträume gehandelt. Zum Beispiel werden auf dem EEX-Markt Forwards mit einem Lieferumfang von einem Monat, einem Quartal und einem Jahr bis zu drei Jahren in der Zukunft gehandelt. Diese Modelle geben keinen Aufschluss auf das Preisverhalten auf Tages- bzw. Stundenbasis, dies aber wäre bei vielen Produkten wie z.B. bei der Swing-Option von Nöten.

Das andere Konzept geht von der Modellierung des Spotpreises aus und stellt die arbitragefreie Beziehung zwischen Spotpreis und Forwardpreis über eine zusätzliche Annahme des Modells durch Einbinden eines Marktpreises des Risikos her (siehe [7]). Dieser Ansatz erweist sich

als sehr praktikabel. Normalerweise ist die Vorgehensweise für die Preisberechnung (i) Aufstellen eines stochastischen Marktmodells, (ii) Bestimmen des äquivalenten Martingalmaßes und (iii) Bewertung des Derivates bezüglich dieses Maßes, d.h. es ist der Erwartungswert der Auszahlungsfunktion (diskontiert) bezüglich dieses Maßes zu berechnen. Wir gehen nun aber umgekehrt vor. Wir betrachten am Markt befindliche Derivate, in unserem Fall sind dies nur die Forwards, haben ein Modell für den Preisprozess  $S_t$  und bestimmen nun das äquivalente Martingalmaß implizit über die Beziehung

$$F_{t,T} = \mathbb{E}_Q[S_T | \mathcal{F}_t],$$

indem wir es mit Hilfe der Forwardpreise kalibrieren. Dazu müssen wir aber eine zusätzliche Annahme über das Marktmodell bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes treffen, da in unserem Modell mehrere Risikoquellen vorhanden sind. Haben wir ein solches Maß bestimmt, können wir dieses auf andere Derivate anwenden. Somit wird zwar ein arbitragefreier Preis ermittelt, dieser ist aber nicht eindeutig, da der Markt aufgrund der Modellannahmen nicht vollständig ist.

Die meisten Modelle für den Spotmarkt enthalten mehrere Risikofaktoren, die einerseits die kurzfristigen Schwankungen abdecken, die durch Nachfrage und Bedarf entstehen, und andererseits die langfristigen Schwankungen, die wie bereits erwähnt Wirtschaftswachstum etc. beinhalten und meist auf Futuremärkten beobachtet werden können. Da es aber für die kurzfristigen Schwankungen keine liquiden Produkte zum Handeln gibt, ist es sehr schwer dafür den Marktpreis des Risikos zu ermitteln. Daher wird es einer weiteren Annahme bedürfen. Die meisten Konzepte wählen einen Marktpreis des Risikos von Null für gewisse (nicht handelbare) Faktoren wie z.B. Sprungkomponenten (siehe [37]). Auch wir werden diesen Zugang wählen und unsere kurzfristigen Schwankungen mit einem Marktpreis des Risikos von Null ansetzen. Für die langfristige Komponente werden wir den Marktpreis über die Forwardpreise kalibrieren. Dazu werden wir den Ansatz aus [7] übernehmen und auf unser Modell adaptieren.

Zunächst stellen wir das Modell von [7], das den Strom als ein Gut, das auf Stundenbasis betrachtet wird, vor. Es besteht aus drei stochastischen Komponenten

- dem Bedarf  $L_t$ ,
- den kurzfristigen Schwankungen  $X_t$  und
- der langfristigen Schwankung  $Y_t$ ,

die in diskreter Zeit auf Stundenbasis verlaufen und den Preis wesentlich gestalten, wobei der Bedarf  $L_t$  über einen nichtlinearen Zusammenhang  $f(\cdot/v_t, t)$  in den Preisprozess eingeht. Die Größe  $v_t$  spiegelt die relative Verfügbarkeit von Stromgeneratoren, die im Sommer, weil hier die meisten Wartungen stattfinden, geringer als im Winter ist. Diese Information wird in Form einer deterministischen Funktion berücksichtigt. Der nichtlineare Übergang wird mittels eines kubischen Splines ermittelt.

Das Modell für den Preisprozess lautet

$$\begin{aligned}
 S_t &= e^{f(L_t/v_t)+X_t+Y_t}, L_t = l(t) + L'_t, \\
 L'_t &= \phi_1 L'_{t-1} + \phi_{24} L'_{t-24} - \phi_1 \phi_{24} L'_{t-25} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_{24} \epsilon_{t-24} + \theta_1 \theta_{24} \epsilon_{t-25}, \\
 X_t &= \tilde{\phi}_1 X_{t-1} + \tilde{\phi}_{24} X_{t-24} - \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_{24} X_{t-25} + \tilde{\epsilon}_t - \tilde{\theta}_1 \tilde{\epsilon}_{t-1} - \tilde{\theta}_{24} \tilde{\epsilon}_{t-24} + \tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_{24} \tilde{\epsilon}_{t-25}, \\
 Y_t &= Y_{t-1} + (\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_Y^2) + \sigma_Y \hat{\epsilon}_t,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei  $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ ,  $\tilde{\epsilon} \sim N(0, \tilde{\sigma})$  und  $\hat{\epsilon} \sim N(0, 1)$ -verteilt und unkorreliert sind. Die Funktion  $l(t)$  stellt die deterministische Komponente des Bedarfs dar. Die drei stochastischen Komponenten  $L_t$ ,  $X_t$  und  $Y_t$  werden unabhängig von einander betrachtet. Auf die Schätzung der Parameter gehen wir hier nicht näher ein. Wir verweisen auf [7].

Im nächsten Schritt wird der Zusammenhang zu den Forwardpreisen hergestellt und somit das äquivalente Martingalmaß bestimmt. Da wir in dieser Arbeit ebenfalls deterministische Zinsraten annehmen werden, brauchen wir in Zukunft keine Unterscheidung zwischen Forwards und Futures machen. Wie bereits erwähnt, werden diese Verträge auf den EEX-Terminmarkt auf Monats-, Quartals- und Jahresbasis für ganztägige Lieferungen oder für Peak-Zeiten gehandelt. Stromlieferungen für einzelne Stunden werden nur auf dem Spotmarkt, einen Tag im Voraus, angeboten. Da der Strom aber nicht lagerbar ist, können Produkte des Spotmarktes nicht fürs Hedgen herangezogen werden. Der Markt ist unvollständig und illiquid. Daher wird die Idee des Marktpreisrisikos mit zusätzlichen Annahmen aufgegriffen. Jeder Risikofaktor wird geschätzt. Anschließend wird das entsprechende risikoneutrale Martingalmaß derart bestimmt, dass die Beziehung

$$F_{t,T} = \mathbb{E}_Q[S_T | \mathcal{F}_t] \tag{4.6}$$

gilt. Der Preisprozess (4.5) wird von drei stochastischen Einflüssen geprägt, wobei wir dies in (i) kurzfristige ( $L_t$  und  $X_t$ ) und (ii) langfristige Risikofaktoren ( $Y_t$ ) einteilen können, wobei der langfristige Aspekt durch die Forwardpreise beobachtbar ist, wogegen sich die kurzfristigen Einflüsse durch Derivative nicht beschreiben lassen. Diese Art von Problemen ist wohlbekannt (siehe [35] und [41]). Deshalb werden noch weitere Annahmen benötigt, wie z.B. dass der Marktpreis des Risikos für nicht hedgebare Risiken gleich Null (siehe auch [14] und [29]) gesetzt wird, wie dies in [7] erfolgt ist. Der Marktpreis des Risikos für die langfristigen Schwankungen wird implizit über die Forwardpreise ermittelt.

Auf diese Weise wird ein Maß so gewählt, dass alle handelbaren Produkte, das sind Forwards und neuerdings europäische Optionen auf Forwards, Martingale sind und die Preise dieser Produkte gleich den Marktpreisen sind. Andererseits haben illiquide Stromverträge einen arbitragefreien Preis, aber dieser ist nicht eindeutig.

Sehen wir uns nun die Vorgehensweise von [7] näher an. Beginnen wir mit den langfristigen Schwankungen

$$Y_{t+1} = Y_t + (\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_Y^2) + \sigma_Y \hat{\epsilon}_{t+1},$$

wobei  $\hat{\epsilon}_{t+1} \sim N(0, 1)$  und unkorreliert ist. Auch wir werden bei der Herleitung zunächst  $Y_t$  im stetigen Fall betrachten, weil dadurch die Notation um einiges leichter ist. Also in stetiger Zeit wird der Prozess durch die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = (\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_Y^2) dt + \sigma_Y dW_t$$

beschrieben, wobei  $W_t$  ein Brownscher Prozess ist. Im nächsten Schritt gehen wir in die risikoneutrale Welt über, indem wir das Marktpreisrisiko für die kurzfristigen Risikofaktoren (Bedarf und kurzfristige Schwankungen) gleich Null setzen, d.h. das beobachtete Maß ist gleich dem risikolosen Maß, und der langfristige Prozess die risikolose Form

$$dY_t = (\mu_t^* - \frac{1}{2}\sigma_Y^2)dt + \sigma_Y dW_t$$

besitzt, wobei  $\mu_t^* = \mu_t - \lambda_t$  der um den Marktpreis des Risikos reduzierte Drift ist. Unter diesem Maß gilt (4.6)

$$\begin{aligned} F_{t,T} &= \mathbb{E}_Q[S_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_Q[e^{f(L_T/v_T, t) + X_T + Y_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{f(L_T/v_T, t) + X_T} | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}_Q[e^{Y_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{f(L_T/v_T, t) + X_T} | \mathcal{F}_t] e^{Y_t + \int_t^T \mu_s^* ds} \end{aligned}$$

Da für Future-Verträge, deren Lieferungen weit in der Zukunft liegen, die Differenz  $T - t$  sehr groß ist, kann die bedingte Verteilung der SARIMA-Prozesse  $L_t^i$  und  $X_t$  durch ihre stationäre Verteilung approximiert werden und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[e^{f(L_T/v_T, t)} | \mathcal{F}_t] &\approx \mathbb{E}_Q[e^{f(L_T/v_T, t)}], \\ \mathbb{E}_Q[e^{X_T} | \mathcal{F}_t] &\approx \mathbb{E}_Q[e^{X_T}] = \exp(\text{Var}[X_t/2]). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{t,T} &\approx \mathbb{E}[e^{f(L_T/v_T, t) + X_T} | \mathcal{F}_t] e^{Y_t + \int_t^T \mu_s^* ds}, \\ &\approx \hat{S}_T e^{Y_t + \int_t^T \mu_s^* ds}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei  $\hat{S}_T = \mathbb{E}_Q[e^{f(L_T/v_T, t)}] \exp(\text{Var}[X_t/2])$ . Man sieht, dass der Forwardpreis  $F_{t,T}$  für eine Lieferung zum Zeitpunkt  $T$  von  $t$  abhängt und einer geometrisch Brownschen Bewegung folgt

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_Y dW_t.$$

In diskreter Umgebung ist das Integral in (4.7) durch die Summe  $\sum_{s=t}^{T-1} \mu_s^*$  zu ersetzen und der Forward folgt einer geometrischen Irrfahrt (Diskretisierung nach Euler)

$$\log F_{t+1,T} = \log F_{t,T} - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 + \sigma_Y \hat{\epsilon}_t.$$

Den Forwardpreisprozess für Lieferungen über einen Zeitraum  $[T_1, T_2)$  erhält man auf ähnliche Weise

$$F_{t,T_1,T_2} \approx \hat{S}_{T_1,T_2} e^{Y_t + \int_t^{T_2} \mu_s^* ds},$$

wobei

$$\hat{S}_{T_1,T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{T=T_1}^{T_2-1} \hat{S}_T e^{\int_{T_1}^T \mu_s^* ds}$$

und  $\hat{S}_T$  ist wie oben definiert. Es zeigt sich wieder, dass  $F_{t,T_1,T_2}$  eine geometrisch Brownsche Bewegung ist

$$\frac{dF_{t,T_1,T_2}}{F_{t,T_1,T_2}} = \sigma_Y dW_t.$$

Die diskrete Form erhält man wie zuvor.

# Kapitel 5

## Modellierung des EEX-Spotpreises für die Preisfestsetzung von Stromderivaten

In diesem Kapitel werden wir den EEX-Spotpreis modellieren. Dazu sind wie bereits erwähnt folgende Eigenschaften zu berücksichtigen:

- Saisonalität
  - jahreszeitlich
  - wöchentlich
  - täglich
- Mean Reversion
- zeitabhängige Volatilität
- Preisspikeeffekt
- Langfristige Schwankungen (Rohstoffkosten, wirtschaftliche Entwicklung, etc.).

Ziel dieser Arbeit ist ein Modell derart aufzustellen, dass einerseits die oben genannten Eigenschaften beinhaltet und andererseits so einfach ist, dass es für andere Anwendungen wie z.B. für die Bewertung von Swing-Optionen verwendet werden kann.

Bisher haben sich nur wenige Autoren mit der Modellierung von Spotpreisen auf Stundenbasis beschäftigt (siehe [7], [22], [40] und [43]). Die Herausforderung liegt sicherlich in der zusätzlichen Berücksichtigung der starken Abhängigkeiten innerhalb eines Tages. Dies führt zunächst zur folgenden Grundsatzentscheidung

- univariate Modellierung (wie in [7] und [40]) oder
- multivariate (wie in [22] und [43]) - jede Stunde bzw. halbe Stunde wie in [22] stellt ein Gut dar. Somit werden 24 bzw. 48 Güter gleichzeitig gehandelt.

Die multivariate Darstellung des Preisprozesses ist unserer Meinung nach sehr nahe liegend, da in der Phase der Preisfestsetzung alle Stunden als einzelne Güter behandelt werden (siehe Kapitel 3).

Aber hier gibt es bereits bei den einfachsten Modellen Probleme aufgrund der hohen Dimensionen. Klassische Inferenzstatistik zu betreiben, stellt sich als ein sehr schwieriges Unterfangen heraus. Man befindet sich in dem Dilemma, dass einerseits das Modell die typischen Charakteristika des Spotmarktes so gut wie möglich widerspiegeln soll und andererseits die Kalibrierung des Modells sehr praktikabel sein soll.

Für uns ist es wichtig ein Modell aufzustellen, dass für die Bewertung von speziellen Verträgen z.B. Swing-Optionen herangezogen werden kann. Solche Verträge werden abgeschlossen, um neben dem Preisrisiko auch das Volumenrisiko minimieren zu können. Swing-Optionen sind wie bereits erwähnt Verträge, die einem Kunden ermöglichen, eine gewisse Menge an Strom zu einem fixen Preis über einen gewissen Zeitraum zu konsumieren, wobei der Kunde selbst entscheiden darf, wann er wie viel unter gewissen Restriktionen abrufen will. Da der Vertragsanbieter davon ausgehen muss, dass der Kunde den Vertrag dann in Anspruch nimmt, wenn der Strompreis am höchsten ist, ist es wichtig, die Charakteristik des Spotpreises abzubilden. Daher war unser vorrangiges Ziel die oben genannten Eigenschaften so gut wie möglich in unserem Modell zu berücksichtigen, so dass wir dieses Modell zur weiteren Berechnung heranziehen können. Von Prognose im klassischen Sinn nehmen wir hier Abstand.

Wie bereits erwähnt, finden wir die Modellierung der Spotpreise als 24 Güter, die pro Tag gehandelt werden, als sehr nahe liegend, da die Preisfestsetzung für jede Stunde separat erfolgt (siehe Kapitel 3). Modellierungen dieser Art sind uns nur von [22] und [43] bekannt (siehe Abschnitt 4.1).

Wir werden in unserer Modellierung ähnlich wie [43] vorgehen, indem wir

- den gleichen funktionalen Zusammenhang zwischen Nachfrage und Angebot aufstellen,
- unserem Preisprozess ebenfalls die Form (4.3) geben,
- im weiteren Schritt die Komponenten Bedarf ( $L_t$ ) und Angebot ( $B_t$ ) ebenfalls stochastisch modellieren und
- zur Dimensionsreduktion die Hauptkomponentenanalyse heranziehen.

Aber im Gegensatz zu [43] sehen wir die Hauptkomponentenanalyse nicht nur als Instrument der Dimensionsreduktion, sondern auch als Extraktion in jene *latente Einflussfaktoren*, die für die Preisfestsetzung wesentlich sind. Weiters werden wir *anders* als in [43]

- die Nichtarbeitstage in der Modellierung berücksichtigen (Wochenende und Feiertage),
- dem Gestaltparameter eine zeitabhängige Struktur verpassen,
- die latenten Faktoren statistisch analysieren und
- sie mit einem passenden Modell versehen, wobei wir auf der Angebotsseite Sprungkomponenten mit Regime-Switching einbauen werden.
- Abschließend werden wir einen anderen Zusammenhang zu den Forwardpreisen erstellen.

Doch bevor wir unser Modell näher vorstellen, werden wir einen kurzen Exkurs zur Hauptkomponentenmethode machen.

## 5.1 Die Hauptkomponentenmethode

Die Hauptkomponentenmethode ist eine Möglichkeit, hochdimensionale Beobachtungen durch eine reduzierte Anzahl von Faktoren zu beschreiben. Zwar geht Information verloren, aber durch eine intelligente Wahl der neuen Basisvariablen, die als Hauptkomponenten bezeichnet werden, wird dieser Verlust minimiert.

Diese Methode ist eine explorative multivariate Technik, die von der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors  $X$  ausgeht und Zusammenhänge zwischen den einzelnen Komponenten untersucht. Für eine allgemeine Einführung sei auf [28] verwiesen.

Die Hauptkomponentenmethode basiert auf einer speziellen Linearkombination von  $n$  Zufallsvariablen derart, dass ein neues Koordinatensystem entsteht. Vorteil dieser Methode ist, dass sie mit geringen Annahmen auskommt.

Betrachten wir den Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_n)'$ , der die Kovarianz  $\Sigma$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  besitzt. Wenn wir nun die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} Y_1 &= c_1' X = \sum_{i=1}^n c_{i1} X_i \\ Y_2 &= c_2' X = \sum_{i=1}^n c_{i2} X_i \\ &\vdots \\ Y_n &= c_n' X = \sum_{i=1}^n c_{in} X_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

bilden, erhalten wir für die Zufallsvariablen  $Y_i$

$$\text{Var}(Y_i) = c_i' \Sigma c_i \text{ für } i = 1, \dots, n \tag{5.2}$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = c_i' \Sigma c_j \text{ für } i, j = 1, \dots, n. \tag{5.3}$$

Die Hauptkomponenten sind nun jene unkorrelierten Linearkombinationen  $Y_1, \dots, Y_n$ , deren Varianzen (5.2) so groß wie möglich werden.

Man spricht von der ersten Hauptkomponente  $Y_1$ , wenn deren Varianz  $\text{Var}(Y_1) = c_1' X c_1$  am größten ist. Aber ohne eine weitere Einschränkung könnte man diese Varianzen durch eine entsprechende Wahl von  $c_1$  beliebig vergrößern, deshalb muss eine weitere Annahme getroffen werden. Diese ist die folgende Normierung

$$c_1' c_1 = 1.$$

Die *erste Hauptkomponente* ist nun jene Linearkombination  $Y_1 = c_1' X$ , deren Varianz  $\text{Var}(Y_1)$  unter  $c_1' c_1 = 1$  am größten wird. Die *zweite Hauptkomponente* ist jene, deren Varianz  $\text{Var}(Y_2)$  unter  $c_2' c_2 = 1$  und  $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$  maximal wird. Allgemein gilt für die  $j$ -te Hauptkomponente

$$\begin{aligned} &\max \text{Var}(Y_j) \\ &\text{unter } c_j' c_j = 1 \text{ und } \text{Cov}(Y_j, Y_k) = 0 \text{ für } k < j. \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man

**Satz 5.1.1 (siehe [28]).** Sei  $\Sigma$  die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  mit den Eigenwerten und dazugehörigen Eigenvektoren  $(\lambda_1, e_1), \dots, (\lambda_n, e_n)$ , wobei  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Dann ist die  $i$ -te Hauptkomponente

$$Y_i = e_i'X = e_{1i}X_1 + \dots + e_{ni}X_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit dieser Wahl ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_i) &= e_i'\Sigma e_i = \lambda_i, & i = 1, \dots, n, \\ \text{Cov}(Y_i, Y_k) &= e_i'\Sigma e_k = 0, & j \neq i. \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe [28]. □

Weiters erhalten wir

**Satz 5.1.2 (siehe [28]).** Sei  $\Sigma$  die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  mit den Eigenwerten und dazugehörigen Eigenvektoren  $(\lambda_1, e_1), \dots, (\lambda_n, e_n)$ , wobei  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Weiters seien  $Y_1 = e_1'X, Y_2 = e_2'X, \dots, Y_n = e_n'X$  die Hauptkomponenten. Dann gilt für die Gesamtvarianz

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i)$$

und für die Korrelation von  $Y_i$  mit  $X_k$

$$\rho_{Y_i, X_k} = \frac{e_{ki}\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\text{Var}(X_k)}} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

*Beweis.* Siehe ebenfalls [28]. □

Da die Gesamtvarianz  $\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  beträgt, kann man den Beitrag der  $k$ -ten Hauptkomponente an der Gesamtvarianz durch

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad k = 1, \dots, n \tag{5.4}$$

ausdrücken. Sind die Beiträge der ersten Hauptkomponenten zur Gesamtvarianz hoch, dann können diese die originalen Variablen ohne viel Informationsverlust ersetzen. Diese Eigenschaft wird in der Modellierung von [43] ausgenutzt. Weiters geben die Komponenten der Eigenvektoren an, welche Bedeutung die  $k$ -te Komponente des Zufallsvektors  $X$  für die  $i$ -te Hauptkomponente,  $i = 1, \dots, n$  hat. Diese ist proportional zum Korrelationskoeffizienten  $\rho_{Y_i, X_k}$  von  $Y_i$  und  $X_k$ .

Nun wollen wir den hochdimensionalen Vektor durch einige wenige Faktoren beschreiben. Dies erhalten wir, indem wir wie folgt rücktransformieren

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{i=1}^n d_{1,i}Y_i \approx \sum_{i=1}^k d_{1,i}Y_i & k < n \\ X_2 &= \sum_{i=1}^n d_{2,i}Y_i \approx \sum_{i=1}^k d_{2,i}Y_i \\ &\vdots \\ X_n &= \sum_{i=1}^n d_{n,i}Y_i \approx \sum_{i=1}^k d_{n,i}Y_i, \end{aligned}$$

wobei  $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = C^{-1} = (e_1, \dots, e_n)$ , da  $C = (e_1, \dots, e_n)'$ .

Zur Berechnung der Hauptkomponenten gehen wir von den  $p$  Beobachtungen des Zufallsvektors  $X$  aus ( $x = \{x_1, \dots, x_p\}, x_i \in \mathbb{R}^n$ ), berechnen die empirische Kovarianzmatrix  $S$  und ermitteln die dazugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren  $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1), \dots, (\hat{\lambda}_n, \hat{e}_n)$ , wobei  $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n \geq 0$ , und erhalten für die geschätzte  $i$ -te Hauptkomponente der  $k$ -ten Beobachtung von  $X$

$$\hat{y}_{i,k} = \hat{e}'_i x_k = \hat{e}_{1,i} x_{1,k} + \dots + \hat{e}_{n,i} x_{n,k}. \quad (5.5)$$

Für die empirische Varianz der  $i$ -ten Hauptkomponente gilt

$$s_{\hat{y}_i}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{m=1}^p (\hat{y}_{i,m} - \bar{\hat{y}}_i)^2 = \hat{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

sowie für die empirische Kovarianz

$$S_{\hat{y}_i, \hat{y}_j} = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p (\hat{y}_{i,k} - \bar{\hat{y}}_i)(\hat{y}_{j,m} - \bar{\hat{y}}_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Weiters kann die Beobachtung  $x_j \in x$  folgendermaßen dargestellt werden

$$x_j = \hat{D} \hat{y}_j = \sum_{i=1}^n \hat{D}_i \hat{y}_{i,j}, \quad (5.6)$$

wobei  $\hat{D} = (\hat{D}_j) = (\hat{d}_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \hat{C}^{-1} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ , da  $\hat{C} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)'$ . Im nächsten Schritt kann man zur Reduzierung des hochdimensionalen Problems, die Beobachtung durch die ersten  $k$  Hauptkomponenten

$$x_j \approx \sum_{i=1}^k \hat{D}_i \hat{y}_{i,j} \quad (5.7)$$

approximieren.

Durch die Analyse der Hauptkomponenten können anschließend Aussagen über die ursprünglichen Beobachtungen getroffen werden. Als Maß für den Informationsverlust, den man durch die Approximation erhält, kann der Varianzanteil (5.4) herangezogen werden, d.h. es werden jene ersten  $k$  Komponenten gewählt, sodass der Anteil an der Gesamtvarianz sehr groß wird. Dazu gibt es eine Reihe von Vorschlägen. Die Wahl hängt auch von der Fragestellung der Analyse ab (siehe [28]).

## 5.2 Das allgemeine Modell

Der Ausgangspunkt unserer Modellierung ist ähnlich der Gleichung (4.3)

$$S_t(h) = \exp(a_t L_t(h) + B_t(h)).$$

Im Gegensatz zu [43] werden wir den Gestaltparameter  $a_t$  der Angebotskurve auch zeitabhängig modellieren, weil die Preise des EEX-Spotmarktes keinen ausgeprägten Zusammenhang mit unseren Bedarfsdaten aus dem Großraum Graz an Wochenenden, Feiertagen und Fenstertagen zeigen. Die Samstage und Fenstertage stellen eine besondere Herausforderung dar, weil sie sich nicht leicht in eine Kategorie einteilen lassen. Sie verhalten sich nicht wie Arbeitstage aber auch nicht wie Sonn- und Feiertage. Diese als eigene Kategorie zu führen, dazu mangelt es am Datenmaterial, da der EEX-Spotmarkt ein junger Markt ist und die Zeitreihen noch sehr kurz sind (Beginn am 16.06.2000). Wir berücksichtigen diese Besonderheit aber bei der Modellierung der stochastischen Einflussgrößen.

Wir versuchen ähnlich zu [43] den Preis durch den Marktmechanismus abzubilden, d.h. wir modellieren die Nachfrage, den wir durch den Bedarf  $L_t \in \mathbb{R}^{24}$  mit der Annahme, der Markt ist bezüglich der Nachfrage unelastisch, beschreiben, und die Angebotsseite, wobei wir annehmen, dass (i) die Angebotskurve für jede Stunde am Tag  $t$  den gleichen Gestaltparameter  $a_t$  hat, dass aber (ii) das Niveau, bei dem die Kurve beginnt, Schwankungen unterliegt, die durch  $b_t \in \mathbb{R}^{24}$  charakterisiert werden.

**Im ersten Schritt** modellieren wir den Bedarf. Als Daten verwenden wir die Netzübergabewerte für den Großraum Graz vom 16.06.2000 bis 30.04.2003 (siehe Kapitel 3). In Abbildung 3.12 auf Seite 34 ist diese Zeitreihe dargestellt. Auf dem ersten Blick sieht man, dass der Bedarf saisonalen Charakter hat. Die Abbildungen 3.10 auf Seite 33 und 3.11 auf Seite 34 zeigen, dass es einen Zusammenhang zum EEX-Spotmarkt gibt.

**Im zweiten Schritt** werden wir den Gestaltparameter der Angebotskurven ermitteln und hier auf die Problematik mit den Fenster- und Samstagen eingehen.

**Abschließend** werden wir die Schwankungen  $B_t$  auf der Angebotsseite modellieren, nachdem wir diese aus den Spotpreisdaten und den Bedarfsdaten  $L_t$  und dem Gestaltparameter bestimmt haben. Auch hier betrachten wir den Zeitraum vom 16.06.2000 bis 30.04.2003.

## 5.3 Die Modellierung des Bedarfs

Zum Zeitpunkt  $t$  sei der Bedarf durch

$$L_t = \mu_t^L + C_t^L R_t^L + \epsilon_t^L \quad (5.8)$$

gegeben, wobei

- $\mu_t^L$  die deterministische Komponente des Bedarfs und
- $C_t^L \in \mathbb{R}^{24} \times \mathbb{R}^m$  - das Ausmaß der Abweichungen bedingt durch die stochastische Größe  $R_t^L \in \mathbb{R}^m$  (die zeitabhängige Volatilität) beschreibt. Wir nehmen an, dass die Komponenten in  $R_t^L$  unabhängig sind.
- Die Größe  $\epsilon_t^L \in \mathbb{R}^{24}$  sei noch eine zusätzliche Störgröße, die auf die entsprechende Stunde zurückzuführen ist.

Die stochastische Komponente  $R_t^L \in \mathbb{R}^m$ , die wir im weiteren Verlauf durch entsprechende Zeitreihen modellieren werden, bezeichnen wir als latente Faktoren, die maßgeblich für die Variationen im Bedarf sind. Sie bewirken die starken Preisabhängigkeiten innerhalb des Tages, deren Auswirkung durch die Matrix  $C_t^L$  beschrieben wird.

Bei der Modellierung der deterministischen Komponente  $\mu_t^L$  unterscheiden wir nach Monat und nach Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag wie folgt

$$\mu_t^L = \mu_{M_t, D_t}^L,$$

wobei

$$M_t = \{m \mid \text{wenn } t \text{ in Monat } m = 1, \dots, 12 \text{ ist.}\} \text{ und } D_t = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } t \text{ ein Arbeitstag,} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Somit erhalten wir einen monatlichen Durchschnittsverbrauch für einen Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag und eine jahreszeitlich abhängige Saisonalität (im Frühling und Herbst wird weniger Strom benötigt als im Sommer und Winter). Analog werden wir die Gewichtsmatrix  $C_t$ , die die Stärke der Tagesabhängigkeiten beschreibt, nach Monat und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag

$$C_t^L = C_{M_t, D_t}^L$$

unterscheiden. Dadurch generieren wir eine zeitabhängige Volatilität. Im Sommer und Winter liegen stärkere Fluktuationen vor als im Frühling und Herbst. Auch hier unterscheidet sich das Verhalten an Arbeitstagen und an Nichtarbeitstagen.

Die Nichtarbeitstage umfassen (i) Wochenenden, (ii) Feiertage und (iii) Fenstertage (Montag oder Freitag), wobei wir folgende Feiertage berücksichtigen

- Neujahr, Hl. drei Könige,
- Karfreitag, Ostermontag,
- 1. Mai,
- Christi Himmelfahrt, Pfingstmontag, Fronleichnam,
- Tag der Deutschen Einheit,
- Allerheiligen,
- Christtag und Stefanitag.

Zur Bestimmung der Parameter werden wir zunächst die Bedarfszeitreihe  $l = (l_1, \dots, l_T)$ ,  $T = 1049$  nach Monat  $m = 1, \dots, 12$  und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag  $at$  aufteilen, wobei

$$at = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } t \text{ ein Arbeitstag} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h.  $l_{m, at} = \{l_t \mid M_t = m \text{ und } D_t = at\}$ . Anschließend wählen wir für die deterministische Komponente  $\mu_{M_t, D_t}^L$  den durchschnittlichen Bedarf (arithmetisches Mittel) des Monats  $m$  und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag  $at$ , d.h.

$$\hat{\mu}_{M_t, D_t}^L = \bar{l}_{m, at} \mathbf{1}_{\{M_t=m, D_t=at\}}(t).$$

Die Gewichtsmatrix  $C_{M_t, D_t}$  ermitteln wir mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse. Dazu wird für jeden Monat  $m = 1, \dots, 12$  und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag  $at \in \{0, 1\}$  die empirische Kovarianz  $S_{m, at}$  berechnet, die Eigenwerte  $\hat{\lambda}_1^{m, at} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{24}^{m, at}$  und die dazu gehörigen Eigenvektoren  $(\hat{e}_1^{m, at}, \dots, \hat{e}_{24}^{m, at})$  ermittelt und anschließend die empirischen Hauptkomponenten nach (5.5) berechnet, wobei wir bei den Nichtarbeitstagen ( $at = 0$ ) die Monate Jänner und Februar wegen der geringen Datenmenge von Februar (24 Beobachtungen) als eine Einheit zusammenfassen. Aus diesem Grund haben wir die deterministische Komponente  $\hat{\mu}_{M_t, D_t}^L$  für  $at = 0$ ,  $m = 1$  und  $m = 2$  ebenfalls zusammengefasst, d.h.

$$\hat{\mu}_{1,0}^L = \hat{\mu}_{2,0}^L = \bar{l}_{\{1,2\},0}.$$

Im nächsten Schritt ist die Wahl der ersten  $k$ -Hauptkomponenten zu treffen, die wir zur weiteren Modellierung verwenden, um das hoch dimensionale Problem auf ein niedrig dimensionales zu reduzieren. Dazu betrachten wir die Varianzaufklärung (5.4). In den Tabellen A.1 und A.2 im Anhang sind die Anteile der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz, sowie die Kumulation angegeben. Mit den ersten drei Komponenten können an den Arbeitstagen mindestens 93% (außer Mai hier sind es 82%) und bei den Nichtarbeitstagen sogar 94% der Gesamtvarianz erklärt werden.

Da das Modell nicht allzu komplex gestaltet werden soll, weil es als Input für die Derivatsberechnungen eingeht, wurden die ersten drei Hauptkomponenten gewählt und die Beobachtungen  $l_t \in \mathbb{R}^{24}$ ,  $t = 1, \dots, T$  für den Bedarf  $L_t$  in

$$l_t = \hat{\mu}_{M_t, D_t}^L + \hat{C}_{M_t, D_t}^L r_t^L + \hat{\epsilon}_t^L \quad (5.9)$$

zerlegt, wobei

- $r_t^L = (\Lambda_{M_t, D_t}^L)^{-1} \hat{y}_t^L \in \mathbb{R}^3$  die ersten drei empirischen Hauptkomponenten reziprok skaliert wurden und zwar mit den Eigenwerten  $\hat{\lambda}_1^{m, at, L}$ ,  $\hat{\lambda}_2^{m, at, L}$ ,  $\hat{\lambda}_3^{m, at, L}$ , falls  $t$  aus dem Monat  $m$  und Arbeits-bzw. Nichtarbeitstag  $at$  stammt, d.h.

$$\Lambda_{M_t, D_t}^L = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_1^{m, at, L}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\lambda}_2^{m, at, L}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\hat{\lambda}_3^{m, at, L}} \end{pmatrix},$$

- $\hat{C}_{M_t, D_t}^L = \tilde{C}_{M_t, D_t}^L \Lambda_{M_t, D_t}^L \in \mathbb{R}^{24 \times 3}$  die ersten drei Spalten der Rücktransformationsmatrix sind, d.h.  $\tilde{C}_{M_t, D_t}^L = (\hat{e}_1^{m, at, L}, \hat{e}_2^{m, at, L}, \hat{e}_3^{m, at, L})$ , diesmal skaliert mit den Eigenwerten und
- $\hat{\epsilon}_t^L = l_t - \hat{\mu}_{M_t, D_t}^L - \hat{C}_{M_t, D_t}^L r_t^L$  als Störgröße mitgeführt wird.

Die Resultate sind im Anhang in den Tabellen A.5 bis A.10 aufgelistet.

**Bemerkung 2.** Wir führen die Skalierung deshalb durch, damit die Werte der Zeitreihe  $r_t^L$  die gleiche Größenordnung haben und somit abrupte Niveauveränderungen ausgeglichen werden. Dies dient zur Vereinfachung der Modellierung.

**Bemerkung 3.** Die stochastischen Komponenten  $r_t^L$  interpretieren wir als *latente Faktoren*, die maßgeblich für die Fluktuationen des Bedarfs verantwortlich sind. Zwar sind diese nicht explizit beobachtbar, aber durch die Hauptkomponentenmethode machen wir sie „sichtbar“ und betrachten sie im weiteren Schritt als tatsächliche Beobachtungen. Bei der Berechnung dieser Komponenten wurde durch die Hauptkomponentenmethode eine spezielle Wahl getroffen und zwar wurden Faktoren gewählt, die unkorreliert sind. Diese Eigenschaft fließt in die Modellierung von  $R_t^L$  ein. Für die drei generierten Zeitreihen  $r_t^L(i), i = 1, 2, 3$  werden separat passende Modelle ohne Interaktion gesucht.

Im nächsten Schritt werden wir auf die Analyse der stochastischen Komponente  $r_t^L$  näher eingehen und sie mit einem passenden Modell versehen. Weiters wird die Störgröße  $\hat{\epsilon}_t^L$  ebenfalls stochastisch modelliert.

### 5.3.1 Die stochastischen Komponenten $R_t^L$ und $\epsilon_t^L$

In Abbildung 5.1 sind die drei stochastischen Komponenten  $r_t^L(i), i = 1, 2, 3$  des Bedarfs  $L_t$  für den betrachteten Zeitraum (16.06.2000 bis 30.04.2003) abgebildet. Bei den ersten zwei Faktoren scheint ein zeitlicher Trend vorzuliegen, wogegen beim dritten Faktor die Fluktuationen um Null herum sind.

Im ersten Schritt berechnen wir für die drei Komponenten die empirische Autokorrelationsfunktion um gewisse Abhängigkeitsstrukturen zu finden. In Abbildung 5.2 sehen wir, dass im Zyklus von sieben Tagen die Autokorrelation immer höher wird. Es scheinen also stochastische Wochensaisonalitäten vorzuliegen. Zur Modellierung wählen wir SARIMA-Modelle (siehe [26]) mit der Periode 7. Konkret zeigt sich, dass stationäre SARIMAX(1, 0, 1)(1, 0, 1)<sub>7</sub>-Modelle für die ersten zwei Komponenten geeignet sind, wobei die Zeit  $t$  der exogene Regressor ist; für die dritte Komponente reicht ein stationäres SARIMA(1, 0, 1)(1, 0, 1)<sub>7</sub>-Modell. Die Modelle lauten wie folgt

$$R_t^L(i) = \beta_0^i + \beta_1^i t + u_t^i, \quad (5.10)$$

wobei für die 3. Komponente gilt

$$\beta_1^3 = 0. \quad (5.11)$$

Die Störgröße  $u_t^i$  hat folgende Form

$$u_t^i = \phi_1^i u_{t-1}^i + \phi_7^i u_{t-7}^i - \phi_1^i \phi_7^i u_{t-8}^i + \epsilon_t^i - \theta_1^i \epsilon_{t-1}^i - \theta_7^i \epsilon_{t-7}^i + \theta_1^i \theta_7^i \epsilon_{t-8}^i, \text{ für } i = 1, 2, 3,$$

wobei

$$\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_i^2).$$

Die Schätzung der Parameter erfolgt über die Maximierung der Maximum-Likelihood-Funktion, die mittels Kalmanfiltertechnik erstellt wird, da SARIMA-Modelle spezielle Zustandsraummodelle (siehe Kapitel 2) sind. In Tabelle 5.1 sind die geschätzten Parameter angegeben.

Zur Modellvalidierung wurden die entsprechenden Residuen

$$\hat{v}_t^i = r_t^i - \mathbb{E}[R_t^L(i) | H_{t-1}^i],$$

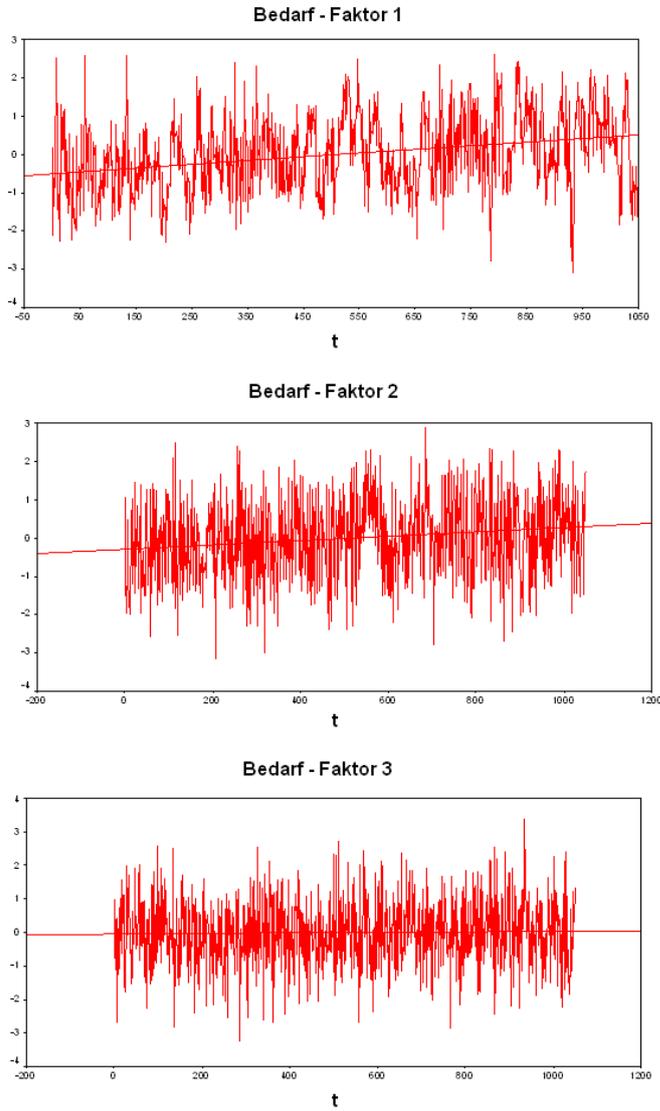


Abbildung 5.1: Die stochastischen Komponenten  $r_t^L(i), i = 1, 2, 3$

Faktoren	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_7$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_7$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\sigma}$
1	0.8371	0.9973	0.3247	0.9499	0.0008	-0.5564	0.4197
2	0.4246	0.8220	0.1263	0.4817	0.0006	-0.3123	0.6775
3	0.1192	0.3672	-	0.1395	-	0.0012	0.9182

Tabelle 5.1: Die geschätzten Parameter der stochastischen Komponenten  $R_t^L(i), i = 1, 2, 3$

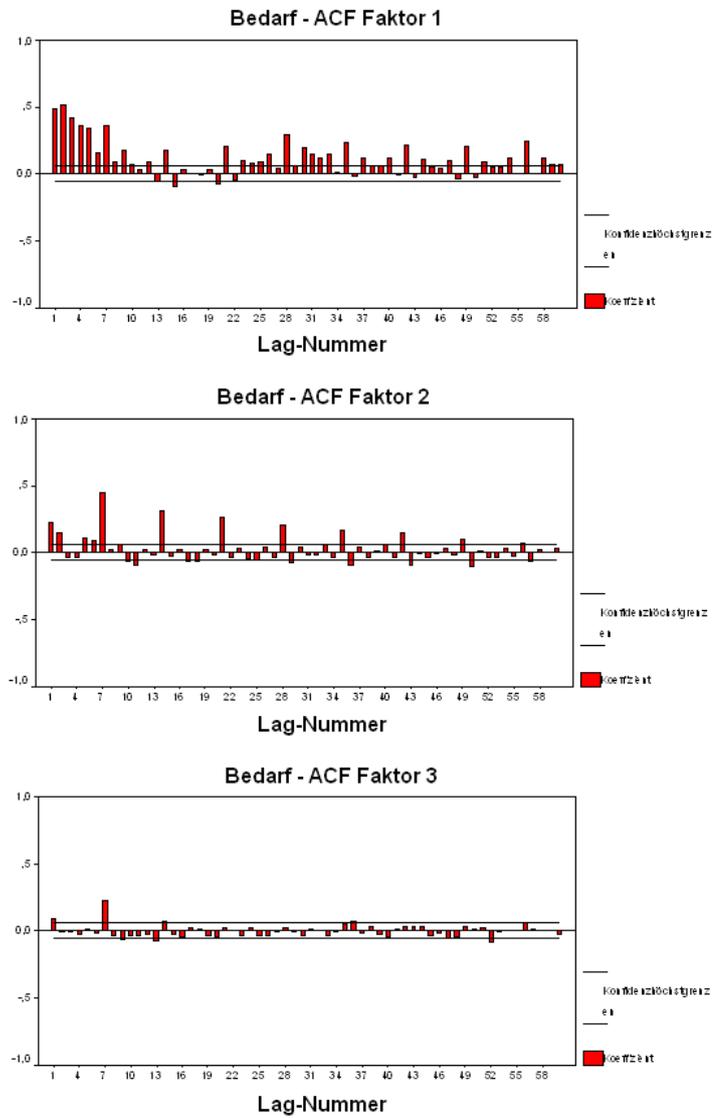


Abbildung 5.2: Die empirische Autokorrelationsfunktion der drei stochastischen Komponenten  $r_t^L(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

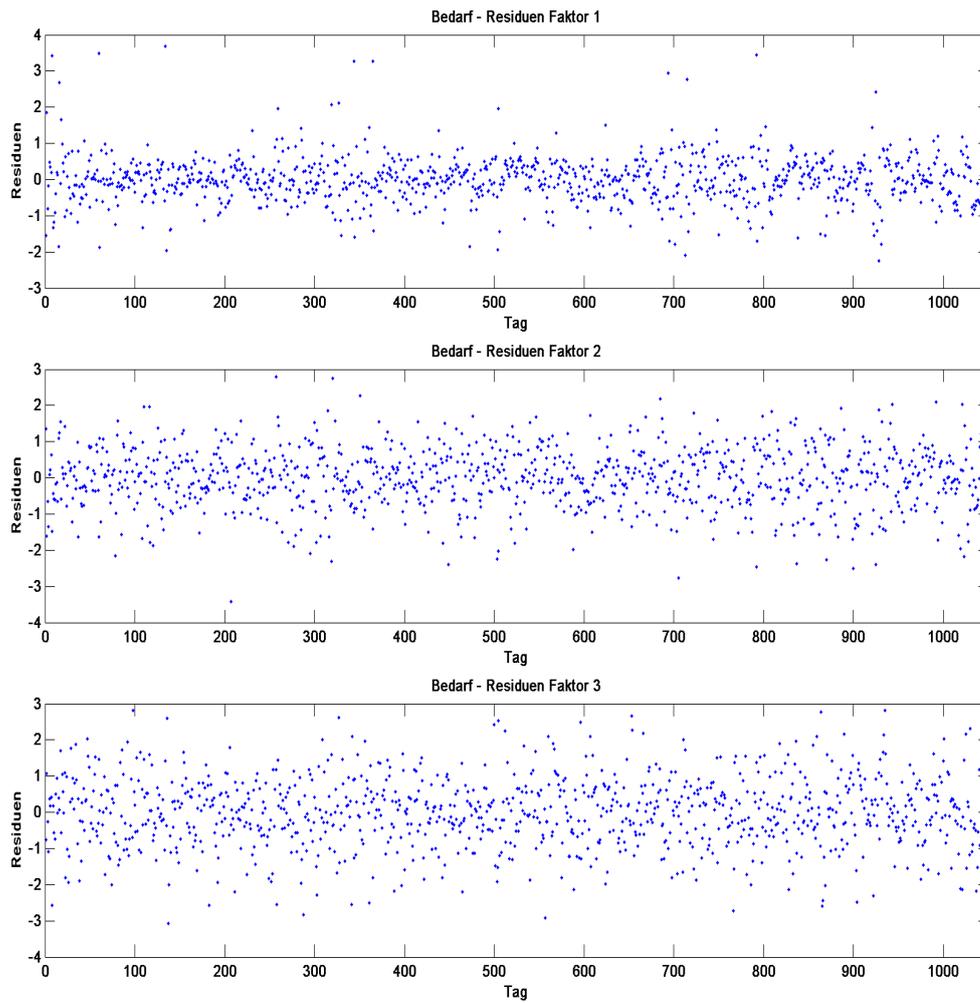


Abbildung 5.3: Residuen der stochastischen Komponenten  $r_t^L(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

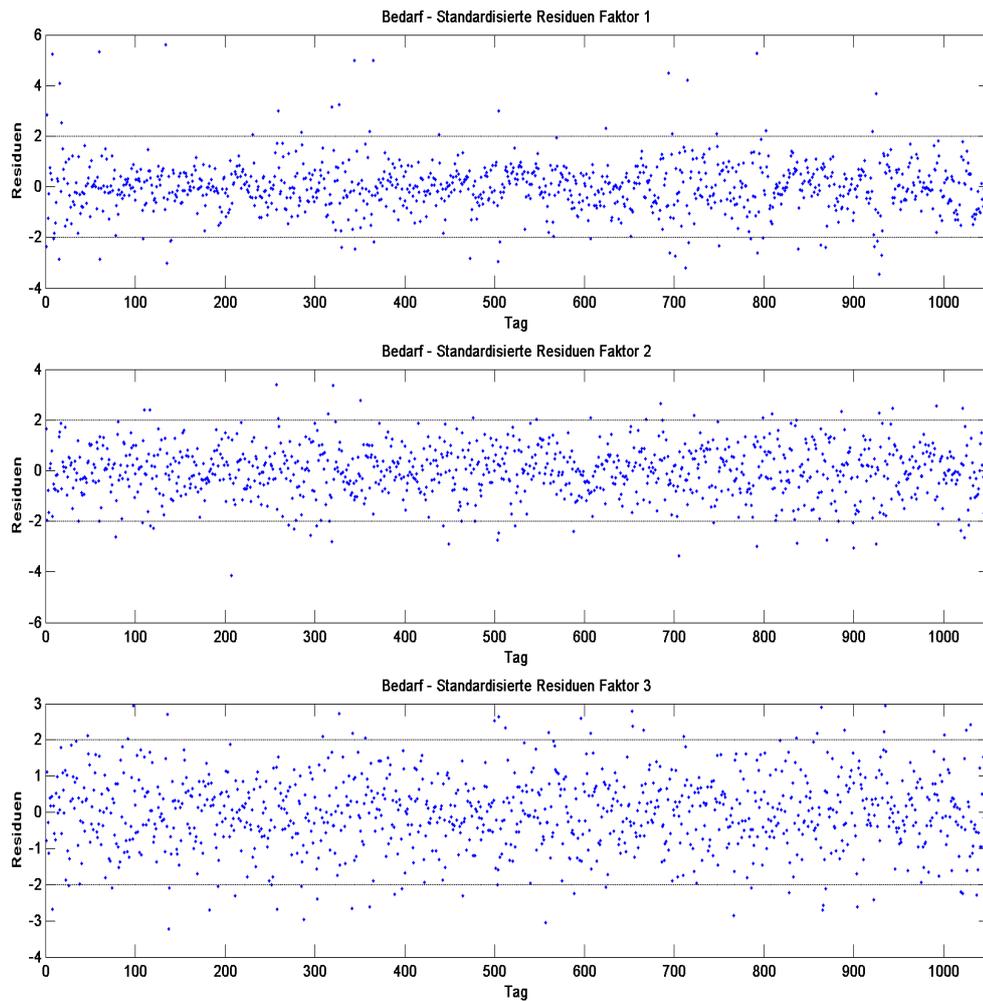


Abbildung 5.4: Standardisierte Residuen der stochastischen Komponenten  $r_t^L(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

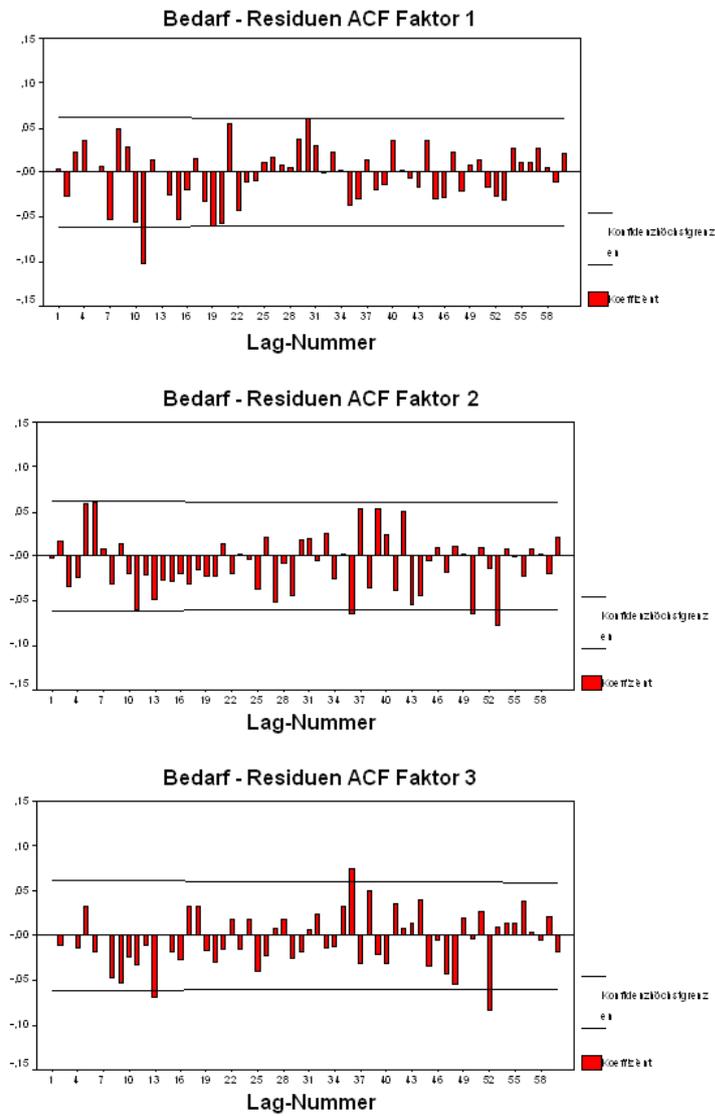


Abbildung 5.5: Die empirische Autokorrelationsfunktion der Residuen der drei stochastischen Komponenten  $r_t^L(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

wobei  $H_{t-1}^i = (r_{t-1}^L(i), \dots, r_1^L(i))$  die Information bis zum Zeitpunkt  $t - 1$  für  $i = 1, 2, 3$  ist, analysiert. Die Residuen aufgetragen gegen die Zeit verhalten sich wie weißes Rauschen (siehe Abbildung 5.3). Auch standardisiert (siehe Abbildung 5.4) zeigen die Residuen ein gutes Ergebnis. Weiters zeigt die empirische Autokorrelationsfunktion (siehe Abbildung 5.5), dass eine sehr schwache Korreliertheit vorliegt.

Abschließend bestimmen wir die Parameter der Störgröße  $\epsilon_t^L$ . Dazu nehmen wir an, dass

$$\epsilon_t^L \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \Sigma),$$

wobei

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} (\sigma_1^L)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\sigma_{24}^L)^2 \end{pmatrix}.$$

Durch die  $\{\hat{\epsilon}_t^L | t = 1, \dots, T\}$ , die wir aus der Zerteilung des Bedarfs in die entsprechenden Komponenten erhielten, bestimmen wir die Parameter

$$(\hat{\sigma}_h^L)^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t^L)^2 \quad \text{für } h = 1, \dots, 24. \quad (5.12)$$

In Tabelle 5.2 sind die geschätzten Parameterwerte  $\hat{\sigma}_h^L$  bezogen auf  $\hat{\sigma}_{\max}^L = \hat{\sigma}_9^L = 5680,39$  aufgelistet.

$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$	$\hat{\sigma}_6$
38,08%	41,41%	32,05%	30,02%	26,46%	36,08%
$\hat{\sigma}_7$	$\hat{\sigma}_8$	$\hat{\sigma}_9$	$\hat{\sigma}_{10}$	$\hat{\sigma}_{11}$	$\hat{\sigma}_{12}$
68,04%	91,47%	100,00%	98,37%	94,46%	92,23%
$\hat{\sigma}_{13}$	$\hat{\sigma}_{14}$	$\hat{\sigma}_{15}$	$\hat{\sigma}_{16}$	$\hat{\sigma}_{17}$	$\hat{\sigma}_{18}$
93,12%	95,02%	94,68%	89,97%	81,61%	72,27%
$\hat{\sigma}_{19}$	$\hat{\sigma}_{20}$	$\hat{\sigma}_{21}$	$\hat{\sigma}_{22}$	$\hat{\sigma}_{23}$	$\hat{\sigma}_{24}$
61,11%	54,30%	45,12%	43,53%	41,22%	43,88%

Tabelle 5.2: Die geschätzten Parameter  $\hat{\sigma}_h$  der Störgröße  $\epsilon_t^L$  bezogen auf  $\hat{\sigma}_{\max}^L$  für  $h = 1, \dots, 24$

Nun sind alle wesentlichen Einflussgrößen des Bedarfs bestimmt und mit entsprechenden stochastischen Modellen versehen. Abschließend wird das Modell durch

$$\hat{l}_t = \hat{\mu}_{M_t, D_t} + \hat{C}_{M_t, D_t} \hat{r}_t,$$

wobei

$$\hat{r}_t = \hat{\mathbb{E}}[R_t | H_{t-1}].$$

mit der tatsächlichen Realisation des Bedarfs verglichen (siehe Abbildungen 5.6 und 5.8). Man sieht sehr schön, dass die Strukturen des Bedarfs sehr gut getroffen werden. Im nächsten Abschnitt wenden wir uns der Angebotskurve zu.

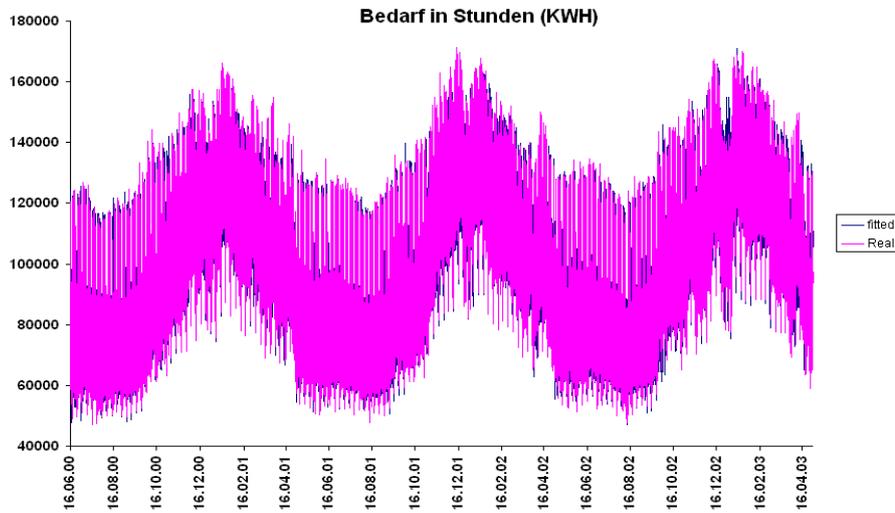


Abbildung 5.6: Der Vergleich des Modells  $\hat{l}_t$  mit den Beobachtungen  $l_t$  vom 16.06.2000 bis 30.04.2003

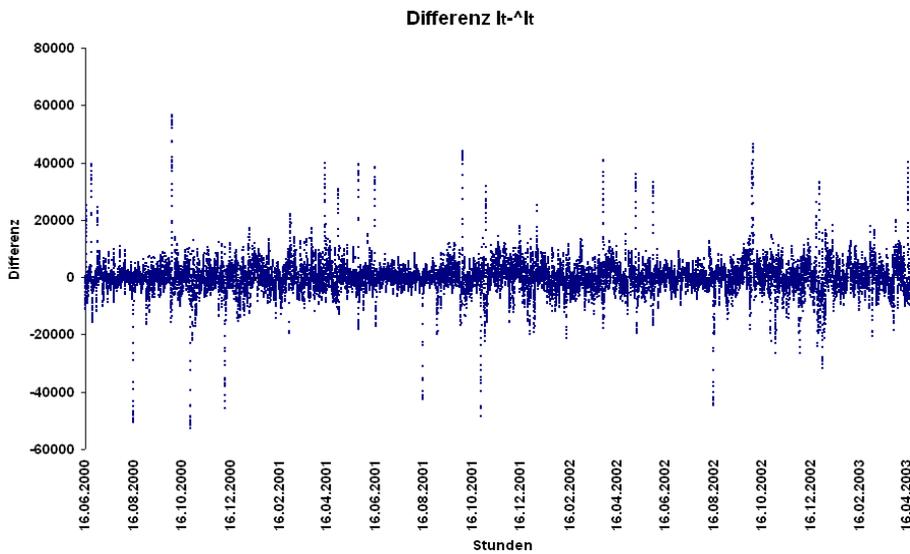


Abbildung 5.7: Vergleich des Modells - Differenzplot,  $l_t - \hat{l}_t$  vom 16.06.2000 bis 30.04.2003

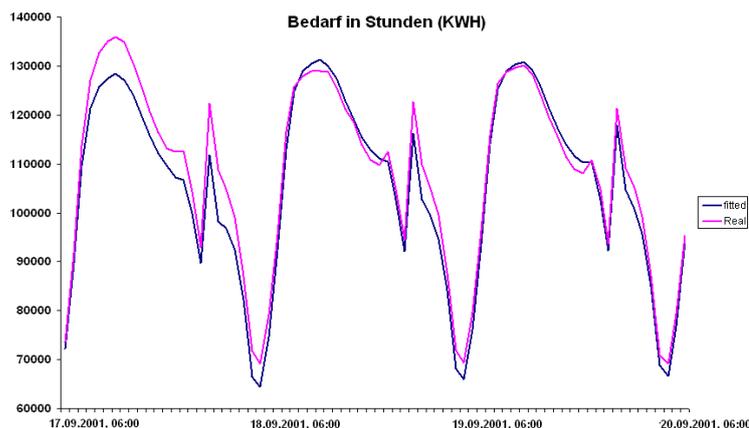


Abbildung 5.8: Der Vergleich des Modells  $\hat{l}_t$  mit den Beobachtungen  $l_t$  vom 17.09.2001 bis 20.09.2001

## 5.4 Ermittlung des Gestaltparameters der Angebotskurve

Ähnlich zu [43] nehmen wir an, dass die Angebotskurve eine exponentielle Struktur besitzt. Die Gestalt der Kurve  $a_t$  hat für alle Stunden die gleiche Form. Nur das Anfangsniveau  $b_t(h)$  variiert. Bei Analyse des Zusammenhangs des Bedarfs aus dem Großraum Graz und dem EEX-Spotmarkt zeigt sich, dass es Unterschiede zwischen Arbeitstagen und Nichtarbeitstagen gibt (siehe Abbildung 5.9).

Betrachtet man die logarithmische Skala so sieht man, dass an Arbeitstagen ein stärkerer linearer Zusammenhang als an Nichtarbeitstagen vorzuliegen scheint. Der empirische Korrelationskoeffizient zwischen Bedarf und dem logarithmierten Spotpreis ist

$$\hat{\rho}_{L, \log(S)} = \begin{cases} 0,66 & , \text{ falls } at = 1 \\ 0,46 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Weiters stellen wir fest, dass die Preise an Fenster- und Samstagen ein anderes Verhalten als an Sonn- und Feiertagen aufweisen (siehe Abbildung 5.10), aber auch nicht zu den typischen Arbeitstagen zugeordnet werden können.

Wir werden ähnlich wie in [43] den Gestaltparameter  $a_t$  über die Relation

$$\log(S_t(h)) = a_t L_t(h) + B_t(h), \quad (5.13)$$

wobei  $h$  die Stunde  $h$  des Tages  $t$  ist, ermitteln. Innerhalb eines Tages sei der Gestaltparameter konstant.

In einer ersten Analyse haben wir analog zu [43] einen konstanten Parameter  $a_t \equiv a$  angenommen. Jedoch zeigte sich in der weiteren Modellierung, als wir die stochastischen Schwankungen bei der Angebotsseite analysierten, dass der Unterschied zwischen Arbeitstagen und Nichtarbeitstagen nicht sehr gut wiedergegeben wurde. In einer Simulationsstudie erzeugte das Modell an Nichtarbeitstagen ungewöhnlich hohe Preise in einer Häufigkeit, die nicht tolerierbar war, sodass wir von einem konstanten Übergang Abstand nehmen mussten. Es ist nahe liegend

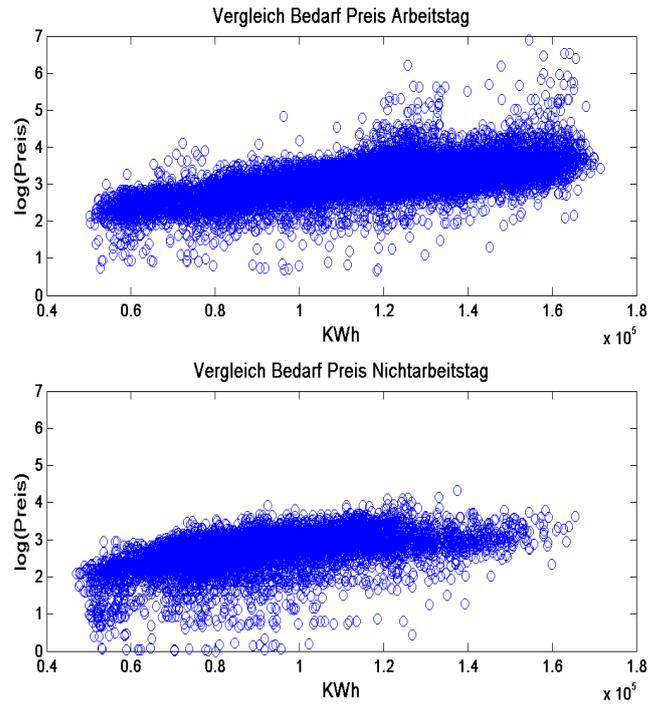


Abbildung 5.9: Der Vergleich des Bedarfs mit dem Spotpreis (logarithmiert)

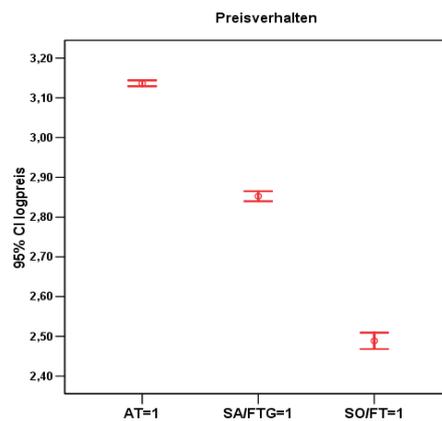


Abbildung 5.10: Der Vergleich des Spotpreises (logarithmiert) zwischen Arbeitstagen, Samstagen/Fenstertagen und Sonn-/Feiertagen

den Gestaltparameter durch eine komplexe Funktion, die die Saisonalität, Arbeitstag, Sonntag/Feiertag sowie Samstage/Fenstertage unterscheidet, zu beschreiben. Dies führte aber auch nicht zu besonderen Verbesserungen. Der Grund dafür ist, dass die Andersartigkeit auch in stochastischer Form vorliegt. Das Preisverhalten ist an Nichtarbeitstagen grundlegend anders als an Arbeitstagen und die Bedarfsmodellierung scheint für Nichtarbeitstage nicht ausreichend zu sein, um den Preis den ausschlaggebenden Charakter zu verleihen. Daher führten wir folgende Annahmen ein, an Arbeitstagen ist der Gestaltparameter konstant  $a_t = a$  und an Nichtarbeitstagen  $a_t = 0$ , also es gibt keinen Zusammenhang zu den Bedarfsdaten, d.h.

$$a_t = \begin{cases} a & , \text{ falls } at = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Gestaltparameters wenden wir den Kleinste-Quadrate-Schätzer auf die Gleichung

$$\log(s_t(h)) = al_t(h) + b$$

an, wobei die logarithmierten Spotpreise  $\log(s_t(h))$  und der Bedarf  $l_t(h)$  nur an Arbeitstagen betrachtet werden. Die Schwankungen auf der Angebotsseite werden anschließend berechnet durch

$$b_t(h) = \log(s_t(h)) - \hat{a}_t l_t(h), \quad (5.14)$$

wobei

$$\hat{a}_t = \begin{cases} 1,2919 \times 10^{-5} & , \text{ falls } at = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 5.5 Die Modellierung des Angebotes

Nachdem die Schwankungen auf der Angebotsseite nach (5.14) berechnet wurden, gehen wir analog zur Modellierung des Bedarfs vor, d.h. wir betrachten diese Variable auch 24-dimensional und nehmen als Modellansatz

$$B_t = \mu_t^B + C_t^B R_t^B + 1_{24} Y_t + \epsilon_t^B, \quad (5.15)$$

wobei

- $\mu_t^B \in \mathbb{R}^{24}$  das mittlere Angebotsniveau,
- $R_t^B \in \mathbb{R}^m$  die kurzfristigen stochastischen Schwankungen auf der Angebotsseite,
- $C_t^B \in \mathbb{R}^{24 \times m}$  die Auswirkungen dieser Schwankungen auf die einzelnen Stunden,
- $Y_t \in \mathbb{R}$  die langfristigen Schwankungen und
- $\epsilon_t^B \in \mathbb{R}^{24}$  zusätzliche Schwankungen der einzelnen Stunden sind.

Zur Bestimmung der Parameter des Prozesses  $B_t$  ziehen wir die nach (5.14) berechneten Größen  $(b_1, \dots, b_T)$  heran und werden diese zunächst nach Monat und Arbeitstag bzw. Nichtarbeitstag aufteilen. Das mittlere Angebotsniveau wird analog zum Bedarf durch

$$\hat{\mu}_t^B = \hat{\mu}_{M_t, D_t}^B = \bar{b}_{m, at} \mathbf{1}_{\{M_t=m, D_t=at\}}(t) \quad (5.16)$$

festgesetzt, sowie für die jeweilige Kombination die zeitabhängigen Gewichte  $C_t^B = C_{M_t, D_t}^B$  über die Hauptkomponentenanalyse. In den Tabellen A.3 und A.4 im Anhang werden die Anteile der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz nach Monat und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag aufgelistet, wobei die Monate Jänner und Februar für Nichtarbeitstage aufgrund der geringen Daten von Februar zusammengefasst wurden. Mit der ersten Hauptkomponente wird bereits mehr als die Hälfte der Gesamtvarianz erklärt. Mit den ersten drei Hauptkomponenten werden mindestens 78,84% (Monat September, Arbeitstag) der Gesamtvarianz erklärt. Im Vergleich zum Bedarf sind die Anteile der ersten drei Hauptkomponenten geringer. Um einen Anteil über 90% bei allen Monaten und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstagen zu erreichen, müsste man die ersten sechs Hauptkomponenten extrahieren. In Summe, mit Berücksichtigung des Bedarfs und der langfristigen Schwankung, hätten wir damit 10 Zeitreihen, die im Hintergrund laufen. Dies war unserer Meinung nach zu komplex. Daher entschieden wir uns, die ersten drei Komponenten zu wählen, mit dem Bewusstsein, dass der Anteil der Gesamtvarianz geringer als im Vergleich zum Bedarf ist.

Nach Bestimmung der Anzahl der Hauptkomponenten, die wir zur Approximation von  $B_t$  heranziehen, unterteilen wir nun die berechneten Größen  $b_t$  in der Form

$$b_t = \hat{\mu}_{M_t, D_t}^B + \hat{C}_{M_t, D_t}^B r_t^B + x_t, \quad (5.17)$$

wobei

- $r_t^B = (\Lambda_{m, D_t}^B)^{-1} \hat{y}_t^B \in \mathbb{R}^3$  die ersten drei empirischen Hauptkomponenten reziprok skaliert werden und zwar mit den Eigenwerten  $\hat{\lambda}_1^{m, at, B}$ ,  $\hat{\lambda}_2^{m, at, B}$ ,  $\hat{\lambda}_3^{m, at, B}$ , falls  $t$  aus dem Monat  $m$  und Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag  $at$  stammt, d.h.

$$\Lambda_{M_t, D_t}^B = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_1^{m, at, B}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\lambda}_2^{m, at, B}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\hat{\lambda}_3^{m, at, B}} \end{pmatrix},$$

- $\hat{C}_{M_t, D_t}^B = \tilde{C}_{M_t, D_t}^B \Lambda_{M_t, D_t}^B \in \mathbb{R}^{24 \times 3}$  die ersten drei Spalten der Rücktransformationsmatrix sind, d.h.  $\tilde{C}_{m, at}^B = (\hat{e}_1^{m, at, B}, \hat{e}_2^{m, at, B}, \hat{e}_3^{m, at, B})$ , diesmal skaliert mit den Eigenwerten und
- $x_t = b_t - \hat{\mu}_{M_t, D_t}^B - \hat{C}_{M_t, D_t}^B r_t^B$  als Realisation von  $1_{24} Y_t + \epsilon_t^B$ , der langfristigen Schwankungen plus einer Störgröße auf der Angebotsseite, angesehen wird.

**Bemerkung 4.** Auch hier führten wir eine Skalierung durch, damit die Werte der berechneten Zeitreihe  $r_t^B$  zur Vermeidung von abrupten Niveauveränderungen die gleiche Größenordnung besitzen.

**Bemerkung 5.** Im gleichen Sinne wie zuvor werden die stochastischen Komponenten  $R_t^B$  als *latente Faktoren*, die maßgeblich für die Fluktuationen des Angebots verantwortlich sind, interpretiert. Durch die Hauptkomponentenmethode werden sie *sichtbar* gemacht und im weiteren werden die  $r_t^B$  als beobachtete Zeitreihen behandelt und die Komponenten werden wie zuvor unabhängig modelliert.

### 5.5.1 Die stochastischen Komponenten $R_t^B$ , $Y_t$ und $\epsilon_t^B$

Wie bereits erwähnt zeigte sich, dass es innerhalb der Nichtarbeitstage wesentliche Unterschiede zwischen Samstag/Fenstertage und Sonn-/Feiertage gibt (siehe Abbildung 5.10). Zunächst ließen wir diesen Sachverhalt außer Acht und berechneten die empirischen Autokorrelationsfunktionen von  $r_t^B(i)$  für  $i = 1, 2, 3$ , um saisonalen stochastischen Effekten auf die Spur zu kommen (siehe Abbildung 5.13) und zwar speziell die der Wocheneffekte. Im ersten Versuch modellierten wir daher die stochastischen Komponenten  $R_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  durch stationäre SARIMA-Prozesse mit Periode 7 und schätzten die Parameter mit  $r_t^B$  (siehe Abbildung 5.11).

Nach einigen Varianten erschien uns folgendes Modell für alle drei Komponenten  $R_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  als geeignet und zwar

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_7 B^7)R_t = (1 - \theta_1)(1 - \theta_7)\epsilon_t, \quad (5.18)$$

wobei  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ . Doch es zeigte sich, dass der Preisprozess unrealistische Preise an Nichtarbeitstagen erzeugte.

Auch im nächsten Versuch, als wir keinen Zusammenhang zu den Bedarfsdaten des Großraums Graz zuließen und darauf aufbauend die Schwankungen der Angebotsseite  $R_t$  durch das Modell (5.18) ermittelten, zeigten die Preissimulationen kaum Verbesserungen der Situation. Es war nicht ausreichend, die Gewichtsmatrizen  $C_{m,at}$  nach Arbeits- bzw. Nichtarbeitstagen zu unterteilen und den Prozess  $R_t^B$  als eine SARIMA-Zeitreihe zu modellieren. In Abbildung 5.12 sind die Zeitreihen nach Arbeits-bzw. Nichtarbeitstag aufgegliedert. Man kann erkennen, dass ein sprunghaftes Verhalten vorliegt. Bei Faktor eins ist diese Charakteristik besonders ausgeprägt. An Arbeitstagen gibt es positive Sprünge und an Nichtarbeitstagen eher negative Sprünge.

Zur Berücksichtigung der Sprünge wenden wir nun das *Regime-Switching* an. Wir vermuten, dass es zwei Zustände gibt, den Normalzustand, wo der Preisprozess natürlichen Schwankungen unterworfen ist, und den Spikezustand, wo aufgrund von Engpässen oder unerwarteter Nachfrage ein Ungleichgewicht, das den Preis in die Höhe schnellen oder in die Tiefe purzeln lässt, entsteht. Diesen intuitiven Ansatz übertragen wir auf unsere Faktoren, die die Auswirkung auf die Stunde  $h$  durch das Gewicht  $C_{m,at}(h, j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  bewirken; z.B. sind die Gewichte  $C_{m,at}(h, j)$  positiv und  $R_t$  mit hohen Werten belegt, so ist das Anfangsniveau der Angebotskurve sehr hoch und es lässt sich vermuten, dass ein Engpass vorliegt.

Da sich das Verhalten an Arbeitstagen von Nichtarbeitstagen wesentlich unterscheidet, werden die beiden Tagestypen in der Modellierung als unabhängige Prozesse behandelt (siehe Abbildung 5.14), d.h. an Arbeitstagen stammt  $R_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  aus einem anderen Prozess (bezeichnen wir ihn mit  $A_t(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) als an Nichtarbeitstagen ( $N_t(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) und

$$R_t^B(i) = D_t A_t(i) + (1 - D_t) N_t(i).$$

Im nächsten Schritt haben wir die Prozesse  $A_t$  und  $B_t$  zu modellieren. Da wir Wocheneffekte für alle drei Faktoren (siehe Abbildung 5.13) feststellten, die man sehr gut mit SARIMA-Prozessen modellieren kann, sowie ein Sprungverhalten konstatierten, werden wir das Konzept des Regime-Switching anwenden (siehe [32]),

$$A_t(i) = E_t^1(i)A_t^1(i) + (1 - E_t^1(i))A_t^0(i), \quad (5.19)$$

$$N_t(i) = E_t^0(i)N_t^1(i) + (1 - E_t^0(i))N_t^0(i), \quad (5.20)$$

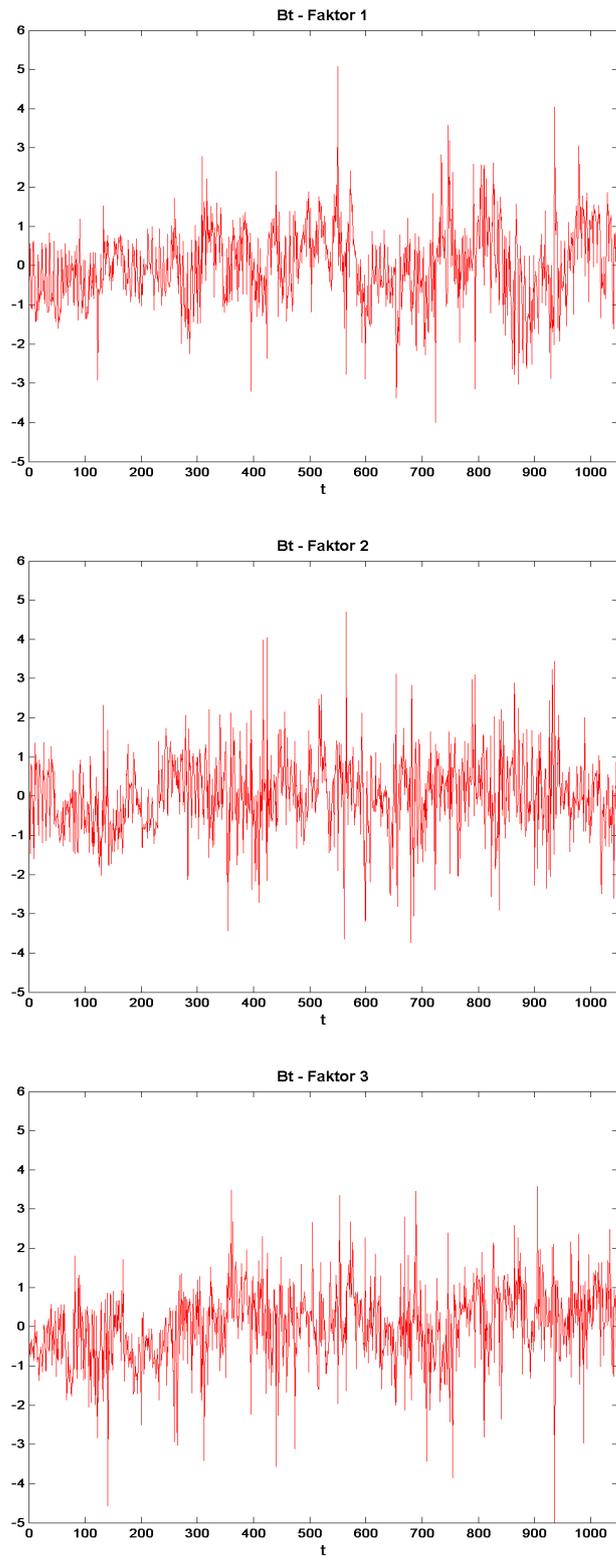


Abbildung 5.11: Die stochastischen Komponenten  $r_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

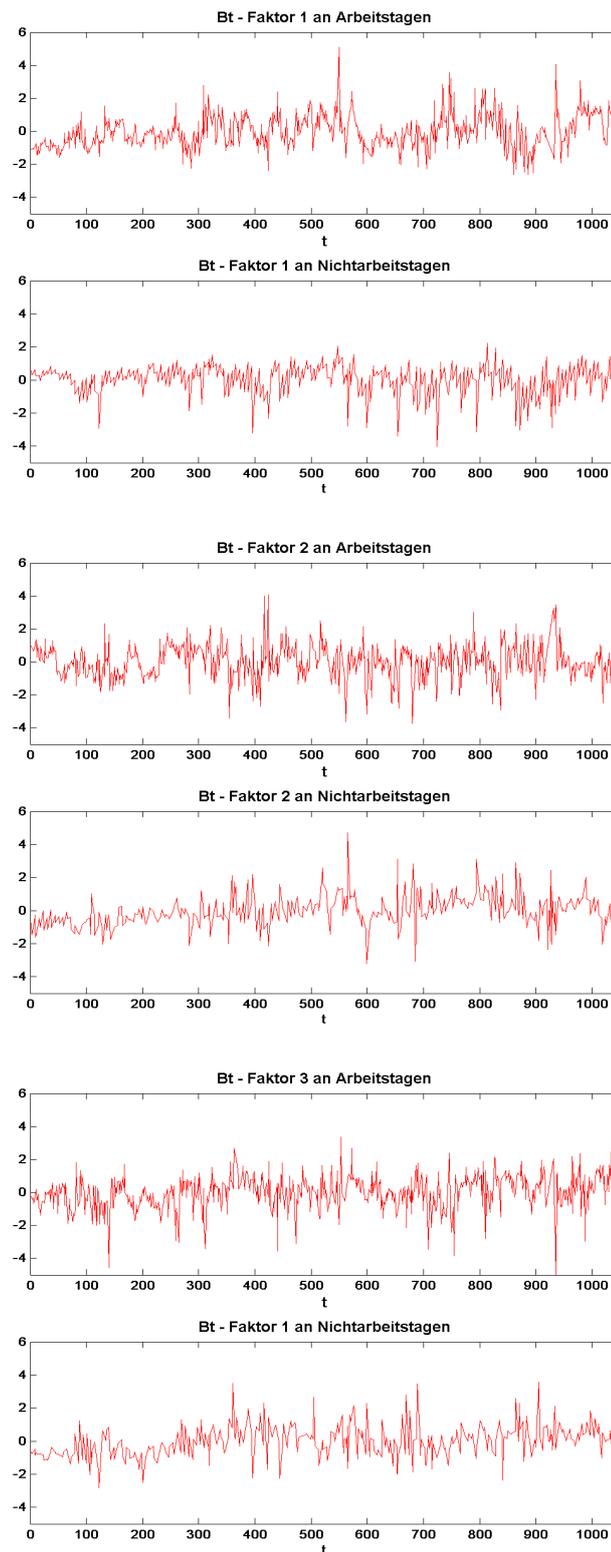


Abbildung 5.12: Die stochastischen Komponenten  $r_t^B(i)$  nach Arbeits-bzw. Nichtarbeitstag,  $i = 1, 2, 3$

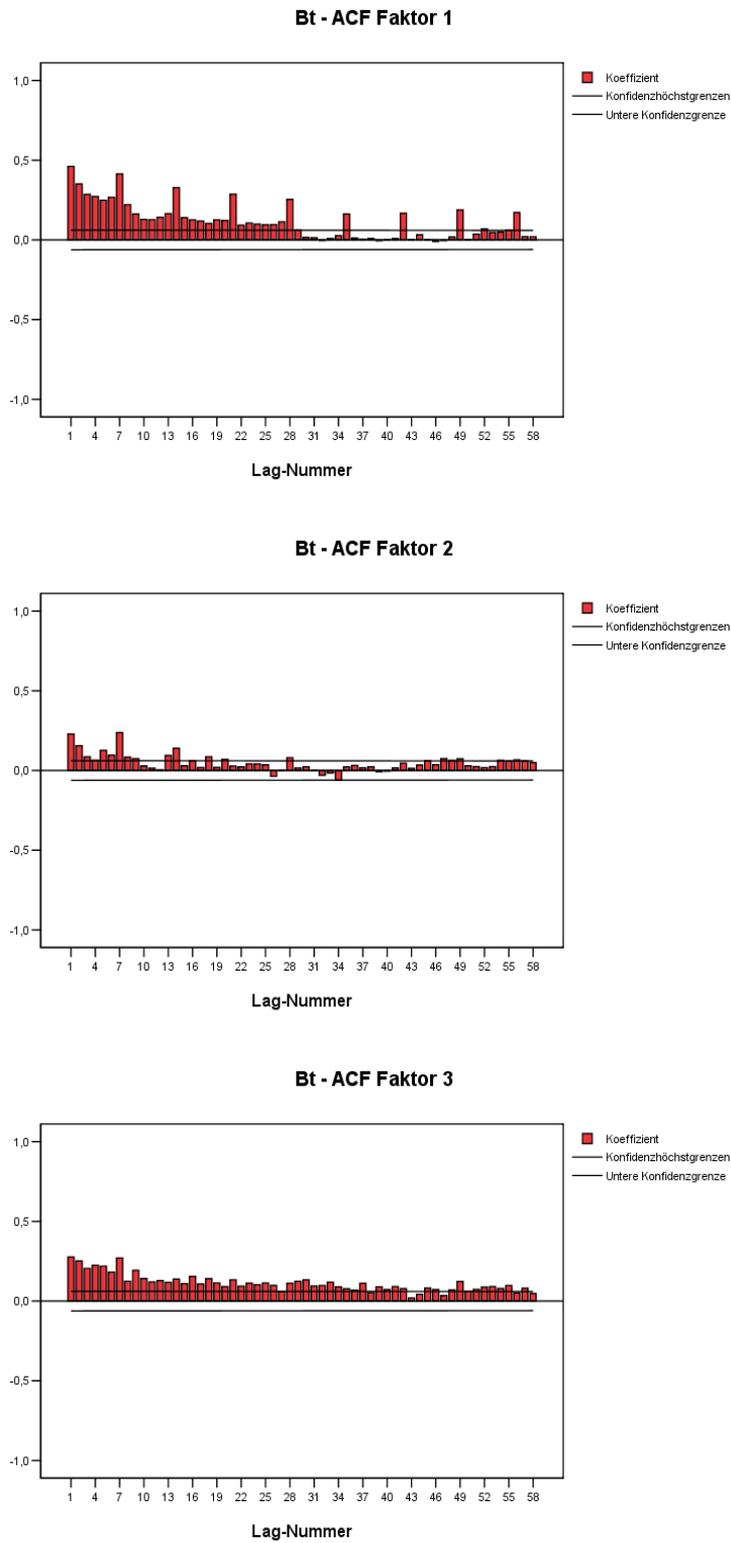
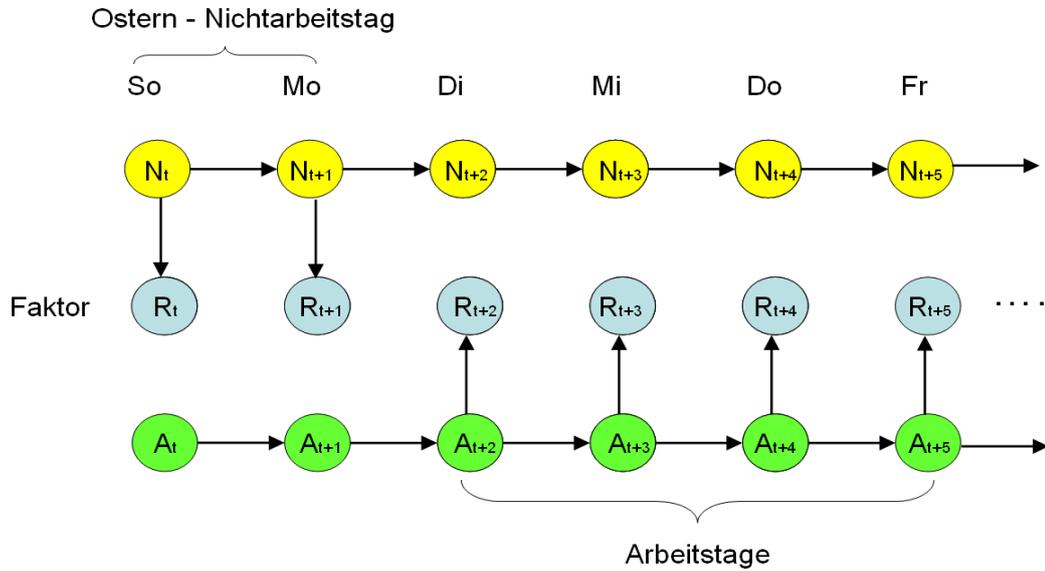


Abbildung 5.13: Die empirische Autokorrelationsfunktion von  $r_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

## Zeitraum vom 27.03.2005 bis 01.04.2005


 Abbildung 5.14: Modell der stochastischen Komponenten  $R_t^B$  für Arbeits- bzw. Nichtarbeitstage

wobei

- $E_t^0(i) \in \{0, 1\}$  und  $E_t^1(i) \in \{0, 1\}$  für  $i = 1, 2, 3$  sind die entsprechenden Schalter, ob der Prozess im Normal- ( $E_t^{\text{at}}(i) = 0$ ) oder im außernatürlichen Zustand ( $E_t^{\text{at}}(i) = 1$ ) ist. Wir modellieren diese zwei Schalter durch homogene Markovketten mit Übergangsmatrix

$$P^{i,\text{at}} = \begin{pmatrix} 1 - q_{\text{at}}^i & q_{\text{at}}^i \\ p_{\text{at}}^i & 1 - p_{\text{at}}^i \end{pmatrix}$$

für  $i = 1, 2, 3$  und  $\text{at} = 0, 1$ .

- Die Komponenten  $A_t^1(i)$  und  $N_t^1(i)$  beschreiben das Verhalten im Spikezustand ( $E_t^{\text{at}}(i) = 1$ , für  $i = 1, 2, 3$ ,  $\text{at} = 0, 1$ ) an Arbeitstagen und Nichtarbeitstagen und werden mit

$$\begin{aligned} A_t^1(i) &\stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1(i), \sigma_1^2(i)) \\ N_t^1(i) &\stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_0(i), \sigma_0^2(i)) \end{aligned}$$

modelliert.

- Für den Normalzustand modellieren wir den Arbeitstagsprozess ( $\text{at} = 1$ ) durch

$$(1 - \phi_1^1(i)B)(1 - \phi_7^1(i)B^7)A_t^0(i) = (1 - \theta_1^1(i)B)(1 - \theta_7^1(i)B^7)\epsilon_t^A(i),$$

wobei  $\epsilon_t^A(i) \sim N(0, \eta_1^2(i))$  unkorreliert ist, und den Nichtarbeitstagsprozess ( $\text{at} = 0$ ) durch

$$(1 - \phi_1^0(i)B)(1 - \phi_7^0(i)B^7)(N_t^0(i) - c_t^0(i)) = (1 - \theta_0^0(i)B)(1 - \theta_7^0(i)B^7)\epsilon_t^N(i),$$

wobei  $\epsilon_t^N(i) \sim N(0, \eta_0^2(i))$  unkorreliert ist und

$$c_t^0(i) = c_0(i) + c_1(i)\mathbf{1}_{\text{So}}(t) + c_2(i)\mathbf{1}_{\text{Ft}}(t)$$

für  $i = 1, 2, 3$ . Beim Nichtarbeitstagsprozess berücksichtigen wir das unterschiedliche Verhalten von Samstagen/Fenstertagen ( $c_0(i)$ ), das sich um  $c_1(i)\mathbf{1}_{\text{So}}(t)$  Einheiten an Sonntagen und um  $c_2(i)\mathbf{1}_{\text{Ft}}(t)$  Einheiten an Feiertagen für  $i = 1, 2, 3$  verändert.

Im nächsten Schritt sollen wir die Parameter schätzen, doch wir sind noch mit einem weiteren Problem konfrontiert. Da wir annehmen, dass es zwei stochastische Prozesse, den Arbeits- und Nichtarbeitstagsprozess, gibt, die je nachdem ob ein Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag vorliegt, beobachtbar sind, müssen wir uns noch überlegen, wie wir jene Zeitpunkte behandeln, an denen der entsprechende Prozess nicht sichtbar ist, d.h. was passiert beim Arbeitsprozess an Nichtarbeitstagen und umgekehrt. Eine Möglichkeit wäre diese Zeitpunkte als *Missing Values* bei der Parameterschätzung zu berücksichtigen (siehe [26]).

Wir werden dieses Problem lösen, indem wir unser Modell in ein allgemeines zeitabhängiges Zustandsraummodell einbetten. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass wir die Parameter beider Prozesse  $A_t$  und  $N_t$  mit einer (approximativen) Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmen können (siehe Kapitel 2). Bei der weiteren Beschreibung werden wir einfachheitshalber den Index  $i$  für die Faktoren weglassen. Die folgenden Resultate gelten sinngemäß für alle drei stochastischen Komponenten  $R_t^B(i), i = 1, 2, 3$ .

Zunächst führen wir eine neue Markovkette  $Z_t$  ein, die wir aus den beiden Schaltern  $E_t^{\text{at}}, \text{at} = \{0, 1\}$  generieren

$$\begin{aligned} E_t^0 &= \begin{cases} 0 & \text{kein Sprung im Nichtarbeitstagsprozess} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \\ E_t^1 &= \begin{cases} 0 & \text{kein Sprung im Arbeitsprozess} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \\ Z_t &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } (E_t^0, E_t^1) = (0, 0), \text{ beide Prozesse im Normalzustand} \\ 1 & , \text{ falls } (E_t^0, E_t^1) = (0, 1), \text{ Arbeitsprozess im Spikezustand} \\ 2 & , \text{ falls } (E_t^0, E_t^1) = (1, 0), \text{ Nichtarbeitstagsprozess im Spikezustand} \\ 3 & , \text{ falls } (E_t^0, E_t^1) = (1, 1), \text{ beide Prozesse im Spikezustand} \end{cases} \end{aligned}$$

An einem Arbeitstag können wir den Arbeitsprozess beobachten, jedoch wissen wir nicht ob er im Spikezustand ist ( $E_t^1$ ). Im Hintergrund läuft der Nichtarbeitstagsprozess weiter, der sich auch in zwei Zuständen befinden kann ( $E_t^0$ ). Im nächsten Schritt modellieren wir die stochastische Komponente durch ein zeitabhängiges Zustandsraummodell mit Regime-Switching

$$\begin{aligned} \alpha_t^B &= \Phi \alpha_{t-1}^B + G \eta_t \\ R_t^B &= H_t(Z_t) \alpha_t^B + \mu_t(Z_t) + \epsilon_t(Z_t), \end{aligned} \tag{5.21}$$

wobei

$$\Phi^{\text{at}} = \begin{pmatrix} \phi_1^{\text{at}} & 0 & \dots & \phi_7^{\text{at}} & -\phi_1^{\text{at}}\phi_7^{\text{at}} & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^0 & 0 \\ 0 & \Phi^1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Faktor	$\hat{c}_0$	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{\phi}_1^0$	$\hat{\phi}_7^0$	$\hat{\theta}_1^0$	$\hat{\theta}_7^0$	$\hat{\eta}_0^2$
1	0,6523	-1,0038	-0,4194	0,6018	0,8862	-0,2458	0,6083	0,1265
2	0,2833	-0,3429	-0,6809	0,6212	0,9094	0,3779	0,3801	0,1812
3	-0,1220	0,3589	-0,1479	0,6465	0,8013	0,2750	0,4435	0,3563

 Tabelle 5.3: Parameter des Nichtarbeitsdaysprozesses - Normalzustand  $N_t^0$ 

Faktor	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\sigma}_0^2$
1	-1,8376	1,0956
2	0,3543	2,3510
3	0,2019	2,8180

 Tabelle 5.4: Parameter des Nichtarbeitsdaysprozesses - Spikezustand  $N_t^1$ 

und

$$\eta_t \sim N(0, Q), \text{ wobei } Q = \begin{pmatrix} \eta_0^2 & 0 \\ 0 & \eta_1^2 \end{pmatrix},$$

$$H_t(Z_t) = \begin{cases} (1, -\theta_1^0, 0 \dots 0, -\theta_7^0, \theta_1^0 \theta_7^0, 0 \dots 0) & \text{falls } Z_t \in \{0, 1\} \text{ und } t \text{ Nichtarbeitstag} \\ (0 \dots 0, 1, -\theta_1^1, 0 \dots 0, -\theta_7^1, \theta_1^1 \theta_7^1) & \text{falls } Z_t \in \{0, 2\} \text{ und } t \text{ Arbeitstag} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_t(Z_t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{falls } Z_t \in \{2, 3\} \text{ und } t \text{ Nichtarbeitstag,} \\ \mu_1 & \text{falls } Z_t \in \{1, 3\} \text{ und } t \text{ Arbeitstag,} \\ c_0 + c_1 1_{S_0}(t) + c_2 1_{F_t}(t) & \text{falls Nichtarbeitstag und } Z_t \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\sigma_\epsilon(Z_t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{falls } Z_t \in \{2, 3\} \text{ und } t \text{ Nichtarbeitstag,} \\ \sigma_1 & \text{falls } Z_t \in \{1, 3\} \text{ und } t \text{ Arbeitstag,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\epsilon_t(Z_t) \sim N(0, \sigma_\epsilon^2(Z_t)).$$

Nun können wir die Parameter für alle drei Komponenten mit Hilfe des Algorithmus von [32] schätzen (siehe Kapitel 2) und erhalten

Faktor	$\hat{q}_0$	$\hat{p}_0$
1	0,0778	0,7239
2	0,1300	0,4275
3	0,1547	0,9924

 Tabelle 5.5: Parameter des Schalters  $E_t^0$  für den Nichtarbeitsdaysprozess

Faktor	$\hat{\phi}_1^1$	$\hat{\phi}_7^1$	$\hat{\theta}_1^1$	$\hat{\theta}_7^1$	$\hat{\eta}_1^2$
1	0,9002	0,8186	0,4508	0,6701	0,2903
2	0,8339	0,4552	0,4211	0,2031	0,2769
3	0,8994	0,8506	0,5002	0,8657	0,3764

Tabelle 5.6: Parameter des Arbeitstagsprozesses - Normalzustand  $A_t^0$

Faktor	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_1^2$
1	0,5644	2,1734
2	-0,1248	2,2492
3	0,0229	2,8612

Tabelle 5.7: Parameter des Arbeitstagsprozesses - Spikezustand  $A_t^1$

### Die Parameterschätzung von $Y_t$ und $\epsilon_t^B$ und Bestimmung des risikoneutralen Driftes

Für die langfristigen Schwankungen gehen wir analog zu [7] vor und ziehen als Modell

$$Y_t = Y_{t-1} + \mu_t^Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 + \sigma_Y \epsilon_t^Y \quad (5.22)$$

heran, wobei

$$\epsilon_t^Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1).$$

Wir nehmen weiters an, dass der Marktpreis des Risikos für die kurzfristigen Komponenten ( $R_t^L, R_t^B \in \mathbb{R}^3$  und  $\epsilon_t^L, \epsilon_t^B \in \mathbb{R}^{24}$ ) gleich Null ist. In der Herleitung der Preisdynamik des Forwards gehen wir zur Vereinfachung der Notation in stetige Zeit über. Somit lautet das stetige Analogon zu  $Y_t$

$$dY_t = (\mu_t^Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2)dt + \sigma_Y dW_t, \quad (5.23)$$

wobei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung ist. Für die Komponente  $Y_t$  nehmen wir sehr wohl einen Marktpreis des Risikos an. Dann ist der Prozess unter dem risikoneutralen Maß

$$dY_t = (\mu_t^* - \frac{1}{2}\sigma_Y^2)dt + \sigma_Y dW_t, \quad (5.24)$$

wobei

$$\mu_t^* = \mu_t^Y - \lambda_t.$$

Die Variable  $\lambda_t$  bezeichnet den Marktpreis des Risikos von  $Y_t$ . Unter diesem neuem Maß beträgt der Futurepreis für die Stunde  $h$  bei Fälligkeit  $T$  zur Zeit  $t$

$$F_{t,T,h} = \mathbb{E}_Q[S_{T,h} | \mathcal{F}_t], \quad (5.25)$$

Faktor	$\hat{q}_1$	$\hat{p}_1$
1	0,0453	0,2998
2	0,1162	0,3018
3	0,1645	0,9999

Tabelle 5.8: Parameter des Schalters  $E_t^1$  für den Arbeitstagsprozess

wobei  $\mathcal{F}_t$  die Information bis zum Zeitpunkt  $t$  ist. Nun betrachten wir -analog zu [7]- Future-Verträge, deren Fälligkeit weit in der Zukunft liegen, d.h.  $t \ll T$ :

$$\begin{aligned}
 F_{t,T,h} &= \mathbb{E}_Q[S_{T,h}|\mathcal{F}_t], \\
 &= \mathbb{E}_Q[e^{a_T L_{T,h} + \mu t(h)^B + C_t(h)^B R_t^B + \epsilon_t^B(h) + Y_T} | \mathcal{F}_t], \\
 &= \mathbb{E}[e^{a_T L_{T,h}} | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[e^{\mu t(h)^B + C_t(h)^B R_t^B + \epsilon_t^B(h)} | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}_Q[e^{Y_T} | \mathcal{F}_t], \\
 &\approx \mathbb{E}[e^{a_T L_{T,h}}] \mathbb{E}[e^{\mu t(h)^B + C_t(h)^B R_t^B + \epsilon_t^B(h)}] \mathbb{E}_Q[e^{Y_T} | \mathcal{F}_t].
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Diese Approximation können wir aufgrund der Stationarität der Komponenten  $R_t^L$  in  $L_{T,h}$  und  $R_t^B$  durchführen. Zur Berechnung von  $\mathbb{E}[e^{a_T L_{T,h}}]$  und  $\mathbb{E}[e^{\mu t(h)^B + C_t(h)^B R_t^B + \epsilon_t^B(h)}]$  ziehen wir eben diese stationäre Verteilung von  $R_t^L(i)$  und  $R_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  heran. Die stochastischen Komponenten des Bedarfs mit dem Trend bereinigt, d.h.  $U_t^L = R_t^L - \beta_0 - \beta_1 t$  (für alle drei Komponenten erfolgt dies analog, daher wird der Index nicht mitgeführt) modellierten wir durch stationäre SARIMA(1, 0, 1)(1, 0, 1)<sub>7</sub>-Zeitreihen, d.h.

$$U_t^L = \phi_1^L U_{t-1}^L + \phi_7^L U_{t-7}^L - \phi_1^L \phi_7^L U_{t-8}^L + \epsilon_t^L - \theta_1^L \epsilon_{t-1}^L - \theta_7^L \epsilon_{t-7}^L + \theta_1^L \theta_7^L \epsilon_{t-8}^L, \tag{5.27}$$

wobei  $\epsilon_t^L \sim N(0, \sigma_L^2)$  unkorreliert ist. Eine andere Darstellungsmöglichkeit dieses Prozesses ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}
 \alpha_t^L &= \Phi^L \alpha_{t-1}^L + G^L \eta_t^L \\
 U_t^L &= H^L \alpha_t^L,
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

wobei

$$\Phi^L = \begin{pmatrix} \phi_1^L & 0 & \dots & \phi_7^L & -\phi_1^L \phi_7^L & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} G &= [1 \ 0 \dots \ 0]' \\ \eta_t &\sim N(0, Q = \sigma_L^2) \\ H^L &= [1, -\theta_1^L, 0 \dots 0, -\theta_7^L, \theta_1^L \theta_7^L]. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable  $\alpha_t^L$  ist multivariat normalverteilt mit Erwartungswert  $\mathbb{E}[\alpha_t] = 0$  und Kovarianzmatrix  $P$ , die man durch folgende Beziehung (siehe [26] und Kapitel 2) ermitteln kann

$$P^L = (\Phi^L)P^L(\Phi^L)' + (G^L)Q^L(G^L)'$$

Wegen der Normalverteilung von  $\alpha_t$  ist auch  $U_t^L$  normalverteilt mit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[U_t^L] &= \mathbb{E}[H^L \alpha_t^L] = 0 \text{ und} \\
 \text{Var}[U_t^L] &= \mathbb{E}[(H^L \alpha_t^L)(H^L \alpha_t^L)'] = (H^L)P^L(H^L)' = \nu^2.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für die stationäre Verteilung von  $R_t^L$ , dass diese ebenfalls normalverteilt ist und zwar mit

$$\mathbb{E}[R_t^L] = \beta_0 + \beta_1 t \quad \text{und} \quad \text{Var}[R_t^L] = \nu^2.$$

Weiters erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\exp(a_T L_T(h))] &= \mathbb{E}[\exp(a_T(\mu_T^L(h) + C_T^L(h)R_T^L + \epsilon_t^L(h)))] \\
 &= \exp(a_T \mu_T) \prod_{i=1}^3 \mathbb{E}[\exp(a_T C_T^L(h, i)R_T^L(i))] \mathbb{E}[\exp(a_T \epsilon_t^L(h))] \\
 &= \exp(a_T \delta_T^L) \prod_{i=1}^3 \exp\left(\frac{1}{2} a_T^2 (C_T^L(h, i)^2) \nu^2(i)\right) \exp\left(a_T^2 \frac{1}{2} \sigma_L^2(h)\right),
 \end{aligned}$$

wobei  $\delta_T^L = \mu_T^L + \sum_{i=1}^3 C_T^L(h, i)(\beta_0^i + \beta_1^i T)$ . Für die stochastischen Komponenten  $R_t^B(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  geht man vom Zustandsraummodell (5.21) aus. Zur Vereinfachung lassen wir den Index  $i$  weg. Die Zufallsvariable  $\alpha_t^B$  ist wieder multivariat normalverteilt, dessen Erwartungswert  $\mathbb{E}[\alpha_t^B] = 0$  und Kovarianz  $P^B$  analog wie zuvor berechnet wird. Für  $R_t^B$ , bedingt auf  $Z_t$ , gilt

$$R_t^B | Z_t \sim N \left( \mu(Z_t), \underbrace{H_t^B(Z_t) P^B H_t^B(Z_t)'}_{\omega^2(Z_t)} \right) \quad (5.29)$$

und

$$\mathbb{E}[\exp(CR_t^B) | Z_t] = \exp(C\mu(Z_t) + \frac{1}{2}C^2\omega^2(Z_t))$$

sowie

$$\mathbb{E}[\exp(CR_t^B)] = \sum_{j=0}^3 \exp(C\mu(Z_t = j) + \frac{1}{2}C^2\omega^2(Z_t = j))P(Z_t = j),$$

wobei sich die stationäre Verteilung von  $Z_t$  aus den stationären Verteilungen von  $E_t^{\text{at}}$ ,  $\text{at} = 0, 1$  zusammensetzt:

$$P(E_t^{\text{at}} = 0) = \frac{p_{\text{at}}}{q_{\text{at}} + p_{\text{at}}} \quad P(E_t^{\text{at}} = 1) = \frac{q_{\text{at}}}{q_{\text{at}} + p_{\text{at}}}$$

und

$$\begin{aligned} P(Z_t = 0) &= P(E_t^0 = 0)P(E_t^1 = 0), \\ P(Z_t = 1) &= P(E_t^0 = 0)P(E_t^1 = 1), \\ P(Z_t = 2) &= P(E_t^0 = 1)P(E_t^1 = 0), \\ P(Z_t = 3) &= P(E_t^0 = 1)P(E_t^1 = 1). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für  $\exp(\mu_T^B(h) + C_T(h)^B R_T^B + \epsilon_T^B(h))$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[e^{\mu_T^B(h) + C_T(h)^B R_T^B + \epsilon_T^B(h)}] \\ &= e^{\mu_T^B(h)} \mathbb{E}[e^{C_T^B(h,1)R_T^B(1)}] \mathbb{E}[e^{C_T^B(h,2)R_T^B(2)}] \mathbb{E}[e^{C_T^B(h,3)R_T^B(3)}] \mathbb{E}[e^{\epsilon_T^B(h)}] \\ &= e^{\mu_T^B(h)} \prod_{i=1}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \mathbb{E}[e^{C_T^B(h,i)R_T^B(i)} | Z_T^i = j] P(Z_T^i = j) \right) e^{\frac{1}{2}\sigma_B^2(h)} \\ &= e^{\mu_T^B(h)} \prod_{i=1}^3 \left( \sum_{j=0}^3 e^{C_T^B(h,i)\mu(Z_T=j) + \frac{1}{2}C_T^B(h,i)^2\omega_i^2(Z_T=j)} P(Z_T^i = j) \right) e^{\frac{1}{2}\sigma_B^2(h)}. \end{aligned}$$

Setzen wir in (5.26)  $\hat{S}_{T,h} = \mathbb{E}[\exp(a_T L_{T,h})] \mathbb{E}[\exp(\mu_T^B(h) + C_T(h)^B R_T^B + \epsilon_T^B(h))]$ , so erhalten wir

$$F_{t,T,h} \approx \hat{S}_{T,h} \mathbb{E}_Q[e^{Y_T} | \mathcal{F}_t] = \hat{S}_{T,h} e^{Y_t + \int_t^T \mu_s^* ds}, \quad (5.30)$$

für alle Stunden  $h = 1, \dots, 24$  mit Fälligkeit  $T$ . Weiters ist  $F_{t,T,h}$  eine geometrisch Brownsche Bewegung:

$$\frac{dF_{t,T,h}}{F_{t,T,h}} = \sigma_Y dW_t. \quad (5.31)$$

Für Futures (Baseload) mit einer beliebigen Lieferperiode  $[T_1, T_2]$  (in Tagen) kann man analog zu (5.30) vorgehen

$$F_{t,T_1,T_2} = \mathbb{E}_Q \left[ \frac{1}{24(T_2 - T_1)} \sum_{T=T_1}^{T_2-1} \sum_{h=1}^{24} S_{T,h} \mid \mathcal{F}_t \right] \approx \hat{S}_{T_1,T_2} e^{Y_t + \int_t^{T_1} \mu_s^* ds}, \quad (5.32)$$

wobei

$$\hat{S}_{T_1,T_2} = \frac{1}{24(T_2 - T_1)} \sum_{T=T_1}^{T_2-1} e^{\int_{T_1}^T \mu_s^* ds} \sum_{h=1}^{24} \hat{S}_{T,h}.$$

Auch dieser Future-Vertrag  $F_{t,T_1,T_2}$  verläuft wie eine geometrisch Brown'sche Bewegung:

$$\frac{dF_{t,T_1,T_2}}{F_{t,T_1,T_2}} = \sigma_Y dW_t. \quad (5.33)$$

In diskreter Zeit kann man dann  $F_{t,T_1,T_2}$  durch

$$\log F_{t+1,T_1,T_2} = \log F_{t,T_1,T_2} - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 + \sigma_Y \epsilon_t^Y \quad (5.34)$$

beschreiben. Zur Bestimmung des Parameters  $\sigma_Y^2$  wird diese Gleichung (5.34) herangezogen. Als Daten verwenden wir hier Future-Werte des EEX-Terminmarktes. Den risikolosen Drift Parameter  $\mu_T^*$  bestimmen wir mit Hilfe von (5.32) mit einer Lieferung in  $[T, T+1]$  (24-Stunden):

$$\mu_T^* = \frac{\partial}{\partial T} \left( \log \frac{F_{t,T,T+1}}{\hat{S}_{T,T+1}} \right). \quad (5.35)$$

Da Futurepreise nicht täglich gehandelt werden, müssen wir die fehlenden Werte berücksichtigen. Daher erhalten wir aus Gleichung (5.34)

$$\tilde{F}_{t,u_t,T_1,T_2} = \log F_{t,T_1,T_2} - \log F_{t-u_t,T_1,T_2} \sim N\left(-\frac{u_t}{2} \sigma_Y^2, u_t \sigma_Y^2\right), \quad (5.36)$$

wobei  $u_t = u \geq 1$  die Anzahl der Tage seit dem letzten Handelstag angibt. Die Schätzung für den Parameter  $\sigma_Y^2$  erhalten wir aus der Loglikelihood-Maximierung. Dafür benötigen wir den Stichprobenvektor  $\tilde{f}_n^{T_1,T_2} = (\tilde{f}_{1,u_1,T_1,T_2}, \dots, \tilde{f}_{n,u_n,T_1,T_2})$  die Differenzen der beobachteten logarithmierten Futurepreise der Lieferung  $[T_1, T_2]$ , die wir mit  $y_t = \tilde{f}_{t,u_t,T_1,T_2}$  abkürzen. Die Log-Likelihood-Funktion lautet

$$L_{\tilde{f}_n^{T_1,T_2}}(\sigma_Y^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log(u_t) - \frac{n}{2} \log(\sigma_Y^2) - \sum_{t=1}^n \frac{1}{2u_t \sigma_Y^2} (y_t + \frac{u_t}{2} \sigma_Y^2)^2. \quad (5.37)$$

Die Schätzung des Parameters  $\sigma_Y^2$  wird durch Lösen der Score-Gleichung von (5.37) ermittelt.

$$\frac{\partial L_{\tilde{f}_n^{T_1, T_2}}(\sigma_Y^2)}{\partial \sigma_Y^2} = -\frac{n}{2\sigma_Y^2} - \frac{1}{2\sigma_Y^4} \sum_{t=1}^n \frac{1}{u_t} (2(y_t + \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2) \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2 - (y_t + \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2)^2) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} -n\sigma_Y^2 - \sum_{t=1}^n ((y_t + \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2)\sigma_Y^2 - \frac{1}{u_t}(y_t + \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2)^2) &= 0 \\ -n\sigma_Y^2 - \underbrace{\sum_{t=1}^n y_t \sigma_Y^2}_{\bar{F}} - \underbrace{\sum_{t=1}^n \frac{u_t}{2} \sigma_Y^4}_{\bar{U}} + \sum_{t=1}^n \frac{1}{u_t} (y_t + \frac{u_t}{2}\sigma_Y^2)^2 &= 0 \\ -n\sigma_Y^2 - \bar{F}\sigma_Y^2 - \bar{U}\sigma_Y^4 + \sum_{t=1}^n \frac{1}{u_t} y_t^2 + \bar{F}\sigma_Y^2 + \sum_{t=1}^n \frac{u_t}{4} \sigma_Y^4 &= 0 \\ \underbrace{(\sum_{t=1}^n \frac{u_t}{4} - \bar{U}) \sigma_Y^4}_{-\frac{1}{2}\bar{U}} - n\sigma_Y^2 + \sum_{t=1}^n \frac{1}{u_t} y_t^2 &= 0 \\ \sigma_Y^4 + \frac{2n}{\bar{U}} \sigma_Y^2 - \frac{\sum_{t=1}^n \frac{2}{u_t} y_t^2}{\bar{U}} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\hat{\sigma}_Y^2 = -\frac{n}{\bar{U}} + \sqrt{\frac{n^2}{\bar{U}^2} + \frac{\sum_{t=1}^n \frac{2}{u_t} \tilde{f}_{t, u_t, T_1, T_2}^2}{\bar{U}}}. \quad (5.38)$$

Anschließend sind die Parameter  $\mu_t^Y$  und  $\Sigma_B$  zu kalibrieren, wobei wir  $\mu_t^Y$  konstant annehmen, d.h.  $\mu_t^Y = \mu^Y$ . Dazu wird ein Zustandsraum für  $X_t$  aufgestellt

$$X_t = \mathbf{1}_{24} Y_t + \epsilon_t^B, \quad (5.39)$$

wobei wir als Daten  $x_t = b_t - \hat{\mu}_t^B - \hat{C}_t^B r_t^B$  verwenden. Der Prozess  $X_t$  ist ein Zustandsraummodell mit Übergangsgleichung

$$Y_t = Y_{t-1} + \mu^Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 + \sigma_Y \epsilon_t^Y, \quad (5.40)$$

$$(5.41)$$

wobei  $\sigma_Y^2$  fixiert ist,  $\epsilon_t^Y \sim N(0, 1)$ ,  $\epsilon_t^B \sim N(0, \Sigma^B)$ ,  $\mathbb{E}[\epsilon_t^Y \epsilon_s^B] = 0$  für alle  $s, t$  mit

$$\Sigma^B = \begin{pmatrix} (\sigma_1^B)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\sigma_{24}^B)^2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kalmanfiltertechnik kann man die Log-Likelihood-Funktion aufstellen und bezüglich den unbekanntem Parametern  $\mu^Y$  und  $\Sigma_B$  optimieren. Abschließend kann der risikoneutrale Drift  $\mu_t^*$  geschätzt werden.

## Ergebnisse

Zur Schätzung von  $\sigma_Y^2$  werden Futurepreise vom EEX-Terminmarkt herangezogen. Dazu stehen neben verschiedenen Lieferzeiträumen  $[T_1, T_2]$  (Monat, Quartal und Jahr) auch zwei verschiedene Lasttypen (siehe [19]) zur Verfügung:

1. *Grundlast (Baseload)*, die Liefertage von Montag bis Sonntag für alle 24 Stunden des Tages umfasst und
2. *Spitzenlast (Peakload)*, die Liefertage von Montag bis Freitag (einschließlich Feiertage) von 08 : 00 Uhr bis 20 : 00 Uhr umfasst,

wobei alle Lasttypen mit der Lieferperiode (Monat, Quartal und Jahr) kombinierbar sind. Kontrakte mit Monatslieferungen können bis zu 6 Monate im Voraus gehandelt werden, Kontrakte mit Quartalslieferungen bis zu 7 Quartale im Voraus und Kontrakte mit Jahreslieferungen bis zu drei Jahre im Voraus. Aus dieser Beschränkung ergibt sich eine begrenzte Zeitreihe für die Preise des entsprechenden Future-Vertrages.

Zum Zeitpunkt der Modellerstellung stammten die letzt aktuellen Future-Daten aus dem Jahr 2003 (2.1. 2003 bis 30.12.2003). Zur Schätzung von  $\sigma_Y^2$  wurden überwiegend Quartals- und Jahresfutures, die in diesem Zeitraum gehandelt wurden, in Betracht gezogen. In Tabelle 5.9 sind die Schätzungen des Parameters  $\hat{\sigma}_Y^2$  für verschiedene Lieferperioden und für die zwei Grundlasttypen angeführt. Wie man sieht, ergeben sich ähnliche Resultate. Für die weitere Vorgehensweise werden wir die Schätzung

$$\hat{\sigma}_Y^2 = 9,19 \times 10^{-6}$$

aus den Daten des Futures mit Lieferperiode Quartal April 2004 Baseload verwenden.

Kontrakt	$\sigma_y^2$	Kontrakt	$\sigma_y^2$
Q-Apr-04 Baseload	9,19059E-06	Q-Apr-04 Peakload	1,16945E-05
Q-Jul-04 Baseload	8,92883E-06	Q-Jul-04 Peakload	1,14366E-05
Q-Okt-04 Baseload	9,66754E-06	Q-Okt-04 Peakload	9,66754E-06
J-Jan-05 Baseload	9,09432E-06	J-Jan-05 Peakload	9,09432E-06
J-Jan-06 Baseload	5,00225E-06	J-Jan-06 Peakload	5,00225E-06

Tabelle 5.9: Schätzung des Parameters  $\hat{\sigma}_Y^2$  für verschiedene Lieferperioden (Q: Quartal, J: Jahr)

Nachdem die Volatilität  $\hat{\sigma}_Y^2$  geschätzt wurde, können die Parameter  $\mu^Y$  und  $\hat{\Sigma}^B$  kalibriert werden und man erhält folgende Ergebnisse:

$$\hat{\mu}^Y = 3,09 \times 10^{-6} \quad (5.42)$$

und  $\hat{\Sigma}^B$  siehe Tabelle 5.10.

Abschließend ist der risikoneutrale Drift  $\mu_t^*$  zu bestimmen. Dabei stellt man fest, dass ein zeitabhängiger Drift aufgrund der zur Verfügung stehenden Lieferperioden nicht leicht zu modellieren ist. Prinzipiell ist die aktuelle Forwardkurve notwendig. Da jedoch nur einige wenige Future-Verträge mit bestimmten Lieferzeiten (Monat, Quartal und Jahr) existieren, werden wir

$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$	$\hat{\sigma}_5^2$	$\hat{\sigma}_6^2$
0,0111	0,0103	0,0075	0,0076	0,0077	0,0113
$\hat{\sigma}_7^2$	$\hat{\sigma}_8^2$	$\hat{\sigma}_9^2$	$\hat{\sigma}_{10}^2$	$\hat{\sigma}_{11}^2$	$\hat{\sigma}_{12}^2$
0,0171	0,0187	0,0108	0,0070	0,0072	0,0097
$\hat{\sigma}_{13}^2$	$\hat{\sigma}_{14}^2$	$\hat{\sigma}_{15}^2$	$\hat{\sigma}_{16}^2$	$\hat{\sigma}_{17}^2$	$\hat{\sigma}_{18}^2$
0,0068	0,0064	0,0064	0,0062	0,0068	0,0085
$\hat{\sigma}_{19}^2$	$\hat{\sigma}_{20}^2$	$\hat{\sigma}_{21}^2$	$\hat{\sigma}_{22}^2$	$\hat{\sigma}_{23}^2$	$\hat{\sigma}_{24}^2$
0,0084	0,0083	0,0093	0,0078	0,0084	0,0116

 Tabelle 5.10: Die geschätzten Parameter  $\hat{\sigma}_h^2$  von  $\epsilon_t^B$ ,  $h = 1, \dots, 24$ 

die Forwardkurve durch die vorhandenen Futurepreise mit den verschiedenen Fälligkeitszeiträumen approximieren (siehe Abbildung 5.15).

Zunächst tragen wir beginnend bei einem Ausgangszeitpunkt (2.1.2003) ausgewählte gehandelte Future-Verträge (Monat, Quartal, Jahr - Baseload) auf der Zeitachse auf und glätten die erzeugte Treppenfunktion durch Interpolation, sodass wir für jeden Fälligkeitstag einen Preis erhalten, d.h. wir approximieren  $F_{t,T,T}$  durch die Interpolation. Anschließend wird  $\mu_T^*$  durch die Lösung von Gleichung (5.35) diskret approximiert, d.h. sei

$$FC_T = \log \left( \frac{F_{t,T,T+1}}{\hat{S}_{t,T,T+1}} \right)$$

dann wird  $\mu_T^*$  (siehe (5.35)) durch

$$\mu_T^* \approx FC_T - FC_{T-1} \quad (5.43)$$

angenähert, wobei aufgrund der Approximation von  $F_{t,T}$  (siehe (5.32)) die Forwardkurve erst ab 1. Juli 2004 herangezogen wird. Abbildung 5.16 zeigt die interpolierte Forwardkurve für den Zeitraum vom 1. Juli 2003 bis 31. Dezember 2004 zusammen mit den Erwartungswerten  $\hat{S}_{t,T,T}$ . Hier wird sehr schön verdeutlicht, dass die interpolierte Forwardkurve wesentliche Unterschiede bezüglich Nicht-/Arbeitstag aufgrund der geringen Informationen – man besitzt nur die Futurepreise von Monats-, Quartals- und Jahresverträgen – nicht abbilden kann. Die Ergebnisse für  $\mu_T^*$  unter Anwendung der diskreten Form (siehe (5.35)) sind in der Abbildung 5.17 illustriert. Zur Vereinfachung des Modells werden wir den zeitabhängigen Drift

$$\mu_T^* \approx \mu^*$$

durch eine Konstante annähern. Dafür mitteln wir die Ergebnisse von (5.43) über die zwei Jahre 2003 und 2004 und erhalten

$$\hat{\mu}^* = 7,96 \times 10^{-5}.$$

Das bedeutet, der Preis eines Future-Kontraktes für die Lieferperiode 2004 ist um ca. 3% (=  $7.96 \times 10^{-5} \times 365$ ) höher als für das Jahr 2005. In [7] wird ebenfalls ein konstanter risikoneutraler Drift angenommen.

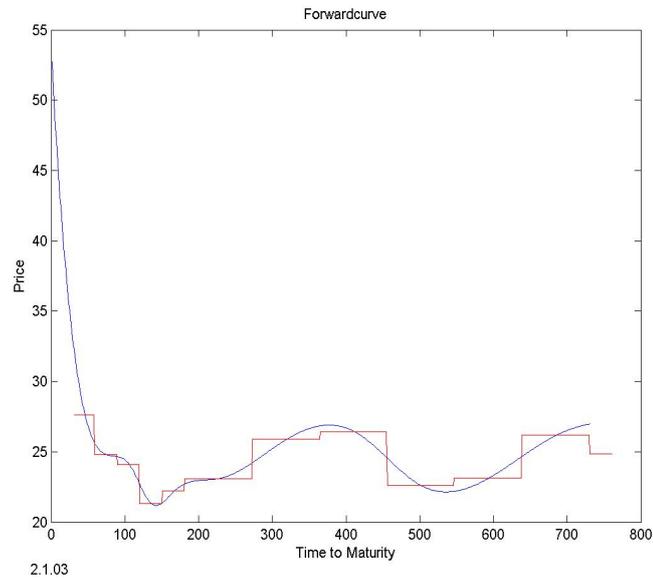


Abbildung 5.15: Interpolierte Forwardkurve vom 2.1.2003 der EEX Grundlast mit Fälligkeit Jänner 2003 bis Dezember 2004

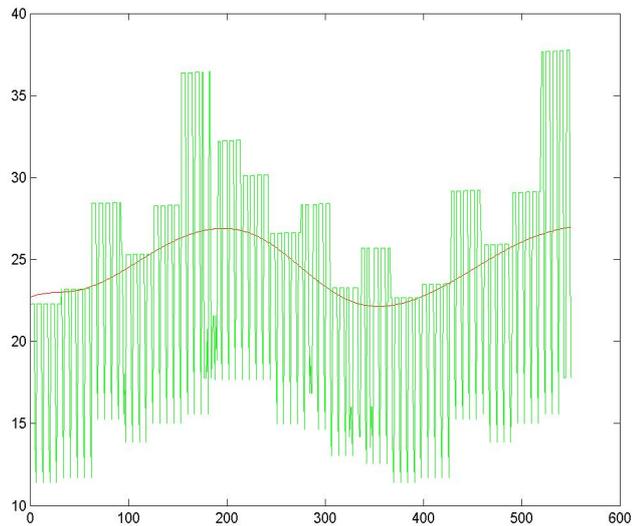


Abbildung 5.16: Forwardkurve vom 2.1.2003 der EEX Grundlast mit Fälligkeit Juli 2003 bis Dezember 2004 im Vergleich zu den geschätzten Erwartungswerten  $\hat{S}_{T,T}$

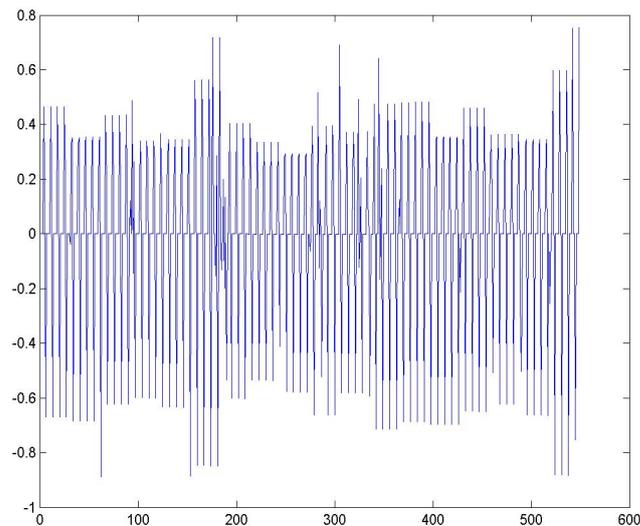


Abbildung 5.17:  $\mu_T^*$  aus der EEX Grundlast mit Lieferzeit Juli 2003 bis Dezember 2004, ausgehend vom 2.1.2003

## 5.6 Die Performance des Preismodells - Eine Simulationsstudie

Da nun die Parameter des Modells vollkommen spezifiziert sind, wird zur Überprüfung der Qualität des Modells eine Simulationsstudie durchgeführt. Dazu betrachten wir den Zeitraum 01.05.2002 bis 30.04.2003. Zunächst wurden 1000 Preissimulationen generiert und auf Stundenbasis transferiert. In Abbildung 5.18 werden diese 1000 Preissimulationen dem tatsächlichen Preisverlauf des EEX-Spotmarktes gegenübergestellt. Man sieht, dass unser Modell die zeitabhängige Volatilität sehr gut abbildet. In den Sommer- und Wintermonaten (auf der Zeitachse zwischen 1000 und 3000 bzw. 4500 und 6500) ist der Preis stärkeren Schwankungen ausgesetzt, als im Frühling und Herbst. Das Spikeverhalten wird ebenfalls widerspiegelt (siehe Abbildung 5.18 oder Abbildung 5.19), d.h. durch das Regime-Switching kann man dieses für den Strommarkt sehr typisches Phänomen sehr gut beschreiben.

Einen tieferen Einblick erhält man, wenn man eine Simulation mit dem EEX-Spotmarkt vergleicht (siehe Abbildung 5.19 unten). Rasante Preisanstiege, die sofort auf ein mittleres Niveau zurückkehren, treten verhältnismäßig selten auf, z.B. um Stunde 1200 oder 2700. Bei diesem Simulationspfad treten aber auch im Winter solche Spitzen auf, aber nicht in dem Ausmaß. Im oberen Teil der Abbildung sieht man, dass es sehr wohl Simulationen gibt, die Preishöhen über 300 Euro generieren. In Abbildung 5.18 sind die Preisrealisationen nicht abgeschnitten dargestellt. Der höchste Simulationspreis liegt bei 1800. Am EEX-Spotmarkt wurde am 7.1.2003 ein Höchstpreis von 1720 Euro (siehe Kapitel 3 Abbildung 3.3) erzielt. Im Sommer (Stunde 1000 bis 3000) und Winter (4500 bis 6500) sind die Preise volatiler als in den anderen Jahreszeiten. Dieses Verhalten lässt sich in den Abbildungen 5.27 bis 5.34 gut studieren, wo der Median, das 0,025-Quantil und das 0,975-Quantil mit dem tatsächlichen Preis verglichen werden. Zusätzlich wird dies hinsichtlich Arbeits- bzw. Nichtarbeitstag getrennt.

In Abbildung 5.20 sieht man wie ein Simulationspfad in logarithmischer Skala verläuft. Man erkennt, dass auch negative Preisspikes (Preis ist sehr klein) in unserem Modell abgebildet werden, da wir sowohl für Arbeitstag als auch Nichtarbeitstag ein Sprungverhalten über Regime-Switching eingebaut haben. Bei Nichtarbeitstagen liegt die Sprungrichtung in negativer Richtung vor, d.h. die Angebotsseite bietet unerwartet mehr Kapazitäten als der Bedarf benötigt, daher rasselt der Preis in die Tiefe, wie man in den drei unteren Grafiken sehen kann. Hier werden zusätzlich die entsprechenden Zustände der drei Hauptkomponenten von den Schwankungen auf der Angebotsseite ( $B_t$ ) dargestellt. Durch die Trennung der Prozesse in Arbeits- und Nichtarbeitstag kann das Sprungverhalten (an Arbeitstagen Preisanstiege und an Nichtarbeitstagen rasante Preissenkungen) besser modelliert werden. Wie bereits die Parameterwerte zeigten, ist die Sprungkomponente im ersten Faktor die treibende Kraft. Das ist auch darauf zurückzuführen, dass die erste Hauptkomponente bereits mehr als 50% der Gesamtvarianz erklärt.

Die Entwicklung des Preises zu gewissen Zeiten ist ebenfalls von großem Interesse. In Abbildung 5.21 und 5.22 werden die Preissimulationen – aufgeteilt nach Onpeak-Zeiten (08:00 - 20:00) und Offpeak-Zeiten (00:00-08:00 und 20:00 - 00:00), sowie nach Arbeits- und Nichtarbeitstagen – mit dem tatsächlichen Preisverlauf verglichen. Weiters werden die Preise an Wochenenden (Abbildung 5.23) und an Feier- und Fenstertagen (5.24) untersucht. Im Großen und Ganzen wird das typische Preisverhalten widergespiegelt. Das größte Problem, mit dem wir am Anfang zu kämpfen hatten, war die Preisentwicklung an Nichtarbeitstagen. In der ersten Modellvariante, wo wir die drei Hauptkomponenten der Schwankungen auf der Angebotsseite mit SARMA-Zeitreihen ohne Unterscheidung von Arbeits- und Nichtarbeitstagen kalibrierten, wurden unrealistische Preise erzeugt (siehe Abbildung 5.21 und 5.22, erste Modellvariante). Insbesondere in den Offpeak-Zeiten entstanden Preise, die vollkommen inakzeptabel waren.

Bei Arbeitstagen hatten wir nahezu keine Probleme. Da das Verhalten an Arbeits- und Nichtarbeitstagen aber große Unterschiede mit sich bringt und insbesondere die Struktur der Fenstertage und Samstage keine eindeutige Zuordnung zu Arbeits- bzw. Nichtarbeitstagen ermöglicht, ist eine gemeinsame Betrachtung nicht gut geeignet (siehe Abbildungen 5.21, 5.22). Durch die Trennung in einen Arbeits- und Nichtarbeitstagsprozess konnten wir die Situation deutlich verbessern, jedoch nicht komplett bereinigen.

In den Abbildungen 5.23 und 5.24 werden die Preissimulationen für die Wochenenden und Feier-/Fenstertagen dargestellt. Hier zeigen sich deutliche Verbesserungen hinsichtlich der hohen Preisentwicklungen, insbesondere bei den Feier-/Fenstertagen. Wie hoch der Anteil dieser Preisentwicklungen ist, haben wir in Form von Histogrammen dargestellt, in denen wir die relative Häufigkeit der simulierten Preise mit den EEX-Spotpreisen bezüglich Arbeits- und Nichtarbeitstag berechneten (Abbildung 5.26 und 5.25). Die Preise der Arbeitstage nähern sich im Modell mit Regime-Switching dem EEX-Spotpreisen im Bereich von 20 bis 30 Euro sowie auch bei Preisen von 70 Euro und mehr. Zwar hat sich die Masse für die Preise 120 Euro durch das Einbinden von Sprungkomponenten gegenüber der ersten Variante leicht erhöht, ist aber im Vergleich zum EEX-Spotmarkt noch immer gering. Bei den Preisen an Nichtarbeitstagen konnten durch das Einbinden von Sprungkomponenten, sowie die Trennung der stochastischen Komponenten auf der Angebotsseite in einen Arbeits- und Nichtarbeitstagsprozess doch bedeutende Verbesserungen erzielt werden, insbesondere bei den Preisen 30 Euro und mehr.

Abschließend haben wir zur Evaluierung des Modells für jede Stunde des betrachteten Zeitraumes, den Median, das empirische 0,025- und 0,975-Quantil von 1000 Simulationen berechnet und mit dem tatsächlichen Preis verglichen (siehe die Abbildungen 5.27 bis 5.34), wobei wir die Arbeits- und Nichtarbeitstage separat betrachten. Im Frühling erreicht das 0,975-Quantil der Simulation bis über 80 Euro pro Megawattstunde. Zu Mittag, gegen Abend (20:00) und zu gewissen Nachmittagsstunden sind die Preise höher als in der Früh und in der Nacht. Im März sind die Preise zu Mittag und gegen Abend in der gleichen Größenordnung, wogegen im April die Mittagstunde deutlich höhere Preise ausweist. Im Mai stechen die Mittagspreise eindeutig hervor. Der tatsächliche Preis des EEX-Spotmarktes entspricht dem mittleren Preis der Simulationen (Median). An Nichtarbeitstagen ist die Bandbreite der Preisentwicklung geringer. Vergleicht man die Struktur des Preises, so sieht man, dass diese sich sehr wohl von der Struktur am Arbeitstag unterscheidet.

Im Sommer sind die Preise volatiler, insbesondere an Arbeitstagen. Die empirischen 0,975-Quantile erreichen dort sogar über 250 Euro (siehe z.B. 7. Juni 2003). Das betrifft vor allem die Mittagszeit. Hier können die Preise aufgrund der hohen Temperaturen, die im Sommer anzutreffen sind, in die Höhe schnellen. An Nichtarbeitstagen verläuft der Preis auf einem niedrigeren Niveau, wobei im Monat August die empirischen 0,975-Quantile aufgrund unseres Modells in den Morgenstunden über 70 Euro erreichen können.

Die Preise im Herbst beruhigen sich wieder. Im September ist der Preis an Arbeitstagen zur Mittagszeit noch am höchsten. Die empirischen 0,975-Quantile erreichen noch über 140 Euro pro Megawattstunde. Im Oktober liegt die Schwankungsbreite an Arbeitstagen schon weit darunter. Im November verändert sich die zeitliche Position des Spitzenpreises. Er verlagert sich auf die Abendstunde (20:00 Uhr). Im Vergleich mit dem tatsächlichen Preisverlauf zeigt sich, dass der Median in der gleichen Größenordnung liegt. Bei den Nichtarbeitstagen schwankt der Preis zwischen nahezu 0 und 63 Euro. Klare Strukturen lassen sich hier nicht erkennen.

Abschließend können wir über die Wintermonate folgendes feststellen. In den Abendstunden (20:00) können sich hohe Preise entwickeln, besonders in den Monaten Dezember und Jänner. Die empirischen 0,975-Quantile erreichen bis über 250 Euro (16. Dezember 2002). Im Monat Februar beruhigt sich die Lage deutlich. An Nichtarbeitstagen ist der Preisverlauf wieder von anderer Struktur und die Bandbreite ist deutlich geringer.

Im Großen und Ganzen zeigt sich jedoch, auch wenn an Nichtarbeitstagen in seltenen Fällen unrealistische Preise entstehen, dass unser Modell die typischen Charakteristika des Preises sehr gut abbildet. Neben den saisonalen Komponenten, liegen saisonale Schwankungen vor, wie es die monatliche Betrachtung des Preises getrennt in Arbeits- und Nichtarbeitstagen im Detail zeigt. Das sprungartige Verhalten wird durch das Regime-Switching in den stochastischen Komponenten auf der Angebotsseite berücksichtigt. Durch Einbinden von stationären SARIMA-Prozessen wird das Mean-Reversion Verhalten abgebildet. Die langfristigen Schwankungen finden nur in den Forwards ihren Niederschlag und wirken sich kaum auf die Spotpreise aus. Schlussendlich ist es uns gelungen durch das Trennen der stochastischen Komponenten auf der Angebotsseite in einen Arbeits- und Nichtarbeitstagsprozess die Zahl der unrealistischen Preise an Nichtarbeitstagen deutlich zu reduzieren.

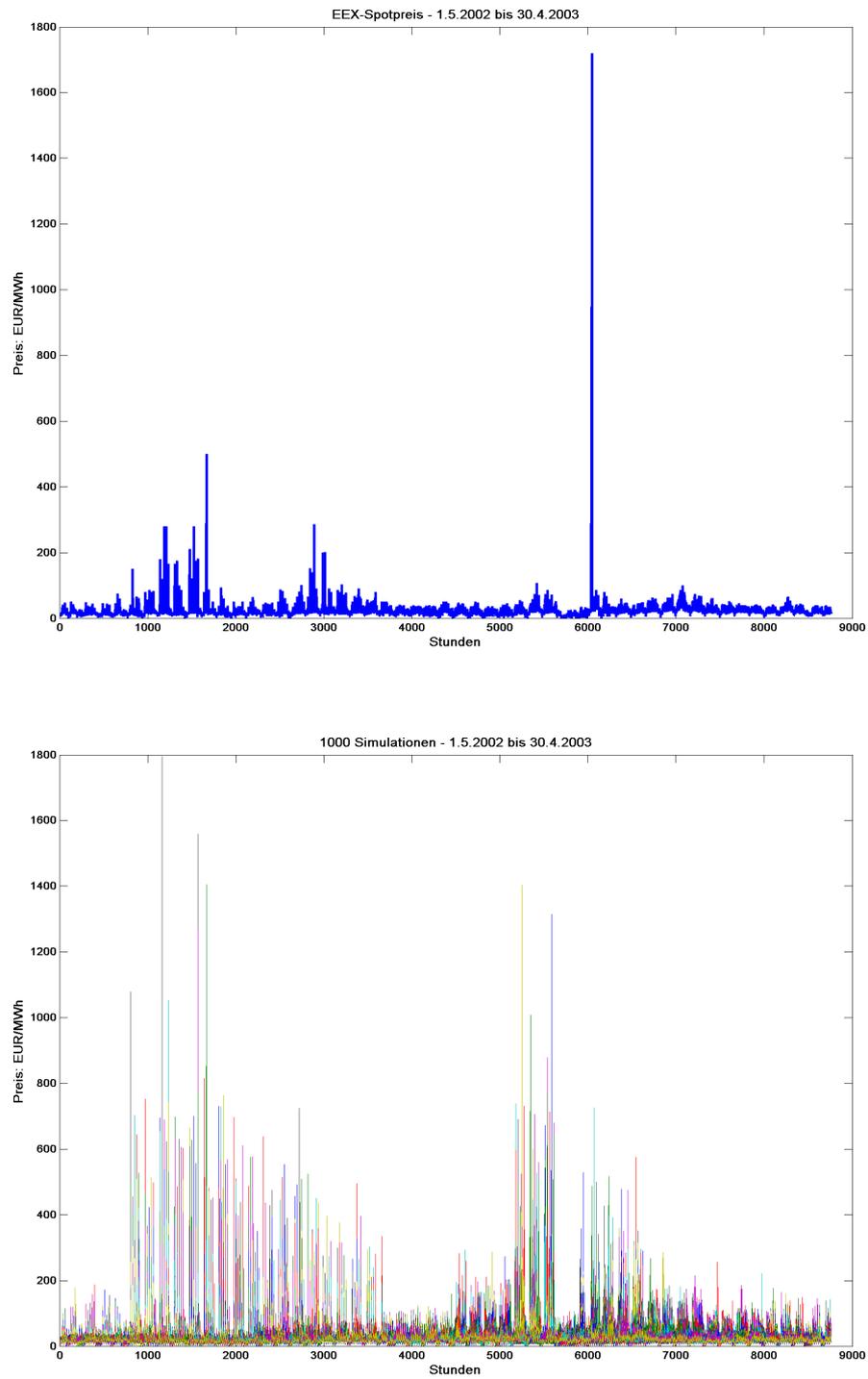
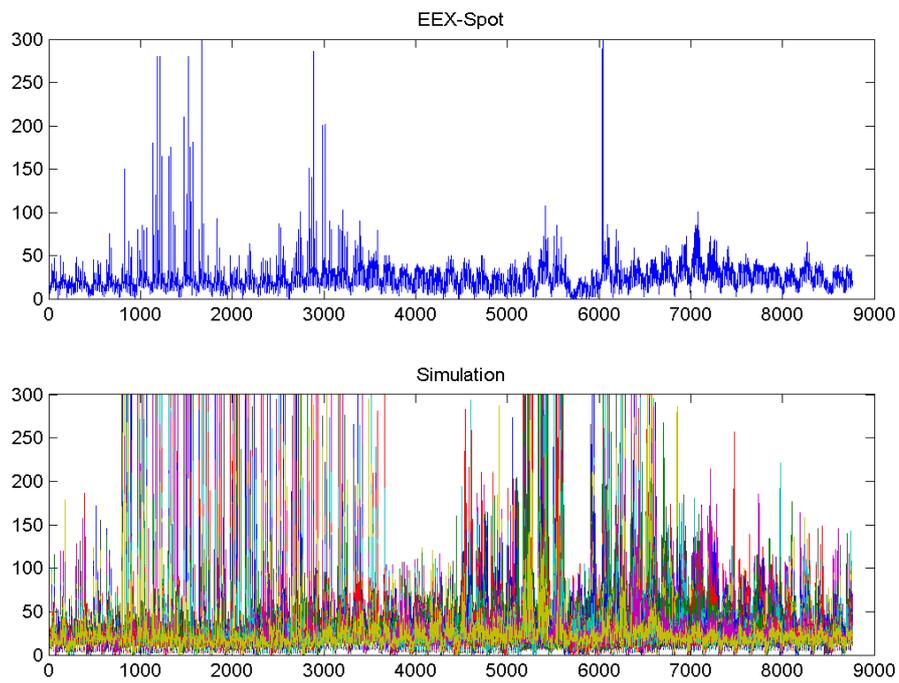


Abbildung 5.18: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003

### 1000 Simulationen



### 1 Simulation

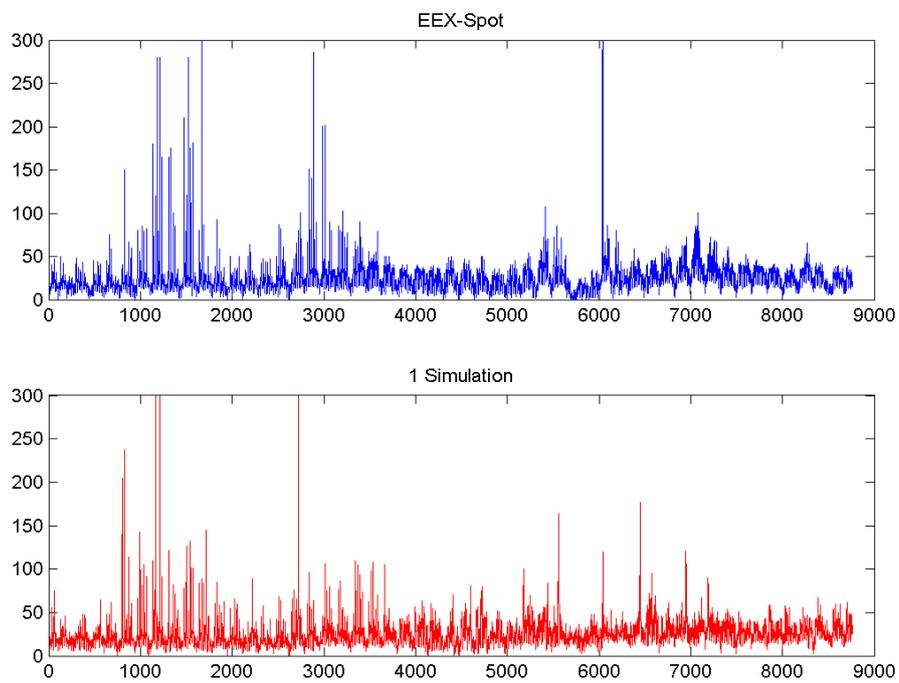
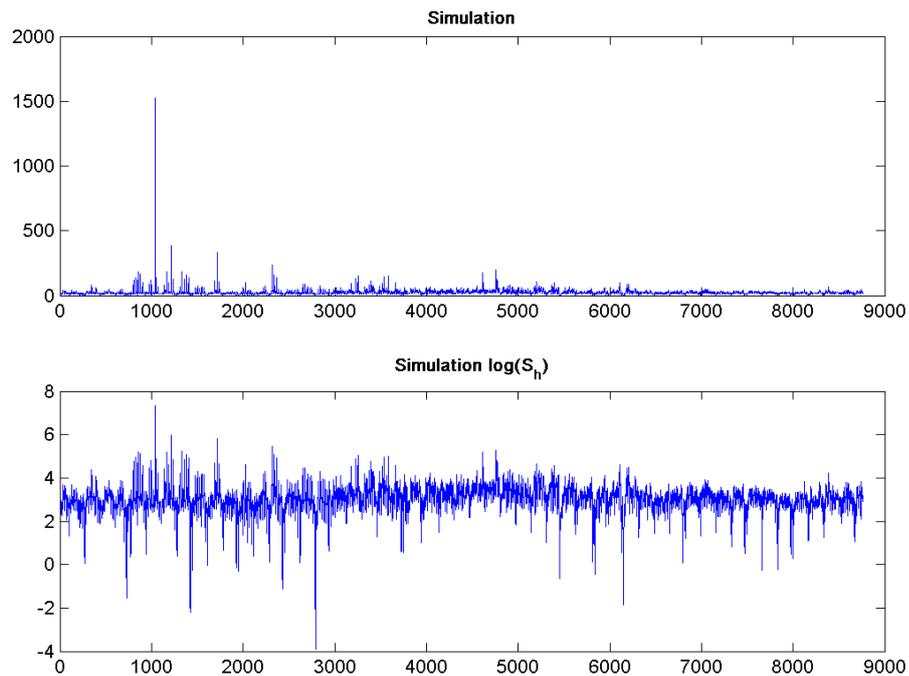


Abbildung 5.19: Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003

### 1 Simulation



### Zustandsverlauf der drei Faktoren $R_t^B(i), i = 1, 2, 3$

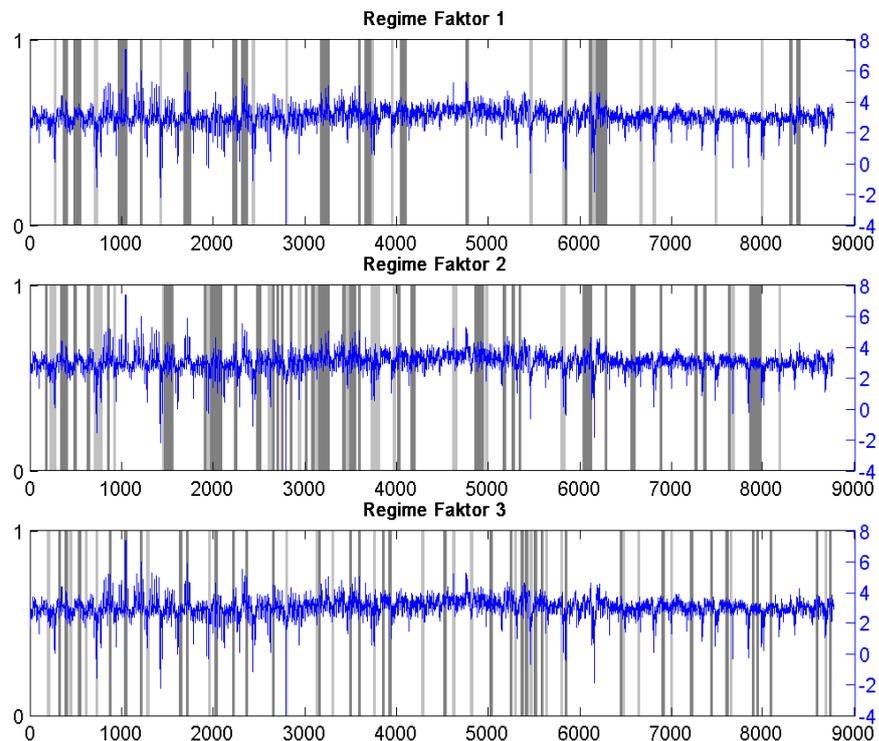
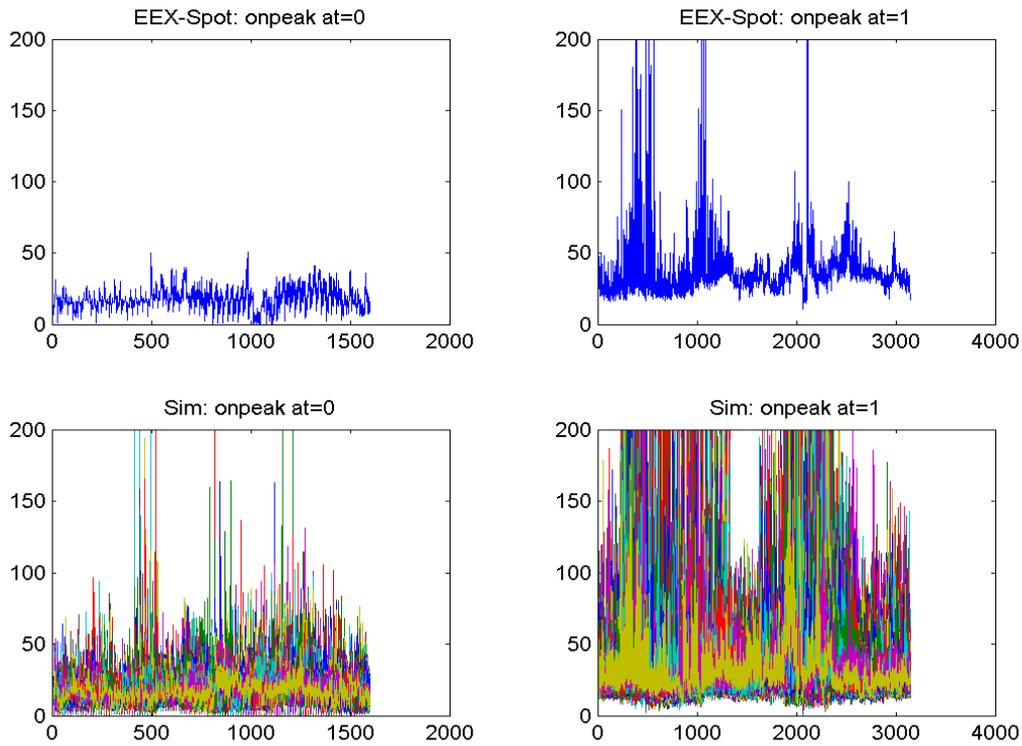


Abbildung 5.20: 1 Preissimulation (auf Stundenbasis und logarithmischer Basis) und die Zustände in den drei Hauptkomponenten von  $B_t$  (bei grauer Hinterlegung: Regime befindet sich im außernatürlichen Zustand an Arbeitstagen, bei hellgrauer an Nichtarbeitstagen) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003

### Modell



### Erste Modellvariante

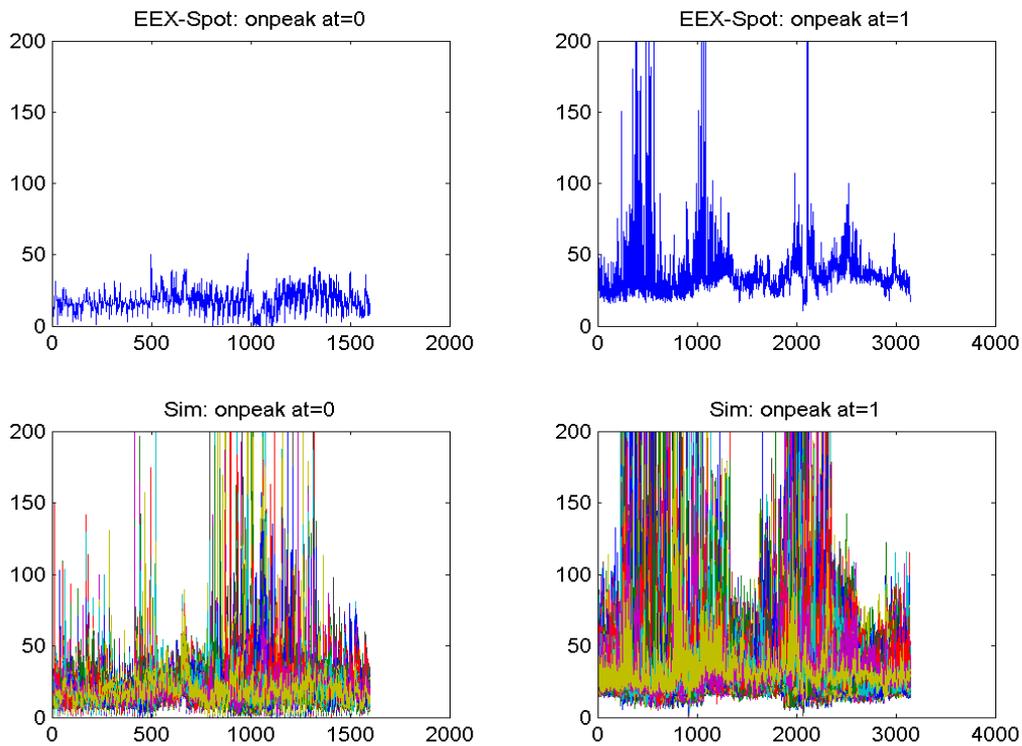
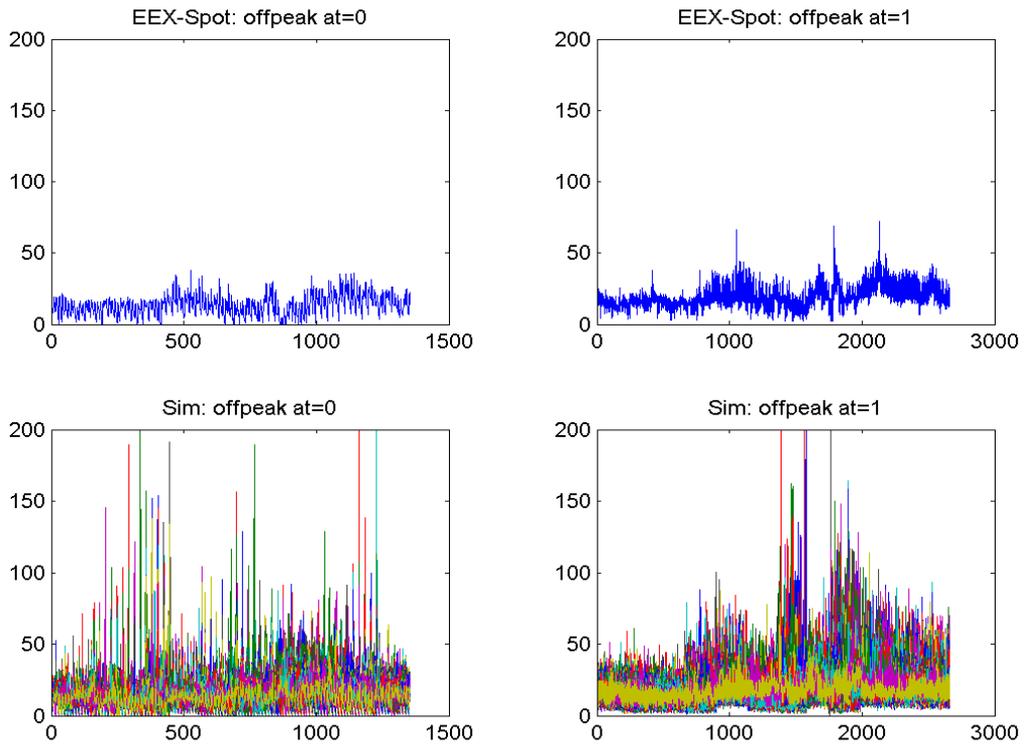


Abbildung 5.21: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Nicht-/Arbeitsstag Onpeak (08:00 - 20:00) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante

**Modell**



**Erste Modellvariante**

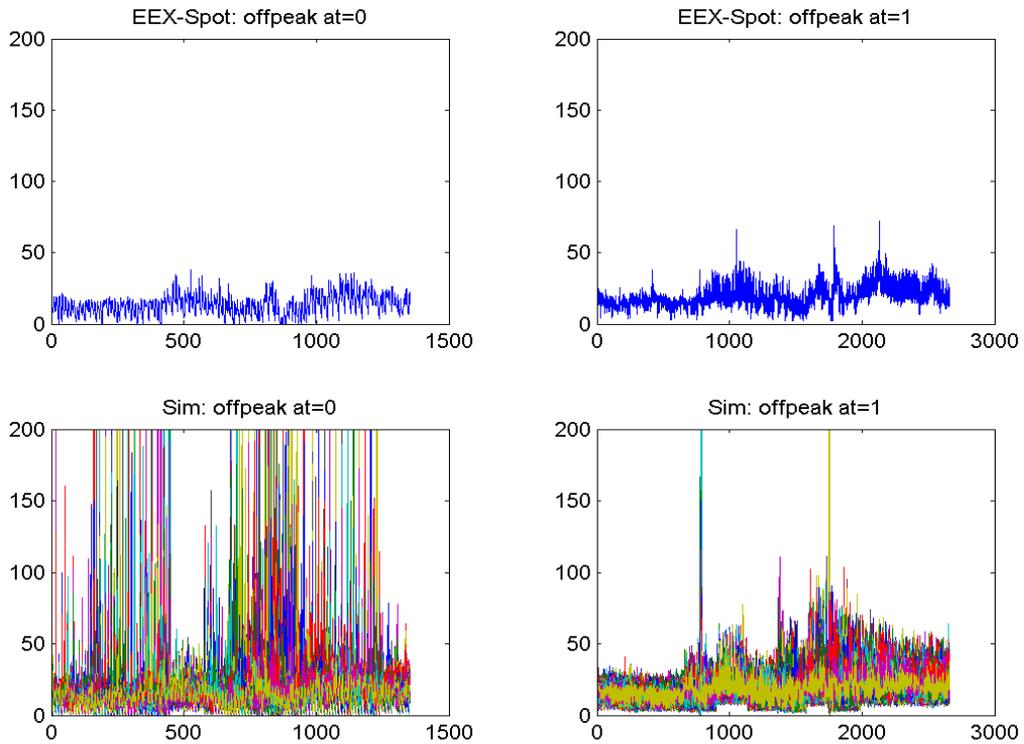
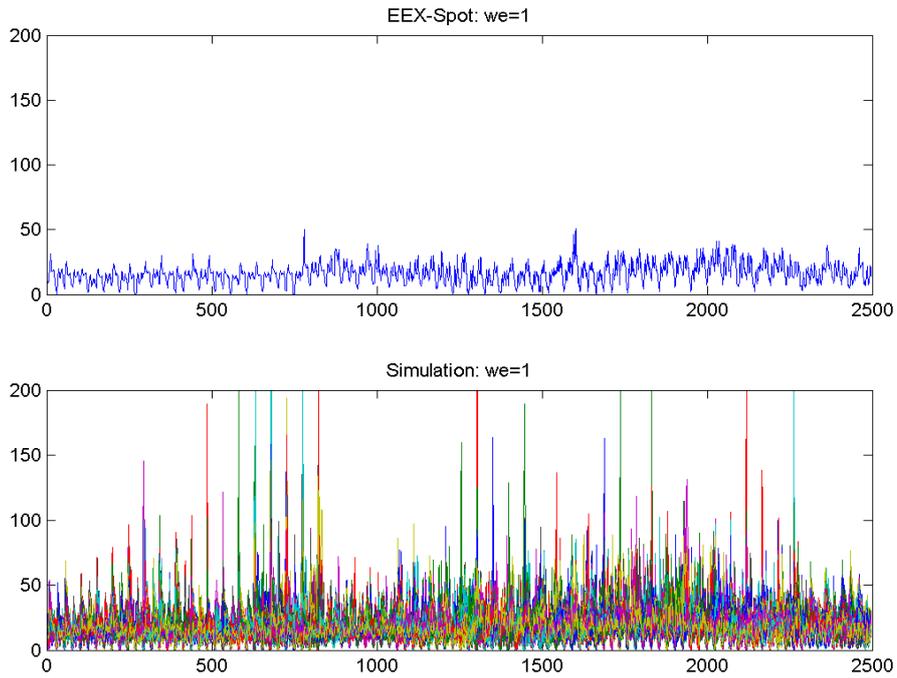


Abbildung 5.22: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Nicht-/Arbeitstag Offpeak (00:00-08:00 und 20:00 - 00:00) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Variante

### Modell



### Erste Modellvariante

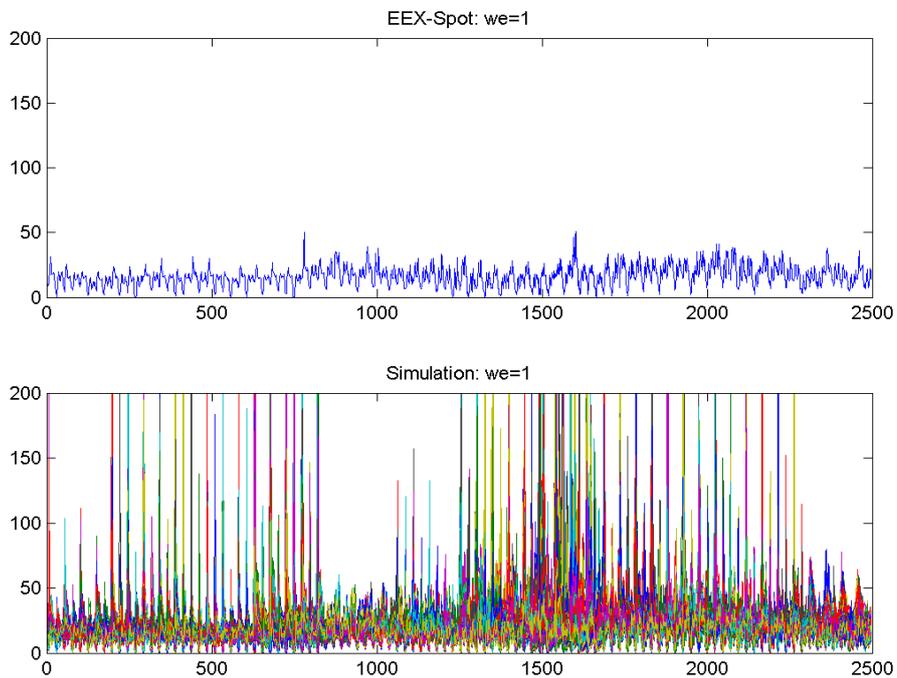


Abbildung 5.23: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Wochenende (Samstag und Sonntag) mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante

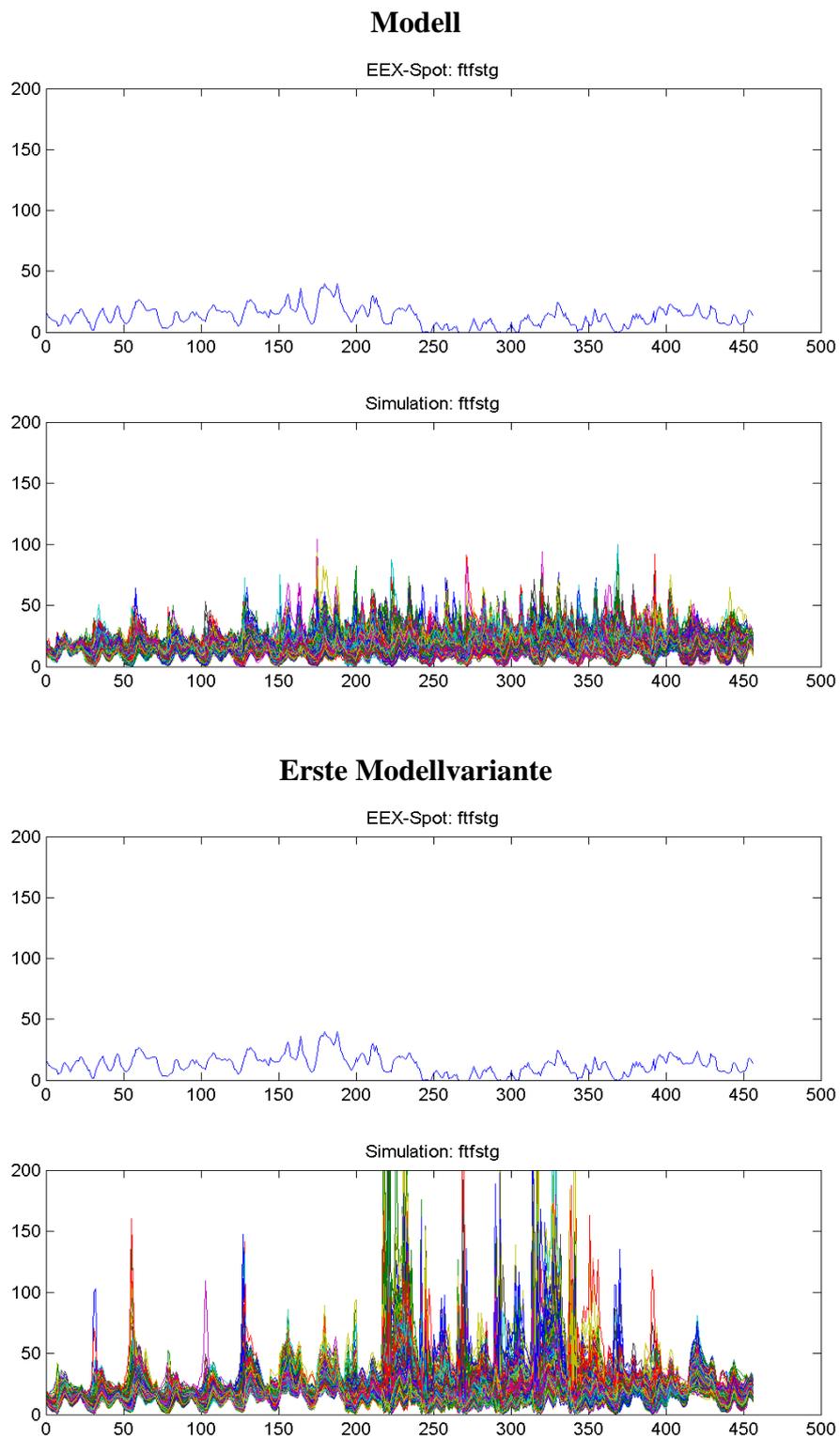
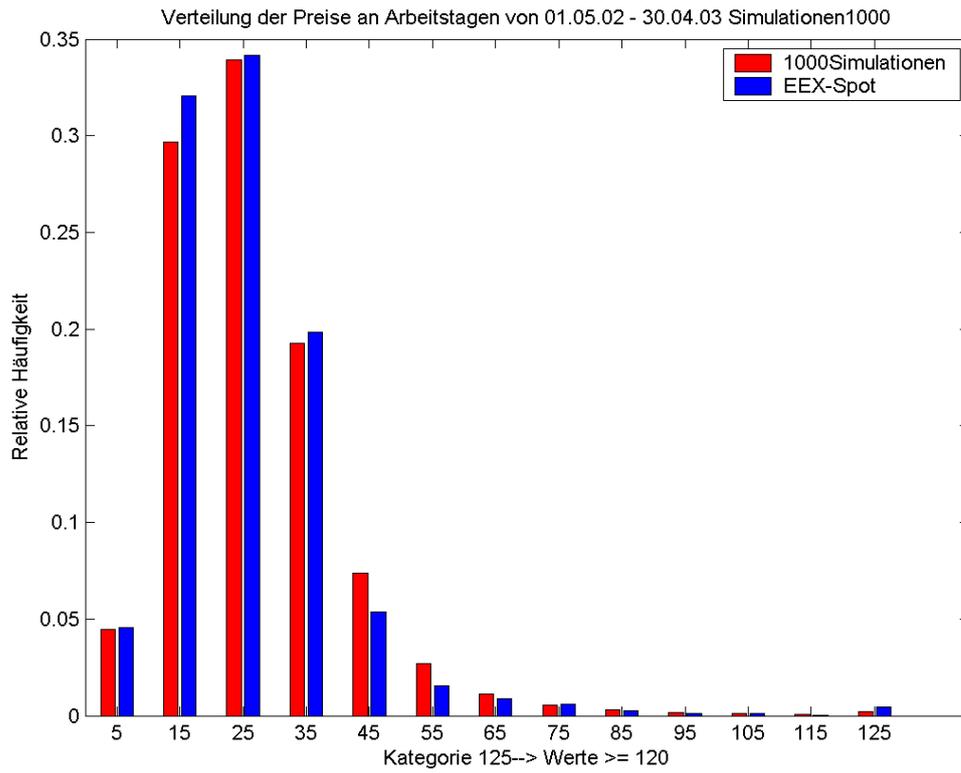


Abbildung 5.24: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003 - Vergleich Feiertag bzw. Fenstertag mit dem EEX-Spotmarkt und der ersten Modellvariante

### Modell



### Erste Modellvariante

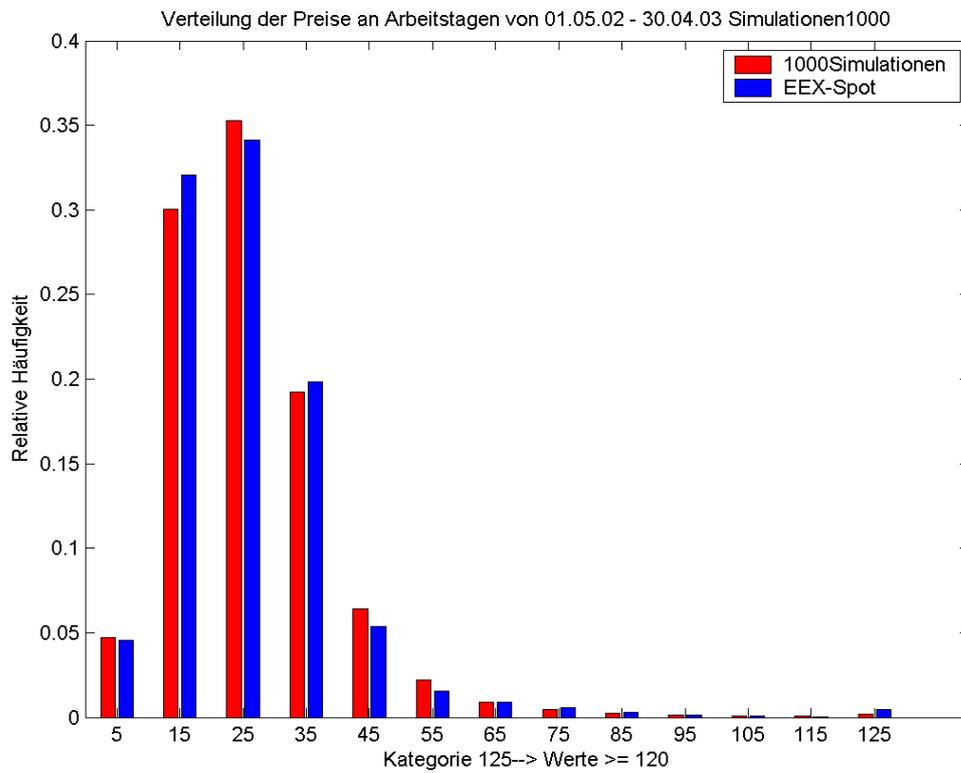
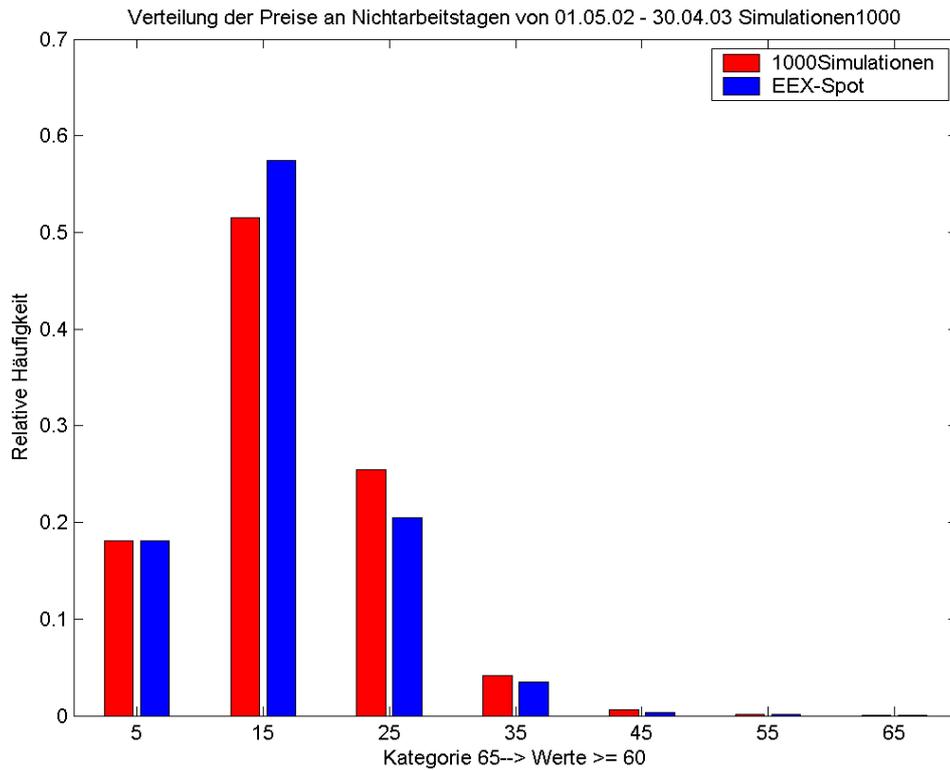


Abbildung 5.25: 1000 Preissimulationen Arbeitstag (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003: Vergleich mit der ersten Modellvariante Histogramm

### Modell



### Erste Modellvariante

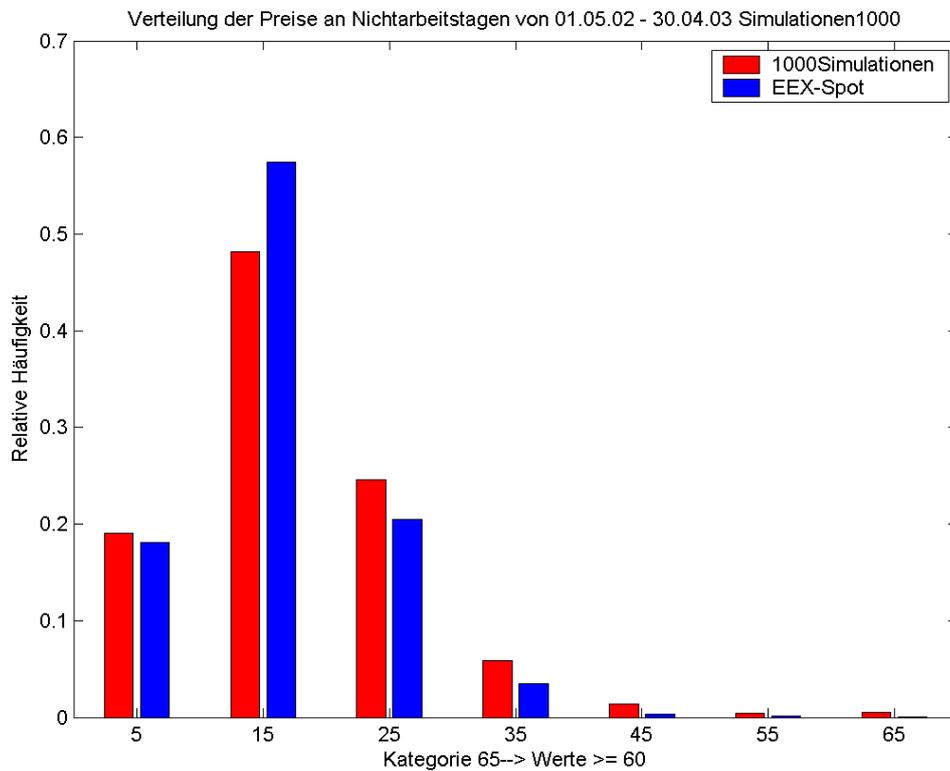


Abbildung 5.26: 1000 Preissimulationen Nichtarbeitstag (auf Stundenbasis) vom 1.5.2002 bis 30.4.2003: Vergleich mit der ersten Modellvariante Histogramm

### Frühling Arbeitstag

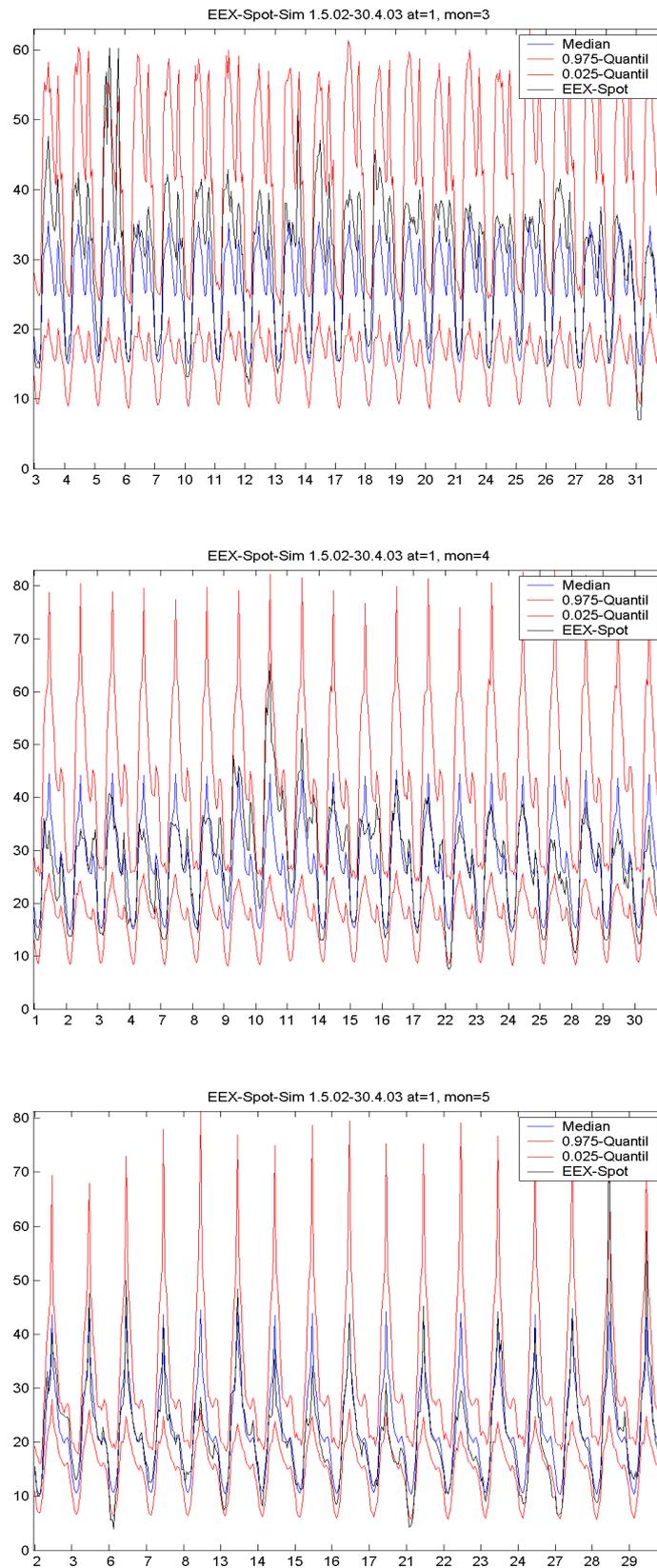


Abbildung 5.27: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate März, April und Mai 2003, Arbeitstag

### Frühling Nichtarbeitstag

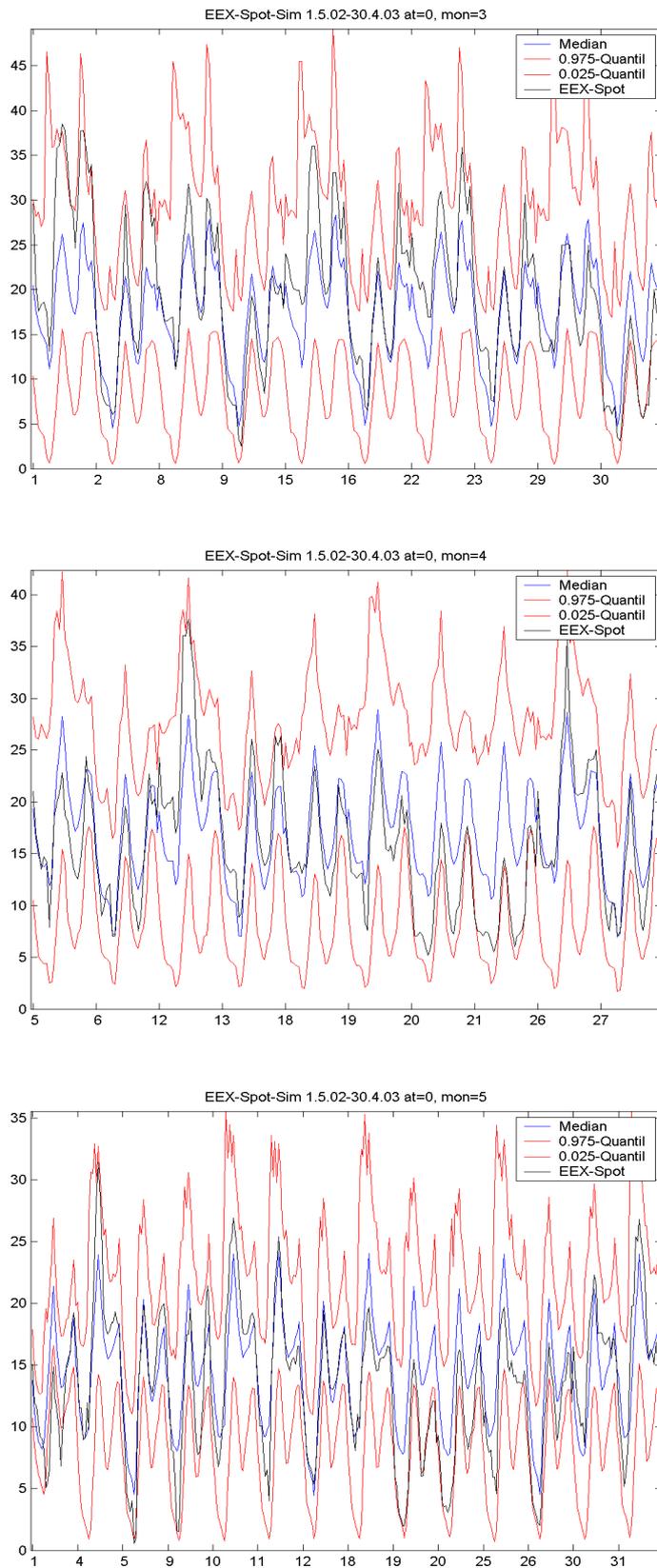


Abbildung 5.28: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate März, April und Mai 2003, Nichtarbeitstag

### Sommer Arbeitstag

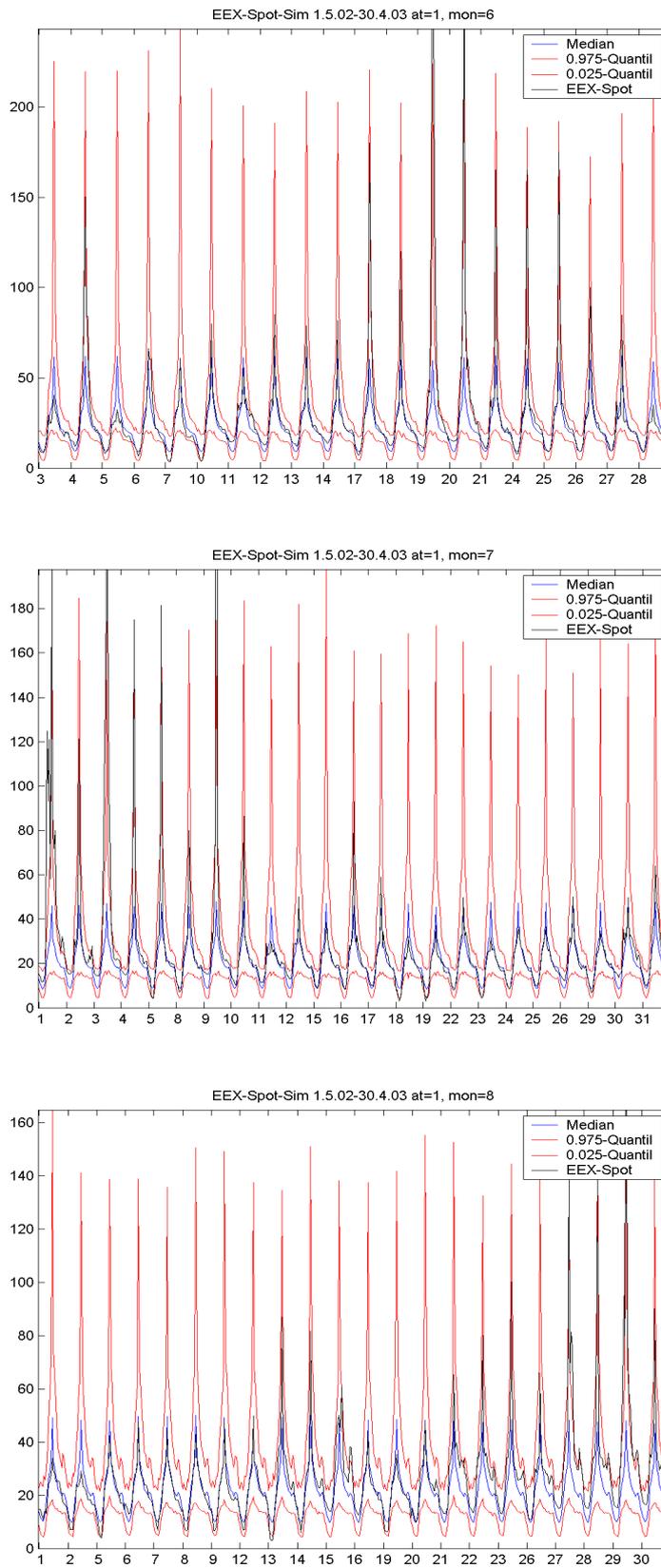


Abbildung 5.29: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Juni, Juli und August 2003, Arbeitstag

### Sommer Nichtarbeitstag

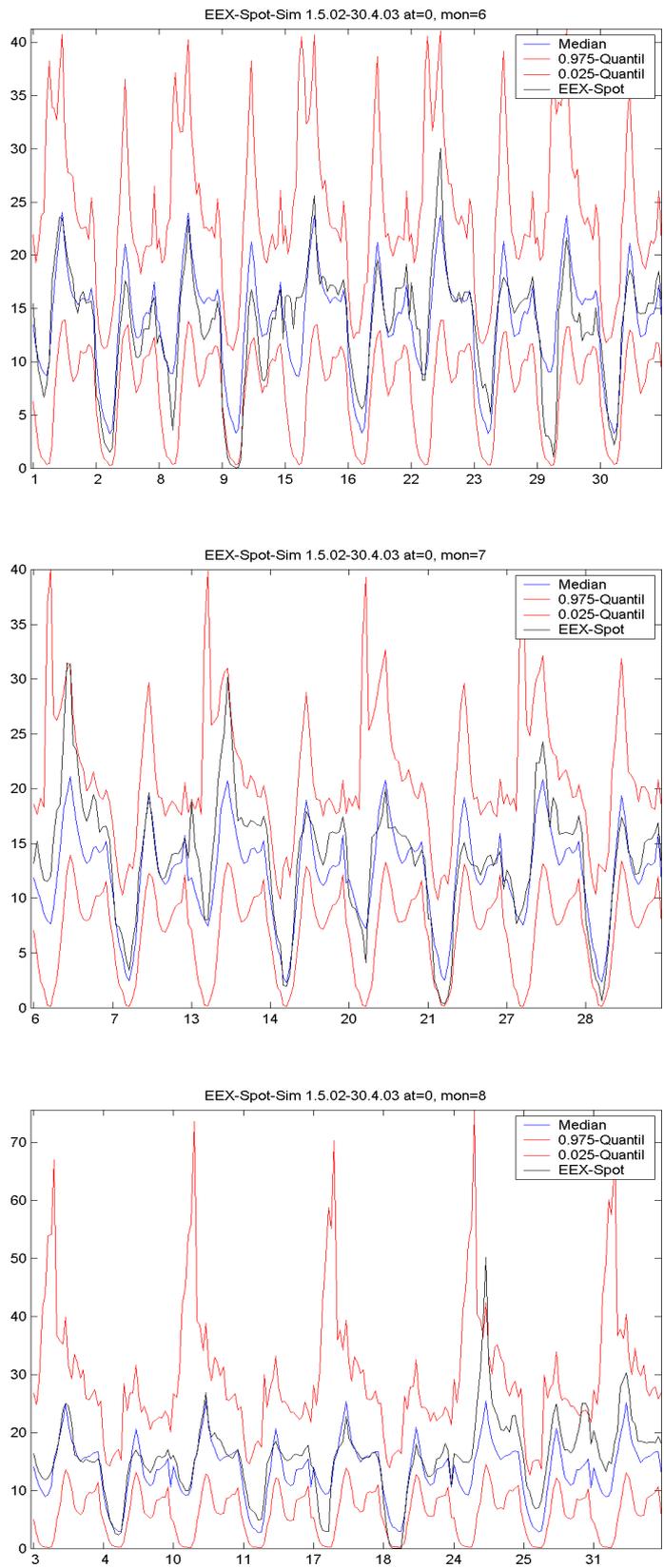


Abbildung 5.30: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Juni, Juli und August 2003, Nichtarbeitstag

### Herbst Arbeitstag

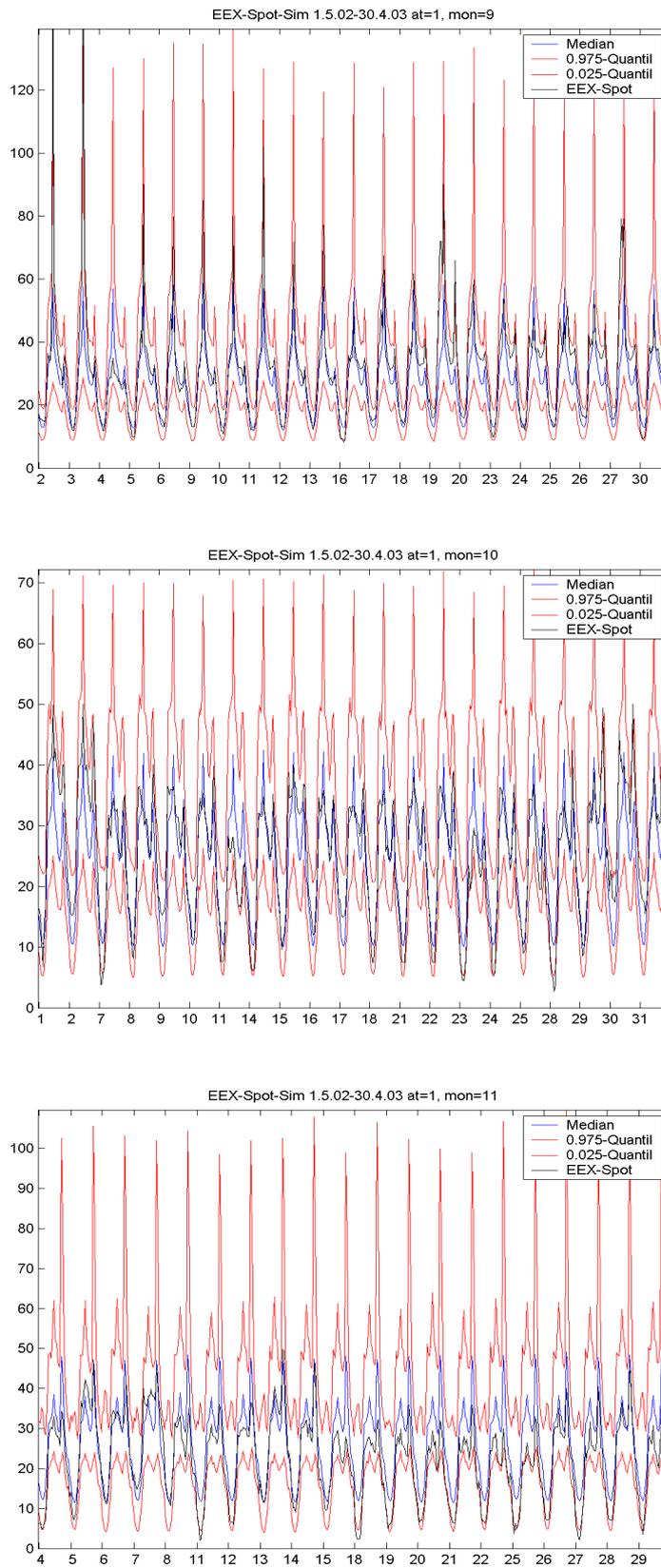


Abbildung 5.31: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate September, Oktober und November 2003, Arbeitstag

### Herbst Nichtarbeitstag

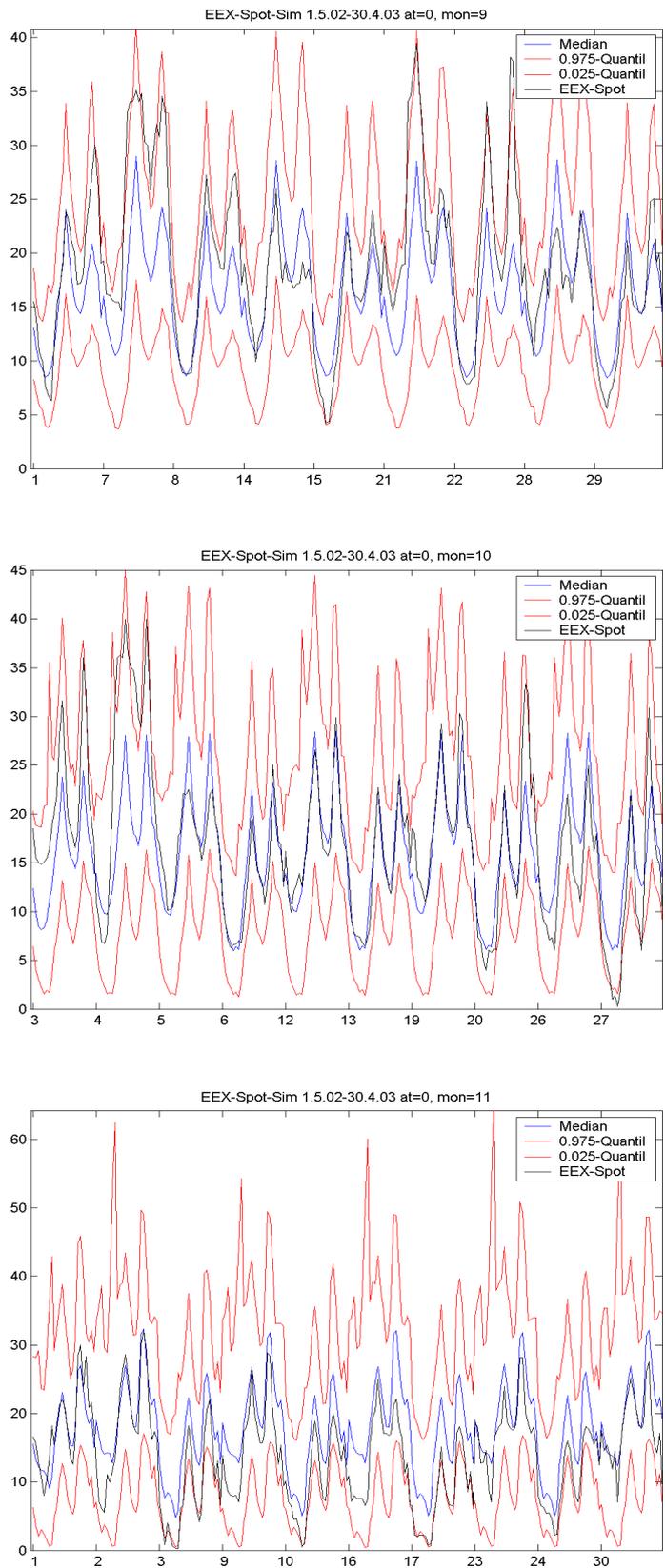


Abbildung 5.32: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate September, Oktober und November 2003, Nichtarbeitstag

### Winter Arbeitstag

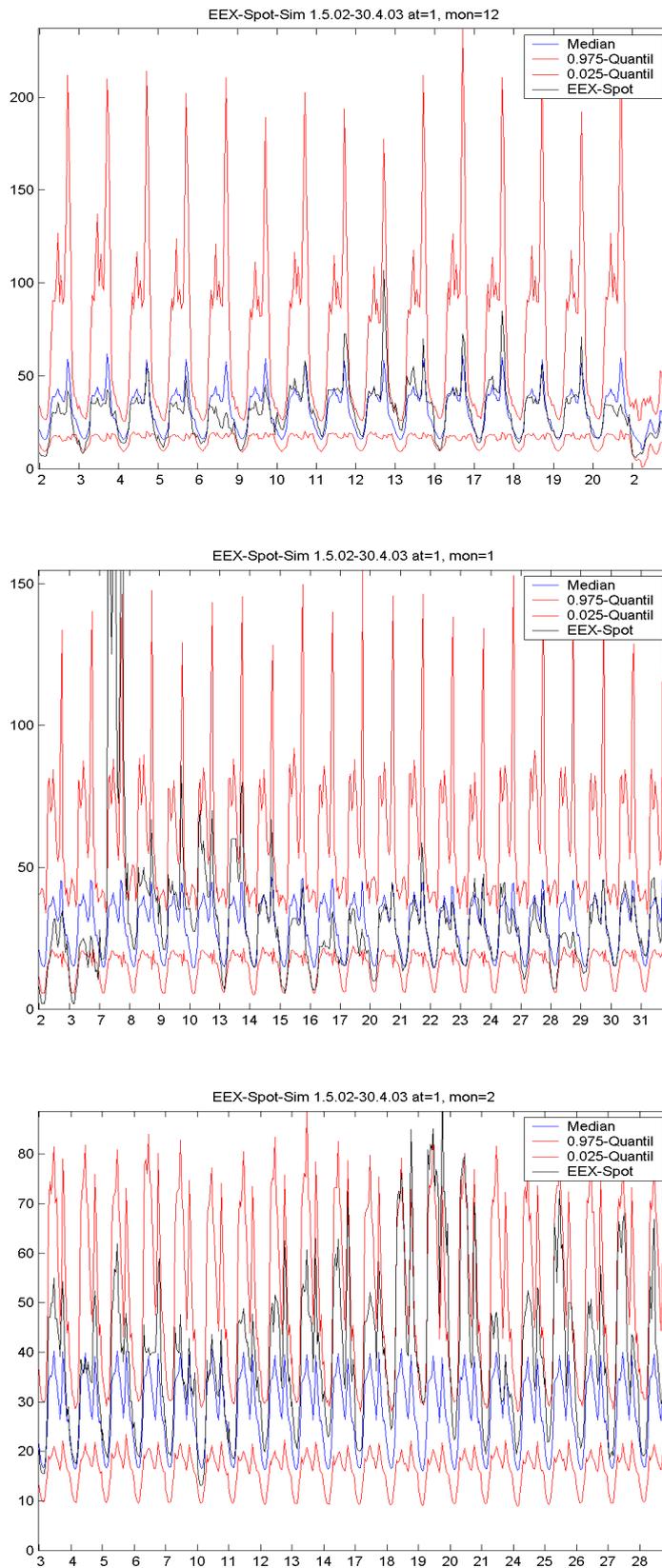


Abbildung 5.33: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Dezember 2002, Jänner und Februar 2003, Arbeitstag

### Winter Nichtarbeitstag

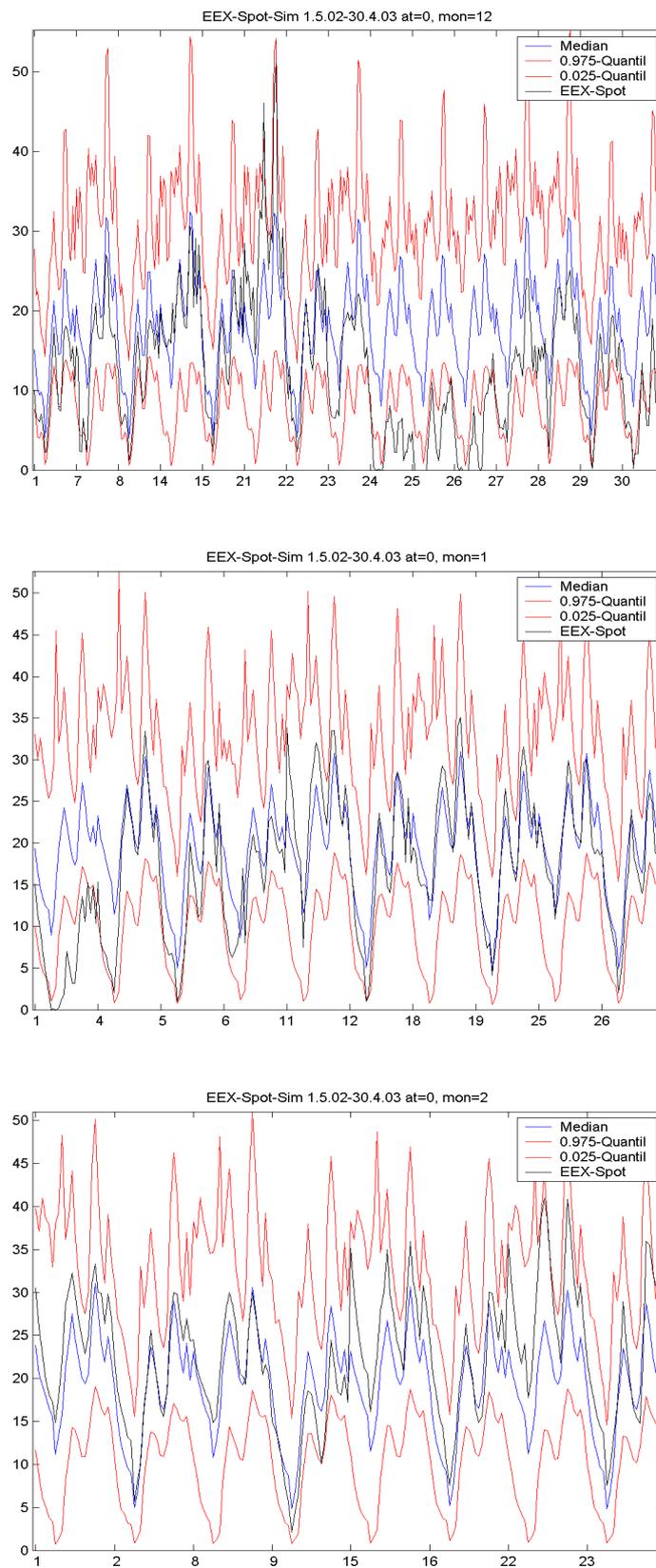


Abbildung 5.34: 1000 Preissimulationen (auf Stundenbasis) der Monate Dezember 2002, Jänner und Februar 2003, Nichtarbeitstag



# Kapitel 6

## Die Swing-Option

Flexible Verträge im Bereich des Stromhandels gewinnen immer mehr an Attraktivität. Daher sind Fragestellungen wie z.B. die Preisfestsetzung solcher Verträge von großer Bedeutung. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Berechnung des Preises von einer mehrfach ausübbarer Option (im Engl. *multi-exercise option* oder auch Swing-Option). Solche Verträge ermöglichen eine bestimmte Anzahl an Ausübungsrechten über einem vordefinierten Zeitraum, bei denen man eine gewisse Menge an Strom zu einem fixen Preis beziehen kann. Der Kunde darf unter bestimmten Restriktionen selbst entscheiden, wann er wie viel bezieht.

Da die Preisentwicklung des Stromes einer Zufälligkeit unterworfen ist, bewegen wir uns in einer stochastischen Umgebung, die wir in der Berechnung berücksichtigen müssen. In den letzten Jahren entstanden zahlreiche Strompreismodelle (siehe Kapitel 4), die Vor- und Nachteile besitzen. Auch wir haben ein Modell entwickelt, mit dem wir die wesentlichen Eigenschaften des Strommarktes, die ja aufgrund der Besonderheit der Nichtspeicherbarkeit sehr spezifisch sind, abzudecken versuchen (siehe Kapitel 5), wobei wir als primäres Ziel den Einsatz dieses Modells bei der Preisfestsetzung von Stromderivaten, insbesondere von Swing-Optionen verfolgen. Dies scheint uns durchaus gelungen zu sein.

Die Preisfestsetzung von Swing-Optionen führt uns zu einem stochastischen dynamischen Optimierungsproblem, das wir mit der Adaptierung der Ideen von [34] und [47] approximativ lösen werden. Im ersten Schritt werden wir das Problem allgemein beschreiben.

### 6.1 Die mathematische Formulierung

Wir betrachten einen diskreten Zeitraum und nehmen einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  auf  $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$  an. Mit  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  beschreiben wir den stochastischen Einfluss. Unser Preisprozess  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  liegt in Form von

$$S_t = h(X_t)$$

vor, wobei  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  eine messbare Funktion ist. Weiters bezeichnen wir mit  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  die aufsteigende Filtration, die durch  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u \cup \mathcal{N})_{u \leq t}$  mit  $\mathcal{N}$  die Menge aller Nullmengen erzeugt wird. Der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  sei bezüglich der Filtration  $\mathcal{F}$  adaptiert. Abschließend nehmen wir an, dass wir uns in der risikoneutralen Welt (siehe Kapitel 4) befinden.

Die Swing-Option ist nun ein Vertrag, der, wie bereits erwähnt, dem Kunden eine gewisse Menge an Strom garantiert, die er frei nach seinem Gutdünken unter Einhaltung bestimmter Restriktionen zu einem vordefinierten Preis beziehen kann. Wenn der Verkäufer dieses Vertrages wenig Informationen über seinen Vertragspartner besitzt, muss er bei der Preisfestsetzung davon ausgehen, dass der Kunde diesen Vertrag so einsetzen wird, dass dieser den Strom am Spotmarkt mit Gewinn verkaufen wird. Der Kunde im Gegensatz dazu muss davon ausgehen, dass dieses Kalkül im Preis enthalten ist. Wegen der stochastischen Einflüsse kann man den Preis einer Swing-Option folgendermaßen formulieren:

$$V_{\text{Swing}} = \sup_{\{Y(t_0), \dots, Y(t_N)\}} \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{k=0}^N \exp\left(-\int_0^{t_k} r_s ds\right) Y(t_k)'(S_{t_k} - K) \mid \mathcal{F}_0 \right] \quad (6.1)$$

wobei  $Y(t_k)$ , die Ausübungsmenge des Zeitpunktes  $t_k$ , gewissen Restriktionen unterliegen kann, wie z.B.

$$\begin{aligned} Y(t_k) &\in [Y_u^-(t_k), Y_o^-(t_k)] \cup [Y_u^+(t_k), Y_o^+(t_k)] \subset \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \{0, \dots, N\} \text{ und} \\ M_{\min}^- &\leq \sum_{k=1}^N |Y(t_k)| \mathbf{1}_{Y(t_k) \leq 0} \leq M_{\max}^-, \\ M_{\min}^+ &\leq \sum_{k=1}^N |Y(t_k)| \mathbf{1}_{Y(t_k) > 0} \leq M_{\max}^+ \text{ und} \\ 0 &\leq \mathbf{1}_{Y(t_k) \leq 0} + \mathbf{1}_{Y(t_k) > 0} \leq \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

wobei

$N$  die Anzahl der Ausübungsmöglichkeiten,

$K$  der Ausübungspreis,

$r_s$  die Zinsintensität und

$Y_u^-(t_k) < 0, Y_o^-(t_k) \leq 0$  die Restriktionen für den Verkauf von Strom,

$Y_u^+(t_k) > 0, Y_o^+(t_k) > 0$  die Restriktionen für den Kauf von Strom und

$M_{\min}^-, M_{\max}^-$  und  $M_{\min}^+, M_{\max}^+$  die Gesamtrestrictionen sind.

Unter dem Begriff *mehrfach ausübbarer Option* ist eine Bandbreite von Verträgen zu verstehen, wie wir im Abschnitt 6.5 sehen werden. Eine Eigenschaft ist ihnen allen gemeinsam, und zwar die Suche nach jener Strategie, ausgedrückt durch die Funktion  $Y(t_k)$ , die den erwarteten Ertrag bezüglich des risikoneutralen Maßes in (6.1) maximiert. Zur Lösung dieses Problems werden Methoden der stochastischen dynamischen Optimierung benötigt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden wir für die nächsten Abschnitte annehmen, dass an jedem Tag ausgeübt werden kann, d.h. wir vernachlässigen den Index  $k$  bei der Zeit.

Zunächst formulieren wir das Problem (6.1) allgemeiner (siehe z. B. [2], [33] und [44]) und definieren uns dazu den Verlauf der Zustandsgrößenvariable  $M = (M_t)_{t \in \mathcal{T}}$  mit  $M_t \in M_t^E \subseteq \mathbb{R}^d$ . Diese beschreibt uns globale Restriktionen, wie z.B. die verbleibenden Ausübungsmengen oder

den Reservoirstand eines virtuellen Speicherkraftwerkes zum Zeitpunkt  $t$ . Unsere Entscheidungen, die wir im Verlauf treffen werden, hängen von dieser Größe ab, man kann sie auch als globale Restriktionen ansehen. Weiters bezeichnen wir mit  $(M^E, \mathcal{M}^E)$  den entsprechenden Messraum. Die Variable  $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  sei unsere stochastische Einflussgröße, die bezüglich der Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  adaptiert ist. Mit  $(Z^E, \mathcal{Z}^E) = (M^E \times \mathbb{R}^{m \times (T+1)}, \mathcal{M}^E \times \mathcal{B}^{m \times (T+1)})$  bezeichnen wir den gemeinsamen Produktraum von  $M$  und  $X$ , wobei mit  $\mathcal{B}^{m \times (T+1)}$  die  $\sigma$ -Algebra der  $m \times (T+1)$ -dimensionalen Borelmengen bezeichnet wird. Weiters definieren wir die Folge der Ausübungsmengen  $Y = (Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , die gewissen Restriktionen unterliegt, d.h.  $Y_t \in Y_t^E \subseteq \mathbb{R}^n$  und sei  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$  der entsprechende Messraum. Zusätzlich führen wir eine Folge von mengenwertigen Funktionen (Korrespondenzen) ein, die uns die zulässigen Ausübungsmengen zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben

$$\Gamma_t : M_t^E \times \mathbb{R}^{m \times (t+1)} \rightarrow \mathcal{Y}_t^E, \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Wie bereits erwähnt hängen diese Ausübungsmengen von der Zustandsvariable  $M_t$ , die z.B. die zur Verfügung stehende Menge sein kann, und von der stochastischen Größe  $X_t$ , in unserem Fall die stochastischen Komponenten unseres Preisprozesses, ab. Weiters sei

$$A_t = \{(M_t, X^t, Y_t) \in M_t^E \times (\mathbb{R}^{m \times (t+1)}) \times Y_t^E : Y_t \in \Gamma_t(M_t, X^t)\}$$

der Graph von  $\Gamma_t$ , wobei  $X^t = (X_0, \dots, X_t)$  ist. Abschließend benötigen wir den Produktraum

$$(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E) = (M_t^E \times \mathbb{R}^{m \times (t+1)}, \mathcal{M}_t^E \times \mathcal{B}^{m \times (t+1)}),$$

sowie

$$(S_t^E, \mathcal{S}_t^E) = (Z_t^E \times Y_t^E, \mathcal{Z}_t^E \times \mathcal{Y}_t^E).$$

Nun sei

$$f_t : S_t^E \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Familie von Ertragsfunktionen für alle  $t \in \mathcal{T}$ , hinsichtlich dieser maximiert wird. In unserem Fall hat  $f_t$  die Form

$$f_t(M_t, X^t, Y_t) = Y_t'(S_t(X^t) - K), \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (6.2)$$

wobei gilt

$$M_t \in M_t^E, \quad X^t \in \mathbb{R}^{m \times (t+1)}, \quad Y_t \in \Gamma_t(M_t, X^t) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Was uns noch fehlt, ist der Diskontierungsfaktor. Sei  $\beta_t = e^{-\int_t^{t+1} r_u du}$  der Diskontierungsfaktor für eine Zeiteinheit. Für unsere Anwendungen nehmen wir  $\beta_t \equiv \beta$  konstant und deterministisch an.

Zum Zeitpunkt  $t$  befindet sich das System im Zustand  $M_t$  und die stochastischen Komponenten haben den Verlauf  $X^t$ . Aufgrund dieser Informationen wird hinsichtlich des Ertrages eine Entscheidung gefällt, d.h.  $Y_t \in \Gamma_t(M_t, X^t)$  wird gewählt. Danach verändert sich der Zustand  $M_t$  und geht in  $M_{t+1}$  über. Dieser Verlauf  $(M_t)_{t \in \mathcal{T}}$  muss beschrieben werden und zwar erfolgt dies durch eine Familie von Funktionen

$$g_{t+1} : A_t \times \mathbb{R}^{m \times (t+1)} \rightarrow M_{t+1}^E,$$

wobei  $M_{t+1} = g_{t+1}(M_t, Y_t, X^{t+1})$ . Wir definieren nun folgende Strategie:

**Definition 6.1.1 (siehe [44]).** Eine **Strategie** ist eine Folge von  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Funktionen  $Y = (Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$  mit  $Y_t : \Omega \rightarrow Y_t^E$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ . Eine Strategie beginnend mit  $Z_0 = (M_0, X_0)$  heißt zulässig, wenn

1.  $Y_0(X_0) \in \Gamma_0(Z_0)$
2.  $Y_t(X^t) \in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t)$  für alle  $X^t$  und  $t = 1, \dots, T$ ,

wobei die Funktionen  $M_t^Y : \Omega \rightarrow M_t^E$  für  $t = 1, \dots, T$  rekursiv durch

1.  $M_1^Y(X^1) = g_1(M_0, Y_0(X_0), X^1)$  für alle  $X^1$  und
2.  $M_t^Y(X^t) = g_t(M_{t-1}^Y(X^{t-1}), Y_{t-1}(X^{t-1}), X^t)$  für alle  $X^t$  und  $t = 2, \dots, T$

definiert werden. Mit  $\Upsilon(Z_0)$  bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Strategien  $Y$  beginnend mit  $Z_0$ .

Weiters sei  $\tilde{Y}_{t,T} = (\tilde{Y}_t, \dots, \tilde{Y}_T)$  die Strategie beginnend zum Zeitpunkt  $t$  mit  $Z_t = (M_t, X^t)$ . Wir bezeichnen diese Strategie zulässig, wenn

1.  $\tilde{Y}_t(X^t) \in \Gamma_t(Z_t)$
2.  $\tilde{Y}_k(X^k) \in \Gamma_k(\tilde{M}_k^{\tilde{Y}}(X^k), X^k)$  für alle  $X^k$  und  $k = t+1, \dots, T$ ,

wobei die Funktionen  $\tilde{M}_k^{\tilde{Y}} : \mathbb{R}^{m \times (k+1)} \rightarrow M_k^E$  für  $k = t+1, \dots, T$  rekursiv durch

1.  $\tilde{M}_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}) = g_{t+1}(M_t, \tilde{Y}_t(X^t), X^{t+1})$  für alle  $X^{t+1}$  und
2.  $\tilde{M}_k^{\tilde{Y}}(X^k) = g_k(\tilde{M}_{k-1}^{\tilde{Y}}(X^{k-1}), \tilde{Y}_{k-1}(X^{k-1}), X^k)$  für alle  $X^k$  und  $k = t+2, \dots, T$

definiert werden. Mit  $\Upsilon(Z_t)$  bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Strategien  $\tilde{Y}_{t,T}$  beginnend zum Zeitpunkt  $t$  mit  $Z_t = (M_t, X^t)$ .

**Bemerkung 6.** Wenn  $Y \in \Upsilon(Z_0)$ , dann ist die Strategie  $\tilde{Y}_{1,T} = (Y_1, \dots, Y_T) \in \Upsilon(Z_1)$  beginnend mit  $Z_1 = (g_1(M_0, Y_0(X_0), X^1), X^1)$  ebenfalls zulässig, sowie  $\tilde{Y}_{2,T} = (Y_2, \dots, Y_T) \in \Upsilon(Z_2)$  beginnend mit  $Z_2 = (g_2(M_1^Y(X^1), Y_1(X^1), X^2), X^2)$  etc.

**Bemerkung 7.** Liegen die Ertragsfunktionen in Form von (6.2) und ein Markovscher Prozess  $X$  vor, kann  $X^t$  durch  $X_t$  ersetzt werden.

Berechnen wir nun den erwarteten Ertrag zu einer beliebigen zulässigen Strategie  $Y$  von  $Z_0$

$$v_0(Y, Z_0) = \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{t=0}^T \beta^t f_t(M_t^Y(X^t), X^t, Y_t(X^t)) \mid X_0 \right],$$

dann können wir das Problem (6.1) folgendermaßen beschreiben

$$\sup_{Y \in \Upsilon(Z_0)} v_0(Y, Z_0) \tag{6.3}$$

unter

$$\begin{aligned} M_{t+1}^Y(X^{t+1}) &= g_{t+1}(M_t^Y(X^t), Y_t(X^t), X^{t+1}), \\ Y_t(X^t) &\in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t) \text{ und} \\ (M_0, X_0) &\mathcal{Z}_0\text{-messbar.} \end{aligned} \tag{6.4}$$

## 6.2 Existenz einer optimalen Lösung

Zur Existenzsicherung einer optimalen Lösung benötigen wir Voraussetzungen, wann eine Strategie zulässig ist (siehe dazu auch [44]).

**Lemma 6.2.1.** *Gegeben seien  $(Z^E, Z^Z)$ ,  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$ ,  $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $f = (f_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $g = (g_t)_{t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}}$  und  $\beta$ . Wenn für alle  $t = 0, \dots, T$*

1. *die mengenwertigen Funktionen  $\Gamma_t$  nicht leer sind,*
2. *der Graph von  $\Gamma_t$ , also  $A_t, \mathcal{S}_t$ -messbar ist,*
3. *es messbare Funktionen  $h_t : Z_t^E \rightarrow Y_t^E$  gibt, sodass  $h_t(Z_t) \in \Gamma_t(Z_t)$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$  gilt, und*
4.  *$g_t$  ebenfalls eine  $\mathcal{F}_t$ -messbare Funktion ist,*

*dann ist  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$  und  $t \in \mathcal{T}$ .*

*Beweis.* Dadurch, dass es für alle  $t = 0, \dots, T$  eine Folge von messbaren Funktionen  $h_t(Z_t) \in \Gamma_t(Z_t)$  für alle  $Z_t$  gibt, kann man für ein beliebiges  $Z_0 = (M_0, X_0) \in Z_0^E$  definieren

$$\begin{aligned} Y_0(X_0) &= h_0(Z_0) \\ Y_t(X^t) &= h_t(M_t^Y(X^t), X^t). \end{aligned}$$

Da  $h_0$   $Z_0$ -messbar ist, folgt für ein fixes  $M_0$  die  $\mathcal{F}_0$ -Messbarkeit von  $Y_0(X_0)$ . Für  $t = 1$  gilt wegen der  $\mathcal{F}_1$ -Messbarkeit von  $g_1$ , dass

$$Y_1(X^1) = h_1(g_1(M_0, Y_0(X_0), X^1), X^1)$$

$\mathcal{F}_1$ -messbar ist. Mit Hilfe der Induktion nach  $t$  folgt die  $\mathcal{F}_t$ -Messbarkeit von  $Y_t$  für alle  $t$ . Da  $Z_0$  beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung. Analog geht man für  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$  vor.  $\square$

Unter

**Annahme 6.2.2.** *Die Ertragsfunktionen  $f_t : S_t^E \rightarrow \mathbb{R}$  sind für alle  $t = 0, \dots, T$   $\mathcal{S}_t$ -messbar und integrierbar.*

können wir die Funktionenfolgen  $(v_k(Y, Z_k))_{k \in \mathcal{T}}$ , beginnend mit  $Z_k = (M_k, X^k) \in Z_k^E$  für  $k = T, \dots, 0$ , definieren:

$$v_T(\tilde{Y}_{T,T}, Z_T) = f_T(M_T, X^T, \tilde{Y}_T(X^T)) \quad (6.5)$$

$$v_k(\tilde{Y}_{k,T}, Z_k) = f_k(M_k, X^k, \tilde{Y}_k(X^k)) + \sum_{t=k+1}^T \mathbb{E}_Q[\beta^{t-k} f_t(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), X^t, \tilde{Y}_t(X^t)) | X^k].$$

Ist die Menge der zulässigen Strategien  $\Upsilon(Z_k) \neq \emptyset$  für alle  $k = T, \dots, 0$  und  $Z_k$  und gilt zusätzlich die Annahme (6.2.2), dann ist die Funktion  $v_k(\cdot, Z_k)$  auf  $\Upsilon(Z_k)$  wohldefiniert und es existiert

$$V_k^*(Z_k) = \sup_{\tilde{Y}_{k,T} \in \Upsilon(Z_k)} v_k(\tilde{Y}_{k,T}, Z_k) \text{ P-f.s.} \quad (6.6)$$

derart, dass P-f.s. gilt

$$\begin{aligned} V_k^*(Z_k) &\geq v_k(\tilde{Y}_{k,T}, Z_k) \text{ für alle } \tilde{Y}_{k,T} \in \Upsilon(Z_k) \\ V_k^*(Z_k) &= \lim_{j \rightarrow \infty} v_k(\tilde{Y}_{k,T}^j, Z_k) \text{ für eine Folge } \{\tilde{Y}_{k,T}^j\}_{j=1}^\infty \in \Upsilon(Z_k). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir folgenden funktionalen Zusammenhang für  $t = 0, \dots, T-1$ :

$$V_t(Z_t) = \sup_{\Pi_t \in \Gamma_t(Z_t)} \{f_t(M_t, X^t, \Pi_t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \Pi_t, X^{t+1}), X^{t+1}) | X^t]\} \quad \forall Z_t \quad (6.7)$$

und für  $t = T$

$$V_T(Z_T) = \sup_{\Pi_T \in \Gamma_T(Z_T)} f_T(M_T, X^T, \Pi_T), \quad \forall Z_T, \quad (6.8)$$

und definieren

$$G_t(Z_t) = \{\Pi_t \in \Gamma(Z_t) : V_t(Z_t) = f_t(M_t, X^t, \Pi_t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \Pi_t, X^{t+1}), X^{t+1}) | X^t]\} \quad \forall Z_t \quad (6.9)$$

bzw.

$$G_T(Z_T) = \{\Pi_T \in \Gamma(Z_T) : V_T(Z_T) = f_T(M_T, X^T, \Pi_T)\} \quad \forall Z_T \quad (6.10)$$

und  $t \in \mathcal{T}$ . Ist für alle  $t \in \mathcal{T}$  die Menge  $G_t \neq \emptyset$  und gibt es zumindest eine messbare Funktion  $\phi_t$ , sodass  $\phi_t(Z_t) \in G_t(Z_t)$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$ , dann können wir eine Strategie durch

$$\begin{aligned} Y_0(X_0) &= \phi_0(Z_0) \\ Y_t(X^t) &= \phi_t(M_t^Y(X^t), X^t), \quad \forall X^t, \end{aligned}$$

definieren. Diese erfüllt (1) und (2) von Definition (6.1.1) und ist somit zulässig. Analog können wir auch eine zulässige Strategie  $\tilde{Y}_{t,T}$  beginnend mit  $Z_t = (M_t, X^t)$  auf diese Weise definieren.

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Strategie  $Y$  aus  $G = (G_t)_{t \in \mathcal{T}}$  eine optimale Lösung erzielt (siehe auch [44]).

**Satz 6.2.3.** *Gegeben seien  $(Z^E, \mathcal{Z}^Z)$ ,  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$ ,  $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $f = (f_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $g = (g_t)_{t \in \mathcal{T}}$  und  $\beta$ . Es gelte Annahme (6.2.2) und  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  und  $Z_t \in Z_t^E$ . Sei  $V^* = (V_t^*)_{t \in \mathcal{T}}$  durch (6.6) definiert und  $V = (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$  eine Folge von  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Funktionen, die die Gleichung (6.7) erfüllt. Sei  $G = (G_t)_{t \in \mathcal{T}}$  für  $V = (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$  (siehe (6.9)) gegeben. Wenn es eine Folge von messbaren Funktionen  $\phi_t(Z_t) \in G_t(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$  und  $t \in \mathcal{T}$  gibt, dann gilt:*

1.  $V_t(Z_t) = V_t^*(Z_t)$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  und  $Z_t$  und
2. jede beliebige Strategie  $\tilde{Y}_{t,T}$ , die aus  $G = (G_k)_{k=\{t, \dots, T\}}$  stammt, erreicht das Supremum in (6.6) für alle  $t \in \mathcal{T}$ .

Der Satz besagt, wenn für alle  $t \in \mathcal{T}$  wegen  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$ , Annahme (6.2.2) und den wohldefinierten  $V_t^*(Z_t)$  für ein beliebiges  $Z_t \in Z_t^E$  (d.h. es gibt eine optimale Lösung von (6.6)) für die Funktionenfolge  $V = (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , die durch (6.7) definiert ist,

1.  $V_t(Z_t) \geq v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t)$  für alle  $\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)$
2.  $V_t(Z_t) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_t(\tilde{Y}_{t,T}^j, Z_t)$  für eine Folge  $\{\tilde{Y}_{t,T}^j\}_{j=1}^{\infty} \in \Upsilon(Z_t)$

gilt, folgt

$$V_t^*(Z_t) = V_t(Z_t).$$

Das ist leicht zu überprüfen, da man für eine beliebige Strategie  $\tilde{Y}_{t,T}$  aus  $\Upsilon(Z_t)$  erhält

$$\begin{aligned}
 V_t(Z_t) &= \sup_{\Pi_t \in \Gamma_t(Z_t)} \left\{ f_t(M_t, X^t, \Pi_t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \Pi_t, X^{t+1}), X^{t+1}) | X^t] \right\} \\
 &\geq f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \tilde{Y}_t, X^{t+1}), X^{t+1}) | X^t] \\
 &= f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \beta \mathbb{E}_Q \left[ \sup_{\Pi_{t+1} \in \Gamma_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1})} \left\{ f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1}, \Pi_{t+1}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+2}(g_{t+2}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), \Pi_{t+1}, X^{t+2}), X^{t+2}) | X^{t+1}] \right\} | X^t \right] \\
 &\geq f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \beta \mathbb{E}_Q[f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1}, \tilde{Y}_{t+1}(X^{t+1})) | X^t] \\
 &\quad + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+2}(M_{t+2}^{\tilde{Y}}(X^{t+2}), X^{t+2}) | X^t] \\
 &= f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \beta \mathbb{E}_Q[f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1}, \tilde{Y}_{t+1}(X^{t+1})) | X^t] + \\
 &\quad \beta^2 \mathbb{E}_Q \left[ \sup_{\Pi_{t+2} \in \Gamma_{t+2}(M_{t+2}^{\tilde{Y}}(X^{t+2}), X^{t+2})} \left\{ f_{t+2}(M_{t+2}^{\tilde{Y}}(X^{t+2}), X^{t+2}, \Pi_{t+2}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+3}(g_{t+3}(M_{t+2}^{\tilde{Y}}(X^{t+2}), \Pi_{t+2}, X^{t+3}), X^{t+3}) | X^{t+2}] \right\} | X^t \right] \\
 &\geq f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \sum_{k=1}^2 \beta^{k-t} \mathbb{E}_Q[f_k(M_k^{\tilde{Y}}(X^k), X^k, \tilde{Y}_k) | X^t] \\
 &\quad + \beta^3 \mathbb{E}_Q[V_{t+3}(g_{t+3}(M_{t+2}^{\tilde{Y}}(X^{t+2}), \tilde{Y}_{t+2}(X^{t+2}), X^{t+3}), X^{t+3}) | X^t] \\
 &\quad \vdots \\
 &\geq v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt  $V_t(Z_t) \geq v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t)$  für alle  $\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)$ . Zur Überprüfung von  $V_t(Z_t) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_t(\tilde{Y}_{t,T}^j, Z_t)$  für eine beliebige Folge  $\{\tilde{Y}_{t,T}^j\}_{j=1}^{\infty} \in \Upsilon(Z_t)$  wählt man eine Strategie  $\tilde{Y}_{t,T}^*$  aus

$(G)_{k=t}^T$  mit Startwert  $Z_t$ . Nach Voraussetzung gibt es zumindest eine Strategie, für die gilt

$$\begin{aligned}
 V_t(Z_t) &= \sup_{\Pi_t \in \Gamma_t(Z_t)} \{f_t(M_t, X^t, \Pi_t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \Pi_t, X^{t+1}), X^{t+1})|X^t]\} \\
 &= f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t^*) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}(g_{t+1}(M_t, \tilde{Y}_t^*, X^{t+1}), X^{t+1})|X^t] \\
 &= f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t^*) + \beta \mathbb{E}_Q\left[ \sup_{\Pi_{t+1} \in \Gamma_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}_t^*}(X^{t+1}), X^{t+1})} \left\{ f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}_t^*}(X^{t+1}), X^{t+1}, \Pi_{t+1}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+2}(g_{t+2}(M_{t+1}^{\tilde{Y}_t^*}(X^{t+1}), \Pi_{t+1}, X^{t+2}), X^{t+2})|X^{t+1}] \right\} |X^t \right] \\
 &= f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t^*) + \beta \mathbb{E}_Q[f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}_t^*}(X^{t+1}), X^{t+1}, \tilde{Y}_{t+1}^*(X^{t+1}))|X^t] \\
 &\quad + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+2}(M_{t+2}^{\tilde{Y}_t^*}(X^{t+2}), X^{t+2})|X^t] \\
 &\quad \vdots \\
 &= v_t(\tilde{Y}_{t,T}^*, Z_t).
 \end{aligned}$$

Setzt man  $\tilde{Y}_{t,T}^j = \tilde{Y}_{t,T}^*$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , dann haben wir eine Folge, für die  $V_t(Z_t) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_t(\tilde{Y}_{t,T}^j, Z_t)$  gilt, gefunden. Daraus folgt

$$V_t(Z_t) = V_t^*(Z_t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \text{ und } Z_t.$$

Für die in (6.5) definierte Funktionenfolge gilt folgende Beziehung

**Lemma 6.2.4.** *Gegeben seien  $(Z^E, \mathcal{Z}^E)$ ,  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$ ,  $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $f = (f_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $g = (g_t)_{t \in \mathcal{T}}$  und  $\beta$ . Weiters gelte Annahme (6.2.2) und  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in \mathcal{Z}_t^E$  und  $t \in \mathcal{T}$ . Sei  $v = (v_k)_{k \in \mathcal{T}}$  die in (6.5) definierte Funktionenfolge. Dann gilt für eine zulässige Strategie  $\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)$ :*

$$v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t) = f_t(M_t, X^t, \tilde{Y}_t) + \beta \mathbb{E}_Q[v_{t+1}(\tilde{Y}_{t+1,T}, Z_{t+1})|X_t],$$

wobei  $Z_{t+1} = (M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1})$  und  $\tilde{Y}_{t+1,T} = (\tilde{Y}_{t+1}, \dots, \tilde{Y}_T)$ .

In Bemerkung 6 wurde angemerkt, dass für ein beliebiges  $Z_t \in \mathcal{Z}_t^E$  und zulässige Strategie  $\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)$  gilt, dass  $\tilde{Y}_{t+1,T} \in \Upsilon(Z_{t+1})$  ebenfalls eine zulässige Strategie ist, wobei diesmal  $Z_{t+1} = (g_{t+1}(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), \tilde{Y}_t, X^{t+1}), X^{t+1})$ . Unter Annahme (6.2.2) und  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $t$  und  $Z_t \in \mathcal{Z}_t^E$  ist die Funktionenfolge  $v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t)$  wohldefiniert und man erhält für alle  $t \in \mathcal{T}$ ,  $Z_t \in \mathcal{Z}_t^E$  und für  $\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)$  beliebig

$$\begin{aligned}
 v_t(\tilde{Y}_{t,T}, Z_t) &= f_t(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), X^t, \tilde{Y}_t(X^t)) + \sum_{k=t+1}^T \mathbb{E}_Q[\beta^{k-t} f_k(M_k^{\tilde{Y}}(X^k), X^k, \tilde{Y}_k(X^k))|X^t] \\
 &= f_t(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), X^t, \tilde{Y}_t(X^t)) + \beta \mathbb{E}_Q[f_{t+1}(M_{t+1}^{\tilde{Y}}(X^{t+1}), X^{t+1}, \tilde{Y}_{t+1}(X^{t+1})) + \\
 &\quad \mathbb{E}_Q\left[ \sum_{k=t+2}^T \beta^{k-t+1} f_k(M_k^{\tilde{Y}}(X^k), X^k, \tilde{Y}_k(X^k))|X^{t+1} \right]|X^t] \\
 &= f_t(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), X^t, \tilde{Y}_t(X^t)) + \beta \mathbb{E}_Q[v_{t+1}(\tilde{Y}_{t+1,T}, Z^{t+1})|X^t],
 \end{aligned}$$

wobei  $Z_{t+1} = (g_{t+1}(M_t^{\tilde{Y}}(X^t), \tilde{Y}_t, X^{t+1}), X^{t+1})$  und  $\tilde{Y}_{t+1,T} = (\tilde{Y}_{t+1}, \dots, \tilde{Y}_T)$ .

Nun können wir über die Existenz einer optimalen Lösung folgende Aussage treffen.

**Satz 6.2.5.** *Gegeben seien  $(Z^E, \mathcal{Z}^E)$ ,  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$ ,  $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $f = (f_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $g = (g_t)_{t \in \mathcal{T}}$  und  $\beta$ . Weiters gelte Annahme (6.2.2) und  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in Z_t^E$ . Sei  $V_0^*$  durch (6.6) definiert, messbar und erfülle Gleichung (6.7) für alle  $t \in \mathcal{T}$ . Sei  $Y^*$  die optimale Strategie beginnend mit  $Z_0$ , die (6.6) erreicht und  $G = (G_t)_{t=0}^T$  sei durch (6.9) definiert. Wenn es eine Folge von messbaren Funktionen  $\phi_t \in G_t \neq \emptyset$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  gibt, dann existiert eine Strategie aus  $G$  beginnend mit  $Z_0$ , sodass*

$$\begin{aligned} Y_0^G &= Y_0^*(X_0) \\ Y_t^G(X^t) &= Y_t^*(X^t) \text{ P-f.s } \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Wenn man für die optimale Strategie  $Y^*$ , die  $V_0^*$  (siehe (6.6)) erreicht, folgenden funktionalen Zusammenhang aufstellen kann

$$V_0^*(Z_0) = f_0(M_0, X_0, Y_0^*) + \beta \mathbb{E}_Q[V_1^* \underbrace{(g_1(M_0^{Y^*}(X_0), Y_0^*(X_0), X^1), X^1)}_{=: M_1^{Y^*}(X^1)} | X_0]$$

und

$$\begin{aligned} V_t^*(M_t^{Y^*}(X^t), X^t) &= f_t(M_t^{Y^*}(X^t), Y_t^*(X^t), X^t) + \\ &\quad \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}^*(g_{t+1}(M_t^{Y^*}(X^t), Y_t^*(X^t), X^{t+1}), X^{t+1}) | X^t], \end{aligned}$$

wobei  $V_t^*$  in (6.6) definiert ist, dann lässt sich die optimale Strategie durch die Funktionenfolge  $\phi_t \in G_t$  beschreiben.

Wegen

$$V_0^*(Z_0) = v_0(Y^*, Z_0) \geq v_0(Y, Z_0) \quad \forall Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in \Upsilon(Z_0)$$

und Lemma 6.2.4 gilt

$$\begin{aligned} &f_0(M_0, X_0, Y_0^*) + \beta \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1) | X_0] \\ &\geq f_0(M_0, X_0, Y_0) + \beta \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}, Z_1) | X_0] \quad \forall Y \in \Upsilon(Z_0), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{Y}_{1,T} = (Y_1, \dots, Y_T)$  mit  $Z_1 = (M_1^Y(X^1), X^1)$  und  $\tilde{Y}_{1,T}^* = (Y_1^*, \dots, Y_T^*)$  mit  $Z_1 = (M_1^{Y^*}(X^1), X^1)$ . Diese Ungleichung gilt also auch für eine beliebige Strategie  $Y \in \Upsilon(Z_0)$  mit  $Y_0 = Y_0^*$ . Wir wählen nun eine Folge von messbaren Funktionen  $\phi_t$  mit  $\phi_t(Z_t) \in G_t(Z_t)$  für alle  $t = 1, \dots, T$  und  $Z_t$  und definieren folgende zulässige Strategie  $Y^G$

$$\begin{aligned} Y_0^G(X_0) &= Y_0^*(X_0) \\ Y_t^G(X^t) &= \phi_t(M_t^{Y^G}(X^t), X^t) \quad \forall X^t. \end{aligned}$$

Für  $Z_1 = (M_1^{Y^G}(X^1), X^1)$  ist die Fortsetzung  $\tilde{Y}_{1,T}^G = (Y_1^G, \dots, Y_T^G)$  eine Strategie, die aus  $\tilde{G} = (G_t)_{t=1}^T$  stammt. Wegen  $\Upsilon(Z_1) \neq \emptyset$  und Satz 6.2.3 erreicht  $\tilde{Y}_{1,T}^G$  das Supremum für das Problem

$$V_1^*(Z_1) = \sup_{\tilde{Y}_{1,T} \in \Upsilon(Z_1)} v_1(\tilde{Y}_{1,T}, Z_1) = v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1).$$

Daraus folgt

$$v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1) \geq v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1) \forall Z_1 = (M_1^{Y^G}(X^1), X^1)$$

und

$$\mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1)|X_0] \geq \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1)|X_0].$$

Wegen

$$\begin{aligned} f_0(M_0, X_0, Y_0^*) + \beta \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1)|X_0] \\ \geq f_0(M_0, X_0, Y_0^G) + \beta \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1)|X_0] \end{aligned}$$

und  $Y_0^* = Y_0^G$  erhält man

$$\mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1)|X_0] \geq \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1)|X_0] \text{ P-f.s.}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1)|X_0] = \mathbb{E}_Q[v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1)|X_0]$$

sowie

$$V_1^*(Z_1) = v_1(\tilde{Y}_{1,T}^G, Z_1) = v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1) \forall Z_1 = (M_1^{Y^G}(X^1), X^1) \text{ P-f.s}$$

und

$$V_0^*(Z_0) = f_0(M_0, X_0, Y_0^*) + \beta \mathbb{E}_Q[V_1^*(Z_1)|X_0].$$

Im nächsten Schritt betrachten wir für  $Z_1 = (M_1^{Y^*}(X^1), X^1)$

$$V_1^*(Z_1) = v_1(\tilde{Y}_{1,T}^*, Z_1) \geq v_1(\tilde{Y}_{1,T}, Z_1).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f_1(M_1^{Y^*}(X^1), X^1, Y_1^*) + \beta \mathbb{E}_Q[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^*, Z_2)|X^1] \\ \geq f_1(M_1^{\tilde{Y}}(X^1), X^1, Y_1) + \beta \mathbb{E}_Q[v_2(\tilde{Y}_{2,T}, Z_2)|X^1] \forall \tilde{Y}_{1,T} \in \Upsilon(Z_1). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt auch für die Strategie

$$\begin{aligned} Y_0^G(X_0) &= Y_0^*(X_0) \\ Y_1^G(X^1) &= Y_1^*(X^1) \\ Y_t^G(X^t) &= \phi_t(M_t^{Y^G}(X^t), X^t) \forall X^t \text{ und } t = \{2, \dots, T\}. \end{aligned}$$

Da  $\tilde{Y}_{2,T}^G$  eine zulässige Strategie mit Anfangswert  $Z_2 = (M_2^{Y^*}(X^2), X^2)$  ist, die aus  $(G_t)_{t \in \{2, \dots, T\}}$  stammt, erreicht sie nach Satz 6.2.3 das Supremum für

$$V_2^*(Z_2) = \sup_{Y_{2,T} \in \Upsilon(Z_2)} v_2(Y_{2,T}, Z_2) = v_2(\tilde{Y}_{2,T}^G, Z_2).$$

Daraus folgt

$$v_2(\tilde{Y}_{2,T}^G, Z_2) \geq v_2(\tilde{Y}_{2,T}, Z_2) \forall Z_2 = (M_2^{Y^*}(X^2), X^2)$$

und

$$E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^G, Z_2)|X^1] \geq E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^*, Z_2)|X^1].$$

Analog wie zuvor wegen  $Y_1^*(X^1) = Y_1^G(X^1)$  haben wir auch

$$E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^*, Z_2)|X^1] \geq E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^g, Z_2)|X^1]$$

und erhalten

$$E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^*, Z_2)|X^1] = E[v_2(\tilde{Y}_{2,T}^G, Z_2)|X^1] = \mathbb{E}_Q[V_2^*(Z_2)|X^1].$$

Und es gilt

$$V_1^*(Z_1) = f_t(M_1^{Y^*}(X^1), Y_1^*(X^1), X^1) + \beta \mathbb{E}_Q[V_2^*(M_2^{Y^*}(X^2), X^2)|X^1].$$

Wiederholt man dies bis  $t = T$ , wobei  $V_{T+1}^* \equiv 0$ , dann folgt  $Y_t^* \in G_t$  für alle  $t \in T$ .

### 6.3 Berechnung der optimalen Lösung

Durch Satz 6.2.3 und Satz 6.2.5 erhalten wir Bedingungen für die optimale Lösung. Sind die Voraussetzungen erfüllt, dann gilt für die optimale Strategie  $Y^*$  beginnend mit  $Z_0 = (M_0, X_0)$  die rekursive Beziehung

$$V_0^*(Z_0) = f_0(M_0, X_0, Y_0^*) + \beta \mathbb{E}_Q[V_1^*(g_1(M_0^{Y^*}(X_0), Y_0^*(X_0), X^1), X^1)|X_0],$$

und

$$V_t^*(M_t^{Y^*}(X^t), X^t) = f_t(M_t^{Y^*}(X^t), Y_t^*(X^t), X^t) + \beta \mathbb{E}_Q[V_{t+1}^*(g_{t+1}(M_t^{Y^*}(X^t), Y_t^*(X^t), X^{t+1}), X^{t+1})|X^t], \quad (6.12)$$

wobei

$$V_t^*(Z_t) = \sup_{\tilde{Y}_{t,T} \in \Upsilon(Z_t)} \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{k=t}^T \beta^{k-t} f_k(\tilde{M}_k^{\tilde{Y}}(X^k), \tilde{Y}_k(X^k), X^k) | X^t \right] \forall t \in T.$$

Durch diese Beziehung können wir das Problem (6.3) in Teilprobleme  $V_t^*$  aufteilen und untersuchen. Mit Hilfe dieser Teillösungen ist es möglich das gesamte Problem zu lösen (Bellmansche Prinzip der Optimalität siehe [4], [33] oder [44]). Zur Berechnung von  $V_t^*$ , die wir im weiteren als **Wertfunktionen** bezeichnen, zieht man die Rückwärtsinduktion heran.

#### 6.3.1 Die Rückwärtsinduktion

Zur Lösung von (6.3) wird  $V_n^*$  (6.12) sequentiell von  $n = T, \dots, 0$  berechnet:

1. Wir beginnen mit  $n = T$ : Für alle  $Z_T = (M_T, X^T) \in Z_T^E$  wird

$$V_T^*(Z_T) = \sup_{\Pi_T \in \Gamma_T(Z_T)} f_T(M_T, X^T, \Pi_T)$$

berechnet. Das Problem ist deterministisch. Nach den Voraussetzungen für Satz 6.2.3 und Satz 6.2.5 gibt es eine messbare Funktion aus  $G_T$ , sodass  $\tilde{Y}_{T,T}^*(X^T) = \phi_T^*(Z_T)$  und

$$V_T^*(Z_T) = \sup_{\tilde{Y}_{T,T} \in \Upsilon(Z_T)} v_T(\tilde{Y}_{T,T}, Z_T).$$

2. Im nächsten Schritt berechnen wir für alle  $Z_{T-1} = (M_{T-1}, X^{T-1}) \in Z_{T-1}^E$  mit  $\Upsilon(Z_{T-1}) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} V_{T-1}^*(Z_{T-1}) &= \sup_{\Pi_{T-1} \in \Gamma_{T-1}(Z_{T-1})} f_{T-1}(M_{T-1}, X^{T-1}, \Pi_{T-1}) + \\ &\quad \beta \mathbb{E}_Q[V_T^*(g_T(M_{T-1}, \Pi_{T-1}, X^T), X^T) | X^{T-1}] \\ &= \sup_{\tilde{Y}_{T-1, T} \in \Upsilon(Z_{T-1})} v_{T-1}(\tilde{Y}_{T-1, T}, Z_{T-1}), \end{aligned}$$

wobei die optimale Strategie die Form

$$\tilde{Y}_{T-1, T}^* = (\phi_{T-1}^*(Z_{T-1}), \phi_T^*(g_T(M_{T-1}, \phi_{T-1}^*(Z_{T-1}), X^T), X^T))$$

besitzt.

3. Diese Berechnung wird bis zum Zeitpunkt  $n = 0$  wiederholt. Dadurch entsteht eine Folge von optimalen Entscheidungsfunktionen  $Y^* = (\phi_t^*)_{t=0}^T$ .
4. Anschließend kann man bei gegebenen Anfangsbedingungen  $M_0$  und  $X_0$  die optimale Ausübungsstrategie für eine beliebige Realisierung des Preisprozesses durch diese Entscheidungsfunktionen berechnen.

**Bemerkung 8.** In jedem Schritt muss man  $V_t^*(M_t, X^t)$  für alle zulässigen Zustände  $M_t$  und Ereignisse  $X^t$  berechnen. Bei hoher Dimension des Zustandsraumes ( $Z_t = (M_t, X^t) \in Z_t^E$ ) oder bei sehr komplexer Struktur des stochastischen Prozesses  $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  kann die Funktion  $V^*(Z_t)$  nicht mehr explizit dargestellt werden. In solchen Fällen sind Approximationen nötig.

## 6.4 Approximation

Wir suchen nun eine Approximationsmethode, die zufrieden stellende Ergebnisse bezüglich des Problems (6.3) liefert, auch für sehr komplexe stochastische Einflüsse. Ein bahnbrechender Algorithmus von [34] zur Approximation des Bermuda-Optionspreises erweist sich sehr geeignet für die numerische Lösung unserer Problemstellung.

Betrachten wir am Beginn die einfachste Option, die in unserer Problemstellung (6.3) eingebettet ist. Es ist die Bermuda-Option. Bei dieser Option besitzt man über den gesamten Fälligkeitszeitraum  $[0, T]$  ein einziges Verkaufs- bzw. Kaufrecht, das zu den Zeiten  $t \in \{0, \dots, T\}$  ausgeübt werden kann. Zu jedem möglichen Ausübungszeitpunkt wird die Frage gestellt, ob ausgeübt werden soll oder nicht. Dabei ist der springende Punkt die Wahl von  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Basisfunktionen in der Approximation der in Zukunft zu erwartenden Auszahlung, wenn man zum gegebenen Zeitpunkt nicht ausübt, d.h.

$$E_Q[V_{t+1}^* | X^t] = E_Q\left[\sup_{\tau \in [t+1, T]} f(S_\tau) | X^t\right] \approx \sum_{i=1}^K a_i \phi_i(X^t),$$

wobei die Parameter durch die Kleinste-Quadrate-Methode ermittelt werden. Durch diese Approximation erhalten wir eine untere Schranke für den Preis der Bermuda-Option, der gegen den wahren Wert konvergiert (siehe [11]). Wir werden im nächsten Abschnitt die Idee von [34] skizzieren und ihn auf unser Problem adaptieren.

### 6.4.1 Der Longstaff und Schwartz Algorithmus

Der Einfachheit halber betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  und einen Markovschen Preisprozess  $X_t \in \mathbb{R}$ , der bezüglich  $\mathcal{F}_t = \sigma((X_u)_{u \leq t})$  adaptiert ist. Im ersten Schritt führen wir  $N$  Preissimulationen mit Startwert  $X_0 = X$  für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$  für den Zeitraum  $\mathcal{T} \setminus \{0\}$  durch und bezeichnen mit  $\omega^j = (X_0^j, \dots, X_T^j)$  den  $j$ -ten simulierten Pfad des Prozesses.

Weiters nehmen wir an, dass die Auszahlungsfunktion  $f_t(X_t) = f(X_t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  und die Zinsrate, somit auch folglich der Diskontierungsfaktor  $\beta$ , deterministisch und konstant sind. Der Preis der Bermuda-Option lässt sich nun formulieren als

$$V_B^*(X_0) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[\beta^\tau f(X_\tau)]. \quad (6.13)$$

Im ersten Schritt betten wir (6.13) in unsere Formulierung ein. Dazu definieren wir zunächst den Ausübungsstatus  $M_t \subseteq M_t^E = \{0, 1\}$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ , wobei die Elemente

$$M \in M_t^E = \begin{cases} 0 & \text{die Option wurde bereits ausgeübt,} \\ 1 & \text{die Option wurde noch nicht ausgeübt} \end{cases}$$

bedeuten. Dieser Status entwickelt sich nach folgender Gesetzmäßigkeit

$$\begin{aligned} M_{t+1}(X_{t+1}) &= g_{t+1}(M_t(X_t), Y_t(X_t), X_{t+1}) \\ &= M_t(X_t) - Y_t(X_t), \end{aligned}$$

wobei  $Y_t$  die erfolgte Ausübung beschreibt. Die zulässige Menge für  $Y_t$ , also  $\Gamma_t$ , ist

$$\Gamma_t(M_t, X_t) = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } M_t = 0 \\ \{0, 1\}, & \text{falls } M_t = 1. \end{cases}$$

Somit ist die Menge der zulässigen Strategien  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t = (M_t, X_t)$  und für alle  $t \in \mathcal{T}$ . Nun können wir das Problem für  $Z_0 = (M_0, X_0) = (1, X_0)$  folgendermaßen definieren

$$\begin{aligned} V_0^{B*}(X_0) &= \sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[\beta^\tau f(X_\tau)] \\ &\Downarrow \\ V_0^*(Z_0) &= \sup_{Y \in \Upsilon(Z_0)} \mathbb{E}_Q\left[\sum_{t=0}^T \beta^t Y_t f(X_t) \mid X_0\right]. \end{aligned}$$

Weiters erhalten wir für die Wertefunktionen  $V_t^*$  mit  $Z_t = (M_t, X_t)$

$$\begin{aligned} V_t^*(Z_t) &= \sup_{\Pi_t \in \Gamma_t(Z_t)} \{\Pi_t f(X_t) + E_Q[\beta V_{t+1}^*(M_t - \Pi_t, X_{t+1}) \mid X_t]\} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$V_t^*((1, X_t)) = \sup_{\Pi_t \in \{0, 1\}} \{\Pi_t f(X_t) + E_Q[\beta V_{t+1}^*(M_t - \Pi_t, X_{t+1}) \mid X_t]\}$$

$$V_t^*((0, X_t)) = 0$$

für alle  $X_t$ . Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} V_t^*((1, X_t)) &= \sup\{f(X_t), \mathbb{E}_Q[\beta V_{t+1}^*(1, X_{t+1})|X_t]\} \\ &\Downarrow \\ V_t^{B^*}(X_t) &= \sup\{f(X_t), \mathbb{E}_Q[\beta V_{t+1}^{B^*}(X_{t+1})|X_t]\}, \end{aligned}$$

dem Wert der Bermuda-Option zum Zeitpunkt  $t$ , wenn noch keine Ausübung stattgefunden hat. Der Algorithmus von [34] geht nun von den zu erwartenden Cash-Flows zum Zeitpunkt  $t$  aus, wenn keine Ausübung bis dahin stattgefunden hat.

Wir definieren jetzt für jeden Pfad  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  vom Ausgangspunkt  $t$  die zu erwartenden Cash-Flows  $CF_t^T(\omega_j, s)$  für  $t < s \leq T$  und für alle  $j = 1, \dots, N$ , die die Option erzeugt, falls sie bis zum Zeitpunkt  $t$  noch nicht ausgeübt wurde. Für alle Pfade  $\omega_j$  sei

$$H(\omega^j, t) = E_Q[\beta V_{t+1}^{B^*}(X_{t+1}^j)|X_t^j] = E_Q\left[\sum_{i=t+1}^T \beta^i CF_{t+1}^T(\omega^j, i)|X_t^j\right].$$

der Preis der Bermuda-Option zur Zeit  $t$ . Dieser ist gleich den zukünftigen Cash-Flows, die man bezüglich  $\omega_j$  erreichen kann, bedingt auf die Information bis zum Zeitpunkt  $t$ .

Nun beginnen wir wie bei der Rückwärtsinduktion mit dem Fälligkeitszeitpunkt  $t = T$  und berechnen für jede Simulation  $\omega_j$  für  $j = 1, \dots, N$  den optimalen Cash-Flow der Option

$$CF_T^T(\omega_j, T) = f(X_T^j).$$

Dieser wird diskontiert

$$ECF_{t-1}^T(\omega_j) = \beta CF_T^T(\omega_j, T).$$

Die Funktion  $H(\omega^j, t-1)$  wird durch eine entsprechende Wahl von  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbaren Basisfunktionen approximiert

$$H(\omega, t-1) \approx H_K(\omega, t-1) = H_K(X_{t-1}, t-1) = \sum_{i=1}^K a_{t-1}^i \phi_i(X_{t-1}).$$

Zur Schätzung der unbekannt Parameter  $a_t$  von  $H_K(\omega, t-1)$  werden die diskontierten Cash-Flows bei der Kleinsten-Quadrate-Methode herangezogen,

$$\min_{a_t \in \mathbb{R}^K} \sum_{j=1}^N (ECF_{t-1}^T(\omega_j) - H_K(\omega_j, t-1))^2.$$

Nach Ermittlung der Koeffizienten  $\hat{a}_t$  wird der Cash-Flow-Pfad ausgehend vom Zeitpunkt  $t = T-1$  ermittelt. Dafür muss man die durch  $\tilde{H}_K(\omega_j, t)$  erzeugten optimalen Cash-Flows

$$CF_t^T(\omega_j, i) = CF_{t+1}^T(\omega_j, i) \mathbf{1}_{\tilde{H}_K(\omega_j, t) > f(X_t)}$$

für alle  $t < i \leq T$  und

$$CF_t^T(\omega_j, t) = f(X_t) \mathbf{1}_{\tilde{H}_K(\omega_j, t) \leq f(X_t)}$$

berechnen. Anschließend wird die Größe  $H(\omega, t-1) \approx H_K(\omega, T-2)$  wieder approximiert mit Hilfe der diskontierten Cash-Flows

$$ECF_{t-1}^T(\omega_j) = \sum_{i=t}^T \beta^{i-(t-2)} C F_i^T(\omega_j, i)$$

für alle  $j = 1, \dots, N$ . Die unbekannt Parameter erhält man wie zuvor durch die Kleinste-Quadrate-Methode. Dieser Vorgang wird bis  $t = 1$  wiederholt. Der Preis der Bermuda-Option zum Zeitpunkt 0 und Startwert  $X_0 = X$  beträgt dann approximativ

$$\tilde{V}_0^{B*} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ECF_0^T(\omega_j),$$

wobei

$$ECF_0^T(\omega_j) = \sum_{i=1}^T \beta^i C F_i^T(\omega_j, i).$$

Dieser Algorithmus approximiert die optimale Strategie pfadweise. Als Stoppregel erhält man

$$\tau = \min\{t | f(X_t) \geq \tilde{H}(X_t, t)\}$$

und es gilt

$$\tilde{V}_0^{B*}(X_0) \leq V_0^{B*}(X_0).$$

## 6.4.2 Adaptierung des Longstaff und Schwartz Algorithmus auf mehrfach ausüb bare Verträge

Nun adaptieren wir den Algorithmus von [34] auf das allgemeine Problem (6.3). Seien  $X$ ,  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $(Z^E, \mathcal{Z}^E)$ ,  $(M^E, \mathcal{M}^E)$ ,  $(Y^E, \mathcal{Y}^E)$ ,  $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $(S_t, \mathcal{S}_t^E)$  und  $(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E)$ ,  $f_t$  und  $g_t$  wie zuvor für alle  $t \in \mathcal{T}$  definiert und es gelte  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $Z_t \in \mathcal{Z}_t^E$ . Wir werden mit der Idee von [34] die optimale Strategie für unser Problem (6.3) pfadweise approximieren. Zunächst werden  $N$  Simulationen von unserem stochastischen Prozess  $X$  für den Zeitraum  $\mathcal{T}$  generiert, wobei der Startwert  $X_0 = X$  für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Wie bezeichnen diese Pfade wieder  $\omega_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$  und nehmen an, dass der Anfangszustand  $Z_0 = (M_0, X_0)$  fest und somit  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Analog zur Berechnung der Bermuda-Option beginnen wir rückwärts mit  $t = T$  und bestimmen für alle  $M \in M_T^E$  und  $X^T(j)$  den optimalen Cash-Flow

$$CF_T^T(M, \omega_j, T) = \sup_{\Pi_T \in \Gamma_T(M, X^T(j))} f_T(M, X^T(j), \Pi_T).$$

**Bemerkung 9.** Bei  $M_T^E \subseteq \mathbb{R}^d$  ziehen wir eine endliche Teilmenge heran und interpolieren die fehlenden Werte.

Im nächsten Schritt diskontieren wir diese Cash-Flows für alle  $M \in M_T^E$  und  $j \in \{1, \dots, N\}$

$$ECF_{T-1}^T(M, \omega_j) = \beta CF_T^T(M, \omega_j, T),$$

und approximieren

$$H(M, \omega, T - 1) = E_Q[\beta V_{T^*}(M, X^T) | X^{T-1}] = E_Q[ECF_{T-1}^T(M, \omega) | X^{T-1}]$$

durch

$$H(M, \omega, T - 1) \approx H_K(M, \omega, T - 1) = \sum_{i=1}^K a_i^i \phi_i(M, X^{T-1}).$$

Mit Hilfe der Kleinste-Quadrate-Methode werden die Parameter  $a_{T-1}^i$  durch die diskontierten Cash-Flows  $ECF_{T-1}^T$  kalibriert

$$\min_{a_{T-1} \in \mathbb{R}^K} \sum_{j=1}^N \sum_M (ECF_{T-1}^T(M, \omega_j) - H_K(M, \omega_j, T - 1))^2$$

und erhalten

$$\tilde{H}_K(M, \omega, T - 1) = \sum_{i=1}^K \tilde{a}_{T-1}^i \phi_i(M, X^{T-1}).$$

Nach der Approximation wird für jede Simulation  $j = 1, \dots, N$  und  $M \in M_{T-1}^E$  der neue Cash-Flow-Pfad ermittelt. Dafür benötigen wir die aktuelle Ausübung  $\hat{Y}_{T-1}^j$ , d.h.

$$\hat{Y}_{T-1}^j = \operatorname{argmax}_{\Pi_{T-1} \in \Gamma_{T-1}(M, X^{T-1}(j))} \left\{ f_t(M, X^{T-1}(j), \Pi_{T-1}) + \tilde{H}_K(g_T(M, \Pi_{T-1}, X^T(j)), \omega_j, T - 1) \right\}.$$

Der Neue Cash-Flow Pfad, der nur für  $M \in M_{T-1}^E$  relevant ist, lautet

$$\begin{aligned} C F_{T-1}^T(M, \omega_j, T - 1) &= f_t(M, X^{T-1}(j), \hat{Y}_{T-1}^j) \\ C F_{T-1}^T(M, \omega_j, T) &= C F_T^T(g_T(M, \hat{Y}_{T-1}^j, X^T(j)), \omega_j, T). \end{aligned}$$

Die diskontierten und aufsummierten Cash-Flows betragen

$$ECF_{T-2}^T(M, \omega_j) = \sum_{i=T-1}^T \beta^{i-(T-2)} C F_{T-1}^T(M, \omega_j, i)$$

bzw.

$$\begin{aligned} ECF_{T-2}^T(M, \omega_j) &= \\ &\beta C F_{T-1}^T(M, \omega_j, T - 1) + \beta ECF_{T-1}^T(g_T(M, \hat{Y}_{T-1}^j, X^T(j)), \omega_j). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Analog zum ersten Schritt wird eine geeignete Auswahl von Basisfunktionen getroffen, mit der  $H(M, \omega, T - 2) = E_Q[\beta V_{T-1}(M, X^{T-1}) | X^{T-2}]$  approximiert wird, d.h.

$$H(M, \omega, T - 2) \approx H_K(M, \omega, T - 2) = \sum_{i=1}^K a_{T-2}^i \phi_i(M, X^{T-2}).$$

Für die Schätzung von  $H_K(M, \omega, T - 2)$  ziehen wir die diskontierten, aufsummierten Cash-Flows  $ECF_{T-2}^T$  für alle  $M \in M_{T-1}^E$  und  $j \in \{1, \dots, N\}$  heran:

$$\min_{a_{T-2} \in \mathbb{R}^K} \sum_{j=1}^N \sum_M (ECF_{T-2}^T(M, \omega_j) - H_K(M, \omega_j, T - 2))^2$$

und erhalten

$$\tilde{H}_K(M, \omega, T-2) = \sum_{i=1}^K \tilde{a}_{T-2}^i \phi_i(M, X^{T-2}).$$

Danach wiederholt sich diese Vorgehensweise für  $t = \{T-2, \dots, 1\}$ . Der Preis der Swing-Option zur Zeit  $t = 0$  wird angenähert durch

$$\tilde{V}_0^*(M_0, X_0) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ECF_0^T(M_0, \omega_i) \leq V_0^*(M_0, X_0).$$

Durch Approximation von  $\mathbb{E}_Q[V_{t+1}^*(Z_{t+1})|X^t]$  erhält man eine Approximation der optimalen Strategie für ein fixes  $Z_0 = (M_0, X_0)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0(X_0) &= \operatorname{argmax}_{\Pi_0 \in \Gamma_0(M_0, X_0)} \{f_0(M_0, X_0, \Pi_0) + \tilde{H}_K(g_1(M_0, \Pi_0, X_0), X_0, 0)\} \\ \tilde{Y}_t(X^t) &= \operatorname{argmax}_{\Pi_t \in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t)} \{f_t(M_t^Y(X^t), X^t, \Pi_t) + \tilde{H}_K(g_{t+1}(M_t^Y(X^t), \Pi_t, X^{t+1}), X^t, t)\}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 10.** Bei der Umsetzung des Algorithmus ist es nicht notwendig für jeden Zeitpunkt den gesamten Cash-Flow Pfad für jede Simulation neu zu berechnen, da man für die Approximation von  $H(M, \omega, T-2)$  nur die diskontierten, aufsummierten Cash-Flows benötigt. Wegen (6.14) reicht es aus nur die Größe  $ECF_t^T(M, \omega_j)$  für alle  $j$  in der Berechnung mitzuführen.

### Die Wahl der Basisfunktionen

Für die Approximation von  $\mathbb{E}_Q[V_{t+1}^*(Z_{t+1})|X^t]$  sind  $\mathcal{F}_t$ -messbare Basisfunktionen zu wählen. Laut [34] zeigen numerische Tests, dass der Kleinste-Quadrate-Algorithmus sehr robust bezüglich einer beliebigen Wahl ist. Diese Basisfunktionen können z.B. sein

- Laguerre
- Hermite
- Legendre
- Jacobi-Polynome
- etc.

Bereits einfache Polynome können gute Resultate liefern.

Bei höher dimensionalen stochastischen Einflussgrößen muss man einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Komplexität machen, da bei Anstieg der Dimension die Anzahl der Basisfunktionen auch in die Höhe schnell. Zur Behandlung dieses Problems greifen wir die Idee der *Features* von [47] auf. Ein Feature ist eine Abbildung des Zustandsraumes (in unserem Fall  $(M_t, X^t)$ ) nach  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\phi : Z_t^E \rightarrow \mathbb{R}.$$

Je nach Problemstellung sind mehrere *Features* zu definieren, sodass man für jeden Punkt  $(M_t, X^t)$  im Zustandsraum  $Z_t^E$  einen entsprechenden Feature-Vektor

$$\phi(M_t, X^t) = (\phi_1(M_t, X^t), \dots, \phi_K(M_t, X^t))$$

erhält. Dieser spiegelt die Haupteigenschaften des Zustandes  $(M_t, X^t)$  wider, aber die hoch komplexe Struktur des ursprünglichen Zustandsraumes ist auf eine geringere Dimension herunter gebrochen, wobei die typischen Charakteristika beibehalten werden. Durch eine entsprechende Funktion

$$l : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$$

wird die bedingte Erwartung der Wertefunktion

$$E_Q[\beta V_{t+1}^*(M, X^{t+1}) | X^t] \approx l(a_t, \phi(M_t, X^t))$$

approximiert. Diese Funktion wird auch Architektur der Approximation bezeichnet. Die Wahl von  $l$  und  $\phi$  hängt somit von der Problemstellung sowie von der Person, die die Approximation durchführt ab. Es sind oft Versuche mit verschiedenen Kombinationen, die dazu führen können, dass sich unterschiedliche Strukturen ergeben.

Bei unseren Anwendungen werden wir uns auf eine lineare Architektur beschränken, d.h.

$$l(a_t, \phi(M_t, X^t)) = \sum_{i=1}^K a_t^i \phi_i(M_t, X^t).$$

Die Parameter dieser Architektur werden analog zum Algorithmus von [34] mit der Kleinsten-Quadrate-Methode ermittelt. Der Unterschied zum Algorithmus von [34] liegt somit darin, dass wir anstatt der Basisfunktionen des ursprünglichen Zustandsraumes Featurefunktionen definieren.

## 6.5 Anwendungen

In den folgenden Anwendungen wird der in Kapitel 5 vorgestellte Preisprozess verwendet. Zur Erinnerung: Der Prozess  $S_t$  hat die Struktur

$$S_t = \exp(a_t L_t + B_t), \tag{6.15}$$

wobei  $S_t \in \mathbb{R}^{24}$  ist, d.h. jede Stunde wird als ein Handelsgut angesehen. Jeder Stundenpreis wird in Abhängigkeit vom Bedarf und von den Schwankungen auf der Angebotsseite modelliert, wobei Interaktionen zwischen den einzelnen Stunden ebenfalls berücksichtigt werden.

Der Bedarf  $L_t$  setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$L_t = \mu_t^L + C_t^L R_t^L + \epsilon_t^L,$$

wobei  $\mu_t^L \in \mathbb{R}^{24}$  der mittlere Bedarf,  $C_t^L \in \mathbb{R}^{24 \times 3}$  die Auswirkungen der Abweichung vom mittleren Bedarf,  $R_t^L \in \mathbb{R}^3$  die stochastischen Komponenten, die die Abweichung generieren, und  $\epsilon_t^L \in \mathbb{R}^{24}$  zusätzliche Störungen bezüglich der einzelnen Stunden sind. In der Modellierung werden für die Komponenten von  $R_t$  unabhängige SARIMAX(1, 0, 1)(1, 0, 1)<sub>7</sub>-Prozesse und für die Komponenten in  $\epsilon_t^L$  unabhängige  $N(0, (\sigma_h^L)^2)$ -verteilte Zufallsgrößen für  $h = 1, \dots, 24$  verwendet.

Die Schwankungen  $B_t$  auf der Angebotsseite haben eine ähnliche Struktur

$$B_t = \mu_t^B + C_t^B R_t^B + \epsilon_t^B,$$

wobei die Größen  $\mu_t^B \in \mathbb{R}^{24}$ ,  $C_t^B \in \mathbb{R}^{24 \times 3}$ ,  $R_t^B \in \mathbb{R}^3$  und  $\epsilon_t^B \in \mathbb{R}^{24}$  ähnlich zum Bedarf eben für die Angebotsseite zu erklären sind. Die stochastischen Komponenten in  $R_t^B$  werden aber im Gegensatz zum Bedarf mit unabhängigen Regime-Switching-Prozessen, die aus einem Arbeitstags- und Nichtarbeitstagsprozess bestehen, die zusätzlich zwei verschiedene Zustände (Normal- und Sprungzustand) annehmen können, wobei der Sprungzustand den Markt in einer außernatürlichen Situation (Rohstoffknappheit, Generatorenausfälle, etc.) beschreibt (siehe Details im Kapitel 5), modelliert. Für die Komponenten in  $\epsilon_t^B$  werden wiederum unabhängig  $N(0, (\sigma_h^B)^2)$ -verteilte Zufallsgrößen für  $h = 1, \dots, 24$  verwendet.

Somit betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, Q, \mathcal{A})$  mit

$$\mathcal{A} = \sigma((X_t)_{t=0}^T),$$

wobei der Zufallsvektor  $X_t$  die treibenden stochastischen Komponenten des Preisprozesses beinhaltet, d.h.  $X_t$  umfasst alle stochastischen Einflüsse von  $S_t$

$$S_t = h_t(X_t),$$

wobei

$$X_t = (\alpha_t^L(i), \epsilon_t^L, \alpha_t^B(i), A_t^1(i), N_t^1(i), Y_t, \epsilon_t^B, Z_t(i), i = 1, 2, 3)$$

die Übergangsgleichungen  $\alpha_t^L(i)$  und  $\alpha_t^B(i)$  der Zustandsraummodelle von  $R_t^L(i)$  und  $R_t^B(i)$  für  $i = 1, 2, 3$ , die Regimeschalter  $Z_t(i)$  sowie die Prozesse im außernatürlichen Zustand  $A_t^1(i)$  und  $N_t^1(i)$  für Arbeits- und Nichtarbeitstag für  $i = 1, 2, 3$  beinhaltet. Der Zufallsvektor  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{136} \times \{0, 1, 2, 3\}^3$  ist Markov aber hoch dimensional, sodass wir in den folgenden Anwendungen zusätzlich eine geeignete Dimensionsreduktion durchführen müssen. Abschließend definieren wir die aufsteigende Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$  von  $X_t$  mit  $\mathcal{F}_t = \sigma((X_s)_{s=0}^t)$ .

**Bemerkung 11.** Dieses für die folgenden Anwendungen verwendete Modell spiegelt die wesentlichen Charakteristika des Spotmarktes sehr gut wider (siehe Kapitel 5). Sprunghafte Veränderungen, die auf Strommärkten keine Seltenheit sind, können mit Regime-Switching Modellen sehr gut abgebildet werden. Da die auslösenden Faktoren eher auf der Angebotsseite liegen, wie z.B. Kapazitätsengpässe, Rohstoffknappheit etc., werden diese im Modell nur in dieser Form berücksichtigt. Für unsere Anwendungen nehmen wir an, dass wir diese Größen zum Zeitpunkt der Betrachtung beobachten können, sowie die Übergangsgleichungen der Zustandsraummodelle von  $R_t^L(i)$  und  $R_t^B(i)$  für  $i = 1, 2, 3$  und die Störgrößen  $\epsilon_t^L$  und  $\epsilon_t^B$ , was nicht der Realität entspricht, wo wir nur die Preise selbst beobachten können. Da wir aber mit Simulationen arbeiten, können wir diese Annahme ohne weiteres treffen, wobei diese nur indirekt in den Anwendungen und zwar beim Erzeugen der Preispfade und Bilden der Featurefunktionen eingehen.

**Bemerkung 12.** Weiters ist anzumerken, dass der Spotmarkt ein Day-Ahead-Markt ist, d.h. die Preise für die Lieferung einer Einheit Strom zum Zeitpunkt  $t$  werden am Vortag bestimmt. Somit sind auch die Entscheidungen für den Zeitpunkt  $t$ , die auf diesem Markt basieren, einen Tag vorher zu treffen. Auch hier werden wir das Problem etwas vereinfachen, indem angenommen wird, dass die Information, die für die Entscheidung zum Zeitpunkt  $t$  herangezogen wird, tatsächlich beobachtet wird, d.h. zum Zeitpunkt der Entscheidung sind die benötigten Größen bereits bekannt. Zwar wird dadurch ein weiterer Approximationsfehler erzeugt, aber durch die Anwendung des erfahrenen Praktikers wird diese Abweichung in der Preisermittlung des Vertrages kaum ins Gewicht fallen.

**Bemerkung 13.** Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Zinsrate Null beträgt und somit der Diskontierungsfaktor gleich Eins ist, d.h.  $\beta_t \equiv 1$ .

### 6.5.1 Die einfache Swing-Option

Als erstes betrachten wir die Down-Swing-Option mit  $M$  Ausübungsrechten. Anhand dieses Vertrages werden wir empirisch zeigen, dass die Approximation mit Hilfe des adaptierten Algorithmus von [34] in Kombination mit der Idee der Featurefunktionen sehr gute Resultate liefert. Bei diesem Vertrag hat der Käufer die Möglichkeit maximal  $M$ -mal eine gewisse Menge an Strom von seinem Vertragspartner zu einem bestimmten Preis über einen gewissen Zeitraum zu erwerben. Für die Preisermittlung dieses Vertrages geht der Verkäufer davon aus, dass der Kunde diesen Kontrakt heranzieht, um auf dem Spotmarkt einen maximalen Gewinn zu erzielen, d.h. wenn der Preis am Spotmarkt sehr hoch ist, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde den Vertrag ausübt und die Menge am Spotmarkt verkauft und somit einen Gewinn erzielt. Deshalb wird der Verkäufer folgenden Preis verlangen

$$P_{\text{Swing}} = \sup_{Y=(Y_0, \dots, Y_T) \in \{0,1\}^{24 \times (T+1)}} \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{t=0}^T Y_t' \text{diag}(m_t) (S_t(X^t) - K) \mid X_0 \right]. \quad (6.16)$$

Zunächst werden wir das Problem in unsere mathematische Umgebung einbetten. Dazu benötigen wir

1. für die Zustandsvariable  $M_t^Y$ , alle zulässigen verbleibenden Ausübungsrechte  $M_t^E$ , die in diesem Fall  $M_t^E = \{\min(M - 24t, 0), \dots, M\}$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  betragen.
2. Der stochastische Einfluss ist, wie bereits erwähnt,  $X = (X_t)_{t=0}^T$ . Dieser beinhaltet alle wichtigen Komponenten des Preises und  $(X_t, \mathcal{F}_t)$  ist der dazugehörige Messraum.
3. Weiters sei  $(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E) = (M_t^E \times \mathbb{R}^{136}, \mathcal{M}_t^E \times \mathcal{F}_t)$  der entsprechende Messraum und
4.  $Y_t^E \in \{0, 1\}^{24}$  die Menge der möglichen Ausübungen. Der Kunde kann höchstens 24 mal am Tag (1 mal für jede Stunde) genau  $m_t(h)$  Einheiten von Strom für  $h = 1, \dots, 24$  erwerben.
5. Die zulässigen Ausübungsmengen für den Zustand  $Z_t = (M_t, X^t)$  werden durch die mengenwertige Funktion

$$\Gamma_t(Z_t) = \{Y \in Y_t^E \mid \sum_{h=1}^{24} Y_t^h \leq \min(24, M_t)\}$$

beschrieben.

6. Die Ertragsfunktion hat für alle  $t \in \mathcal{T}$  die Form

$$f_t(M_t, X^t, Y_t) = Y_t' \text{diag}(m_t) (S_t(X^t) - K),$$

wobei der Vektor  $m_t \in \mathbb{R}^{24}$  das Abnahmevermögen zum Zeitpunkt  $t$  angibt.

7. Der Verlauf der verbleibenden Ausübungsrechte erfolgt durch

$$M_{t+1}^Y = g_{t+1}(M_t^Y, Y_t, X^{t+1})$$

$$M_t^Y - \sum_{h=1}^{24} Y_t^h.$$

Die verbleibenden Ausübungsrechte  $M_t^Y$  reduzieren sich um die Zahl der ausgeübten Stunden am Tag  $t$  und ergeben so die neue verbleibende Menge an Rechten für den Tag  $t + 1$ .

**Bemerkung 14.** Durch die Definition von  $M_t^E$  wird gewährleistet, dass die Menge der zulässigen Strategien nicht leer ist, d.h.  $\Upsilon(Z_t) \neq \emptyset$  für alle  $t \in Z_t^E$ . Weiters ist die Ertragsfunktion  $f_t$  für alle  $t \in \mathcal{T}$   $\mathcal{Z}_t^E$ -messbar und integrierbar. Somit sind die Voraussetzungen für eine optimale Lösung gegeben.

Nach Bestimmung der notwendigen Werkzeuge können wir den Preis des virtuellen Speicherkraftwerkes nach (6.3) folgendermaßen definieren

$$\sup_{Y \in \Upsilon(Z_0)} v_0(Y, Z_0) \quad (6.17)$$

unter

$$M_{t+1}^Y(X^{t+1}) = g_{t+1}(M_t^Y(X^t), Y_t(X^t), X^{t+1}), \quad (6.18)$$

$$Y_t(X^t) \in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t) \quad \text{und} \quad (M_0, X_0) \mathcal{Z}_0\text{-messbar.}$$

Die Lösung dieses Problems wird mit Hilfe der Kleiste-Quadrate-Approximation nach Abschnitt 6.4 angenähert. Die einzige Herausforderung liegt hier in der Dimensionsreduktion der stochastischen Einflussgröße  $X_t$ . Der hoch dimensionale Vektor eignet sich nicht zur Wahl von brauchbaren Basisfunktionen, da bereits einfache Konstruktionen sehr komplex wären. Daher greifen wir die Idee der Featurefunktionen (siehe [5], [46] oder [47]) auf und wählen den Preis selbst als Feature-Funktion, d.h.

$$S_t = h_t(X_t)$$

und

$$\mathbb{E}_Q[\beta V_{t+1}^*(Z_{t+1}) | X^t] \approx H_K(M, \omega, t) =$$

$$a_{t,M}^0 + \sum_{j=1}^{24} a_{t,M}^j S_t^j(X^t) + \sum_{j=25}^{48} a_{t,M}^j (S_t^{(j-24)}(X^t))^2 + \sum_{j=49}^{72} a_{t,M}^j (S_t^{(j-48)}(X^t))^3, \quad (6.19)$$

wobei  $S_t^h$  der Preis der  $h$ -ten Stunde am Tag  $t$  ist.

## Ergebnisse

Wir betrachten nun konkret eine Swing-Option mit  $M = 1, \dots, 1000$  Ausübungsrechten über einen Zeitraum von einem Jahr ( $T = 365$ , 1.5.2002 bis 30.4.2003). Der Ausübungspreis beträgt  $K = \text{Euro } 25$  und die Ausübungshöhe ist  $m_t = 1_{24}$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ . Zur Berechnung des Preises ziehen wir  $N = 1000$  Simulationen heran und erhalten mit dem Algorithmus von Abschnitt 6.4 und der Funktion in (6.19) folgende Ergebnisse.

$M$	Preis LS	$M$	Preis LS
100	6528,2	600	18808,1
200	10007,0	700	20397,3
300	12732,7	800	21827,3
400	15028,8	900	23092,6
500	17029,6	1000	24169,9
$M$	Preis/ $M$	$M$	Preis/ $M$
100	65,3	600	31,3
200	50,0	700	29,1
300	42,3	800	27,3
400	37,6	900	25,7
500	34,1	1000	24,2

Tabelle 6.1: Der Preis der Swingoption für  $M$  Ausübungsrechte

In Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse in Abhängigkeit von der maximalen Zahl an erlaubten Ausübungen einerseits als Gesamtpreis und andererseits als Preis pro Ausübungsrecht dargestellt. Klarerweise steigt der Preis je höher die Zahl der Ausübungsrechte ist, da man ja öfters den Vertrag ausüben kann und man für diese Flexibilität mehr bezahlen muss. Wie wertvoll jedoch dann ein Ausübungsrecht in Abhängigkeit von der maximalen Zahl an möglichen Ausübungen ist, sieht man in der Auflistung der Preise pro Ausübungsrecht. Je geringer die Zahl der Ausübungsrechte, desto teurer ist ein Ausübungsrecht, was auch verständlich ist, denn je weniger Ausübungsrechte man hat, desto *sparsamer* muss man damit umgehen. Man wird den Vertrag eher dann ausüben, wenn ein hoher Preisspike zu erwarten ist. Hat man jedoch viele Ausübungsrechte, wird man diese öfters einsetzen, denn man hat ja des Öfteren die Gelegenheit einen hohen Gewinn damit zu erzielen.

$M$	Preis.o.gr.	$M$	Preis.o.gr.
100	6693,8	600	19244,1
200	10229,3	700	20897,5
300	13007,0	800	22401,3
400	15357,1	900	23776,6
500	17412,0	1000	25039,3
$M$	Preis.o.gr./ $M$	$M$	Preis.o.gr./ $M$
100	66,9	600	32,0
200	51,1	700	29,9
300	43,4	800	28,0
400	38,4	900	26,4
500	34,8	1000	25,0

Tabelle 6.2: Die obere Schranke des Preises der Swingoption für  $M$  Ausübungsrechte

Bei diesem Problem lässt sich ganz leicht eine obere Schranke ermitteln. Geht man davon aus, dass man den Preisverlauf im Voraus weiß, ist der optimale Ertrag die Summe der  $M$  größten nicht negativen Erträge  $(S_t(h) - K)$ . Besser könnten die Entscheidungen nicht getroffen werden. Führt man diese Berechnung pfadweise durch und mittelt sie, erhält man eine obere Schranke

für den Swingoptionspreis (siehe Tabelle 6.2).

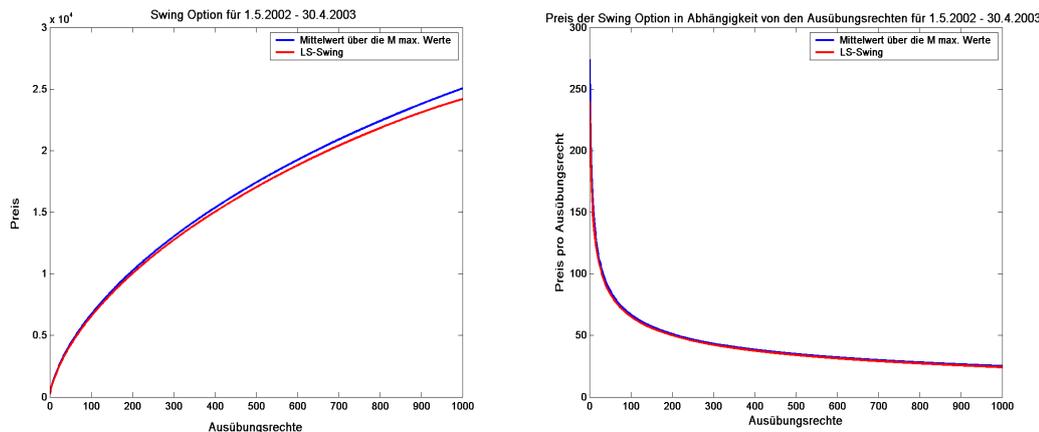


Abbildung 6.1: Der Preis der Swing-Option in Abhängigkeit von den Ausübungsrechten (links) und der Preis pro Ausübungsrecht (rechts)

In Abbildung 6.1 ist der Preis der Swing-Option mit  $M = 1, \dots, 1000$  Ausübungsrechten mit seiner oberen Schranke dargestellt. Wie man sieht, nähert sich die Approximation der oberen Schranke ziemlich gut an. Bereits bei wenigen Ausübungsrechten zeigen sich geringe Unterschiede. Bei 100 Ausübungsrechten liegt der Unterschied im Preis pro Ausübungsrecht unter Euro 2. Je höher die Zahl der maximalen Ausübungsrechte, desto geringer wird der Abstand pro Ausübungsrecht. Das ist auch damit begründet, dass je höher die Ausübungsrechte sind, desto eher nähert sich der Vertrag einem Bündel von europäischen Optionen, wo die Entscheidungszeitpunkte fixiert sind und nur mehr die Wahrnehmung einer Ausübung dem Kunden überlassen wird. Durch diese Gegenüberstellung wird deutlich, dass der adaptierte Algorithmus von [34] sehr gute Resultate liefert. In den nächsten Anwendungen zeigt sich, dass dieses Instrument auch für komplexere Strukturen geeignet ist.

Bevor wir uns diesen komplexen Fragen zuwenden, werfen wir noch einen Blick auf ein zweites Beispiel der vorliegenden Optionsart und untersuchen die Ausübungsstrategie und die Verteilung des Preises. Nun betrachten wir einen kürzeren Zeitraum und zwar vom 1.5.2002 bis 8.8.2002 ( $T=100$ ) mit  $M = 100$  Ausübungsrechten,  $m_t = 1$  Ausübungshöhe und Ausübungspreis  $K =$  Euro 25. Für die Berechnung des Preises ziehen wir diesmal  $N = 500$  Simulationen heran und berechnen den Preis mit Hilfe der Kleinste-Quadrate-Approximation und der Funktion (6.19). Als Ergebnis erhalten wir  $P_{\text{Swing}} =$  Euro 3.440,7. In Abbildung 6.2 wird die Verteilung des Preises einerseits als Histogramm (links), andererseits als QQ-Plot (rechts) und als empirische Verteilungsfunktion (unten) dargestellt. Bei 500 Simulationen zeigt die Verteilung eine leichte Rechtsschiefe.

Abschließend betrachten wir die Ausübungsstrategie, die wir durch den Algorithmus in Abschnitt 6.4 erhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0(X_0) &= \operatorname{argmax}_{\Pi_0 \in \Gamma_0(M_0, X_0)} \{f_0(M_0, X_0, \Pi_0) + \tilde{H}_K(g_1(M_0, \Pi_0, X_0), X_0, 0)\} \\ \tilde{Y}_t(X^t) &= \operatorname{argmax}_{\Pi_t \in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t)} \{f_t(M_t^Y(X^t), X^t, \Pi_t) + \tilde{H}_K(g_{t+1}(M_t^Y(X^t), \Pi_t, X^{t+1}), X^t, t)\}. \end{aligned}$$

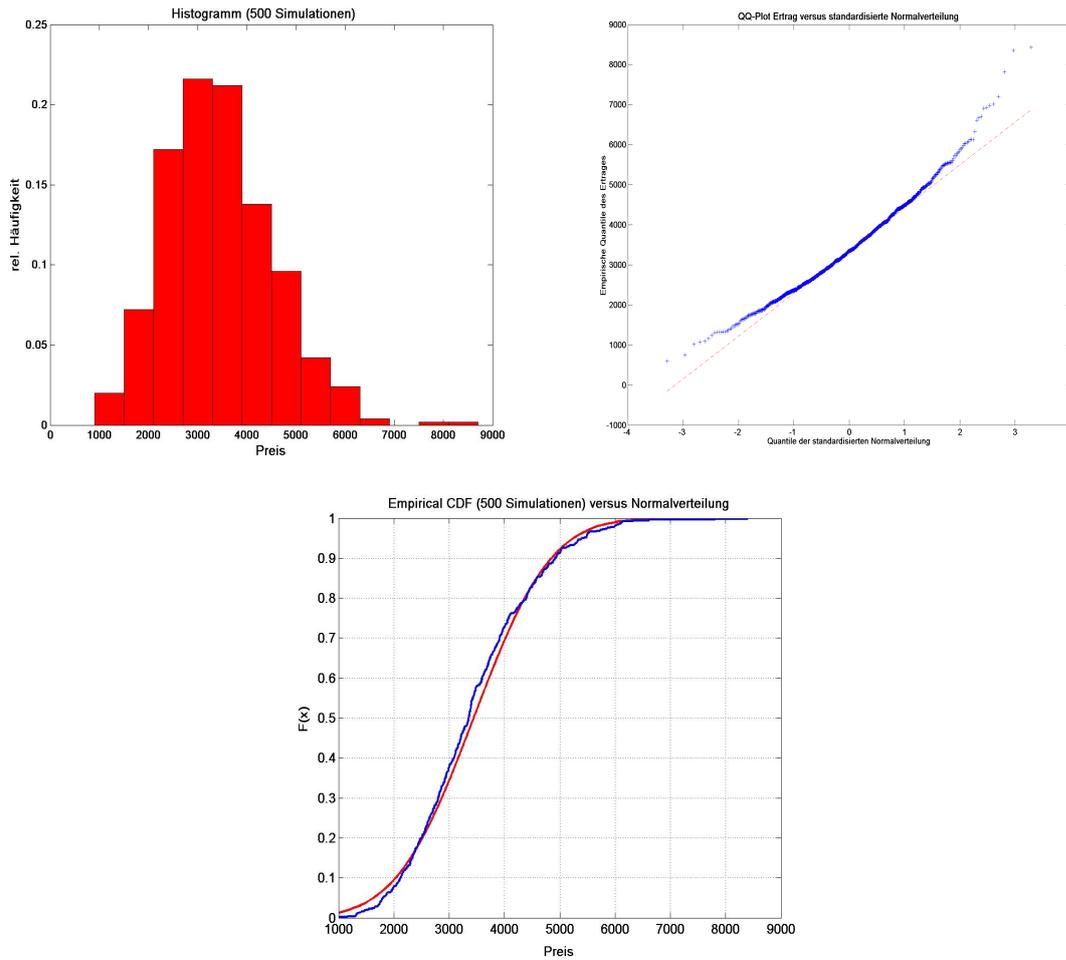


Abbildung 6.2: Die Verteilung des Preises für  $M = 100$  Ausübungsrechte über einen Zeitraum von  $T = 100$  Tagen bei  $N = 500$  Simulationen

In Abbildung 6.3 wird der daraus resultierende Verlauf der verbleibenden Ausübungsrechte  $M_t^{\bar{Y}}$  dargestellt. Es zeigt sich, dass innerhalb der ersten zehn Tage bis zu 17 Stunden ausgeübt werden. Nach einem Monat liegt die Zahl der verbleibenden Ausübungsrechte zwischen 63 und 97. Mindestens die Hälfte der Rechte werden bis zum Ende der Laufzeit ausgeübt. Da keine Verpflichtung zur Ausübung aller Rechte besteht, wird nur bei positiven Erträgen eine Ausübung überhaupt in Erwägung gezogen. In Abbildung 6.3 ist die Bandbreite bei 500 Simulationen mit einigen Trajekturen eingezeichnet.

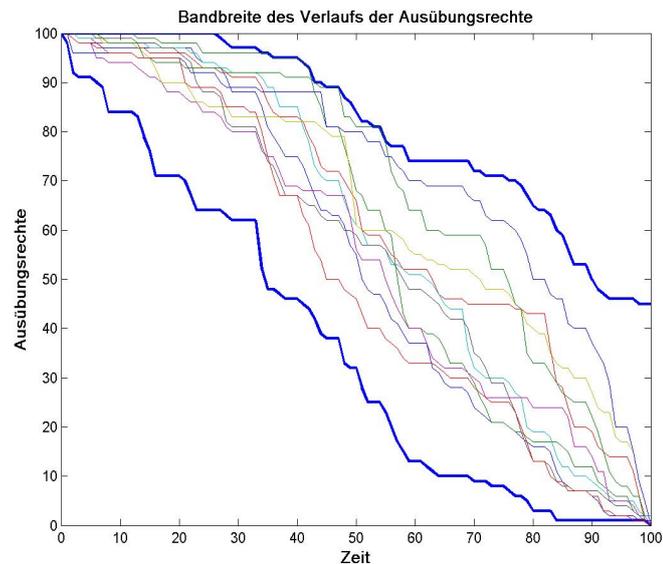


Abbildung 6.3: Die Verteilung des Preises für  $M = 100$  Ausübungsrechte über einen Zeitraum von  $T = 100$  Tagen bei  $N = 500$  Simulationen

## 6.5.2 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Minimal- und Maximalständen

Unter einem *virtuellen Speicherkraftwerk* versteht man eine Produktart mit optionalen und flexiblen Ausübungsmöglichkeiten. Der Kunde darf mit gewissen Restriktionen auswählen, wann er die elektrische Energie abrufen möchte. Die Standardrestriktionen solcher Produkte sind die maximale Energiemenge, die maximale Leistung und die Leistungsschritte. Zusatzrestriktionen können eine Vorgabe der Mindestabnahme von Energiemengen oder spezielle Zeitfunktionen als obere und untere Grenzen sein.

Da für den Verkauf dieses Produktes nicht notwendigerweise Speicherkraftwerke oder Gaskraftwerke gleicher Flexibilität gebaut werden müssen, und vom Käufer abgerufene Mengen, die vom Verkäufer aus dem eigenen Kraftwerkspark nicht aufgebracht werden können, von letzterem für den Käufer vom Spotmarkt bezogen werden können, erfolgt eine Bewertung dieser Produkte nicht nach den Kosten solcher Kraftwerke sondern nach den Spotmarktpreisen. Zur Bewertung dieser virtuellen Speicherkraftwerke wird wie im vorangegangenen Beispiel davon ausgegangen, dass der Käufer versucht, immer die wertvollsten Energiemengen abzurufen. Der Käufer versucht möglichst dann seinen Vertrag auszuüben, wenn der Spotpreis am höchsten ist.

Der erste virtuelle Speicher, der hier für das Jahr 2003 betrachtet wird, hat folgende Restriktionen:

- Anfangsstand: 7325 MWh
- Minimalstand am 1. Jänner des nächsten Jahres: 6500 MWh
- Maximalstand am 1. Jänner des nächsten Jahres: 7500 MWh
- Minimalstand 01.01.-04.05.: 0 MWh
- Minimalstand 01.02.: 3000 MWh
- Minimalstand 05.05.-29.06.: 5313 MWh
- Minimalstand 30.06.-14.09.: 9407 MWh
- Minimalstand 15.09.-28.09.: 3375 MWh
- Minimalstand 29.09.-31.12.: 0 MWh
- Minimalstand 01.12.: 9000 MWh
- Maximalstand 01.01.-02.03.: 11929 MWh
- Maximalstand 03.03.-31.12.: 11719 MWh

Zusätzlich gibt es wöchentliche Zuflüsse (siehe Tabelle 6.3). Die Minimal- und Maximalstände sind einzuhalten, ein Überschreiten bzw. Unterschreiten dieser Größen ist nicht erlaubt (siehe Abbildung 6.4). Diese Restriktionen sind sehr global und beinhalten unzulässige Kapazitätsstände, z.B. wenn man am 30. November keine Speicherkapazität mehr besitzt, kann man die Restriktion am ersten Dezember nicht erfüllen. Daher müssen wir uns im nächsten Schritt Gedanken über den zulässigen Speicherbereich für alle Zeitpunkte  $t \in \mathcal{T}$  machen.

Zufluss am	MWh						
03.Jän	1267	02.Apr	2320	02.Jul	2295	01.Okt	1825
08.Jän	1198	09.Apr	2454	09.Jul	2311	08.Okt	1844
15.Jän	1198	16.Apr	2454	16.Jul	2311	15.Okt	1844
22.Jän	1198	23.Apr	2454	23.Jul	2311	22.Okt	1844
29.Jän	1144	30.Apr	2638	30.Jul	2167	29.Okt	1776
05.Feb	1010	07.Mai	2776	06.Aug	1975	05.Nov	1605
12.Feb	1010	14.Mai	2776	13.Aug	1975	12.Nov	1605
19.Feb	1010	21.Mai	2776	20.Aug	1975	19.Nov	1605
26.Feb	1155	28.Mai	2693	27.Aug	1975	26.Nov	1605
05.Mär	1519	04.Jun	2197	03.Sep	1779	03.Dez	1442
12.Mär	1519	11.Jun	2197	10.Sep	1779	10.Dez	1442
19.Mär	1519	18.Jun	2197	17.Sep	1779	17.Dez	1442
26.Mär	1519	25.Jun	2197	24.Sep	1779	24.Dez	1442

Tabelle 6.3: Wöchentliche Aufstockung des virtuellen Speichers

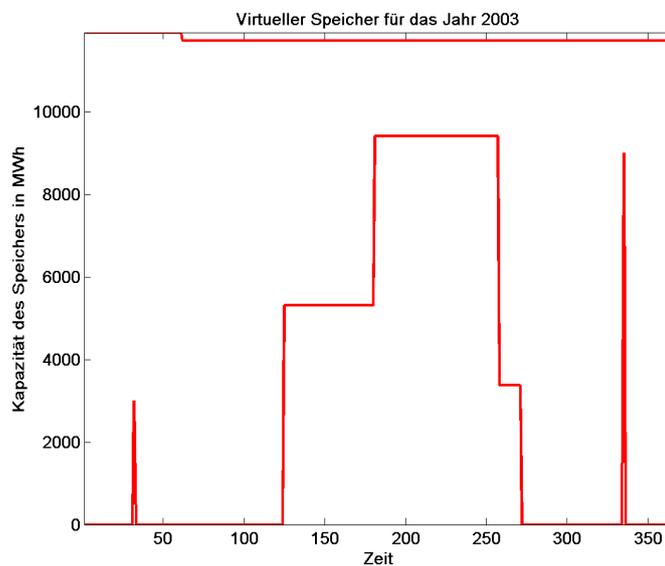


Abbildung 6.4: Die Minimal- und Maximalstände des virtuellen Speichers

Im weiteren Verlauf werden diese Minimal- bzw. Maximalstände des virtuellen Speichers mit  $U(t)$  und  $O(t)$  und die Zuflüsse in das Speicherkraftwerk (siehe Tabelle 6.3) mit  $I(t)$  bezeichnet. Direkte Restriktionen an der Ausübungsmenge gibt es im ersten Vertrag keine, abgesehen davon, dass diese Menge keine negativen Elemente enthält. Implizit sind diese jedoch durch die Minimal- bzw. Maximalstände gegeben. Fassen wir den Vertrag zunächst zusammen:

$$P_{V\text{Speicher}} = \sup_{Y=(Y_0, \dots, Y_T) \in \mathbb{R}^{24 \times T+1}} \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{t=0}^N Y(t)' S_t(X^t) | X_0 \right]$$

unter

$$Y_t^h \geq 0 \quad \text{für } h = 0, \dots, 24,$$

$$M_{t+1}^Y = M_t^Y + I(t+1) - Y_t' \mathbf{1}_{24}$$

und

$$U(t) \leq M_t \leq O(t)$$

für alle  $t \in \mathcal{T}$ .

Im nächsten Schritt betten wir diesen Vertrag in (6.3) ein. Dazu benötigen wir

1.  $M_t^E \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der zulässigen Kapazitäten des Speicherkraftwerkes zum Zeitpunkt  $t$  und  $(M_t^E, \mathcal{M}_t^E)$  den dazugehörigen Messraum. Zur Bestimmung von  $M_t^E$  muss man sich überlegen, welche Kapazitätsstände zum Zeitpunkt  $t$  vorliegen müssen, um die innerhalb der vorgegebenen Schranken  $[U(t+1), O(t+1)]$  liegenden Kapazitätsstände zum Zeitpunkt  $t+1$  erreichen zu können. Dazu gehen wir zunächst vom Zeitpunkt  $T$  aus. Um keine Restriktionen zu brechen, muss die Kapazität des Speichers am Beginn des Tages zwischen

$$M_T^E = [U^E(T), O^E(T)] = [U(T), O(T)]$$

liegen. Damit ein zulässiges  $M_T \in [U(T), O(T)]$  zum Zeitpunkt  $T$  erreicht werden kann, muss das Niveau des Speichers zum Zeitpunkt  $T-1$  im Intervall

$$M_{T-1}^E = [\max(U(T)^E - I(T), U(T-1)), O(T-1)] = [U(T-1)^E, O(T-1)^E]$$

liegen. Denn wäre  $M_{T-1} < U(T)^E - I(T)$  könnte man ein  $M_T \in M_T^E$  durch entsprechende Ausübung nicht erreichen, denn bereits bei keiner Ausübung hätte man die Restriktion  $M_T = M_{T-1} + I(T) < U(T)$  verletzt. Also damit mindestens das Niveau  $U(T)$  erreicht wird, muss am Vortag mindestens eine Kapazität von  $U(T)^E - I(T)$  vorliegen, ansonsten kann die Restriktion zum Zeitpunkt  $T$  nicht erfüllt werden. Gleichzeitig darf die aktuelle Restriktion von  $U(T-1)$  nicht vernachlässigt werden. Bei einem höheren Mindeststand ist dieser zu berücksichtigen, daher ist  $U(T-1)^E = \max(U(T)^E - I(T), U(T-1))$ . Mit der gleichen Begründung berechnet man für alle  $t = T-2, \dots, 0$  rekursiv die zulässigen Speicherkapazitäten

$$M_t^E = [\max(U^E(t+1) - I(t+1), U(t)), O(t)].$$

2. Weiters benötigen wir  $X_t \subseteq \mathbb{R}^{136}$  die stochastische Einflussgröße, die den Preis für eine Einheit Strom für die Stunden des Tages  $t$  bestimmt und  $(X^t, \mathcal{F}_t)$  den entsprechenden Messraum.

3. Sei  $(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E) = (M_t^E \times \mathbb{R}^{136}, \mathcal{M}_t^E \times \mathcal{F}_t)$  der gemeinsame Produktraum und
4.  $Y_t^E \subseteq (\mathbb{R}_+)^{24}$  die Menge der Restriktion an den Ausübungsmengen sowie  $\Gamma_t : Z_t^E \rightarrow Y_t^E$  die mengenwertige Funktionenfolge, die die zulässigen Ausübungsmengen abhängig vom Reservoirniveau und von den stochastischen Einflüssen für alle  $t \in \mathcal{T}$  beschreibt. Zur Bestimmung von  $\Gamma_t$  geht man von den Ungleichungen

$$U(t)^E \leq M_t - c_t \leq O(t)^E \quad \forall M_t \in M_t^E \quad (6.20)$$

und

$$U(t+1)^E \leq M_t + I(t+1) - c_t \leq O^E(t+1) \quad \forall M_t \in M_t^E \quad (6.21)$$

aus, wobei  $c_t = Y_t' \mathbf{1}_{24}$  die Gesamtausübungsmenge zum Zeitpunkt  $t$  ist. Diese Ungleichungen generieren eine Mindest- bzw. maximale Ausübungsmenge für den Zeitpunkt  $t$

$$\underbrace{\max(0, M_t + I(t+1) - O(t+1)^E)}_{c_U(M_t):=} \leq c_t \leq \underbrace{\min(M_t - U^E(t), M_t + I(t+1) - U^E(t+1))}_{c_O(M_t):=} \quad (6.22)$$

für alle  $M_t \in M_t^E$ . Daraus erhält man die zulässigen Ausübungsmengen

$$\Gamma_t(Z_t) = \{Y_t | Y_t' \mathbf{1}_{24} \in [c_U(M_t), c_O(M_t)]\}.$$

5. Die Ertragsfunktion ist für alle  $t \in \mathcal{T}$  gleich

$$f_t(M_t, X^t, Y_t) = f(M_t, X^t, Y_t) = Y_t' S_t(X^t).$$

6. Der Verlauf des Reservoirniveaus wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} M_{t+1}^Y &= g_{t+1}(M_t^Y, Y_t, X^{t+1}), \\ &= M_t^Y + I(t+1) - Y_t' \mathbf{1}_{24}, \end{aligned}$$

beschrieben, wobei  $I(t+1)$  die deterministische Aufstockung der Speicherkapazität des virtuellen Speicherkraftwerkes zum Zeitpunkt  $t+1$  ist (siehe Tabelle 6.3). Das Niveau zum Zeitpunkt  $t+1$  erhöht sich also um  $I(t+1)$  Einheiten und reduziert sich um die ausgeübte Gesamtmenge des Zeitpunktes  $t$ .

Nach Bestimmung der notwendigen Werkzeuge können wir nun den Preis des virtuellen Speicherkraftwerkes nach (6.3) definieren als

$$\sup_{Y \in \Upsilon(Z_0)} v_0(Y, Z_0) \quad (6.23)$$

unter

$$\begin{aligned} M_{t+1}^Y(X^{t+1}) &= g_{t+1}(M_t^Y(X^t), Y_t(X^t), X^{t+1}), \\ Y_t(X^t) &\in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t) \text{ und } (M_0, X_0) \text{ } \mathcal{Z}_0\text{-messbar} \end{aligned} \quad (6.24)$$

und mit Hilfe der Kleinste-Quadrate-Approximation nach Abschnitt 6.4 annähern. Dazu wäre folgendes anzumerken:

**Bemerkung 15.** Da der Zustandsraum  $M_t^E \subset \mathbb{R}$  sehr groß ist, werden wir die Menge diskretisieren und betrachten die Niveaustände  $\tilde{M}_t^E = \{U(t)^E, U(t)^E + \Delta_t, U(t)^E + 2\Delta_t, U(t)^E + L_t\Delta_t, O(t)^E\}$ , wobei wir einen Diskretisierungsfaktor von  $\Delta_t = 80$  MWh gewählt haben. Wir berechnen für alle  $M_t \in \tilde{M}_t^E$  die diskontierten aufsummierten Cash-Flow-Pfade  $ECF_{t-1}^T$  und werden diese für die fehlenden Zustände durch lineare Interpolation ermitteln, d.h. nachdem wir die optimale Menge  $\tilde{Y}_t(j)$  für den Zeitpunkt  $t$  und für alle Simulationen  $j = 1, \dots, N$  bestimmt haben, müssen wir  $ECF_{t-1}^T$  für alle  $M_t \in \tilde{M}_t^E$  berechnen. Dazu nutzen wir die folgende Eigenschaft der summierten, diskontierten und aus den bisherigen Ausübungsstrategien  $\tilde{Y}_s(j), s = t, \dots, T$  generierten Cash-Flows aus und zwar

$$\begin{aligned} ECF_{t-1}^T(M_t, \omega_j) &= \sum_{s=t}^T \beta^{i-(t-1)} CF_t^T(M_t, \omega_j, s), \\ &= \beta CF_t^T(M_t, \omega_j, t) + \beta ECF_t^T(g_{t+1}(M_t, \tilde{Y}_t(j), X^{t+1}(j)), \omega_j), \end{aligned}$$

Falls  $M_{t+1}^{\tilde{Y}} = g_{t+1}(M_t, \tilde{Y}_t(j), X^{t+1}(j)) \notin \tilde{M}_{t+1}^E$  führen wir eine Interpolation von  $ECF_t^T$  durch, d.h. sei  $M_{t+1}^1 \leq M_{t+1}^{\tilde{Y}} \leq M_{t+1}^2$ , wobei

$$M_{t+1}^1 = \max\{M \in \tilde{M}_{t+1}^E \quad \text{mit} \quad M \leq M_{t+1}^{\tilde{Y}}\}$$

und

$$M_{t+1}^2 = \min\{M \in \tilde{M}_{t+1}^E \quad \text{mit} \quad M \geq M_{t+1}^{\tilde{Y}}\},$$

dann sei

$$ECF_t^T(M_{t+1}^{\tilde{Y}}, \omega_j) \approx ECF_t^T(M_{t+1}^1, \omega_j) + \frac{M_{t+1}^{\tilde{Y}} - M_{t+1}^1}{M_{t+1}^2 - M_{t+1}^1} \{ECF_t^T(M_{t+1}^2, \omega_j) - ECF_t^T(M_{t+1}^1, \omega_j)\}$$

und

$$ECF_{t-1}^T(M_t, \omega_j) = \beta CF_t^T(M_t, \omega_j, t) + \beta ECF_t^T(M_{t+1}^{\tilde{Y}}, \omega_j).$$

Anschließend wird die bedingte Erwartung der diskontierten Wertefunktion

$$H(M_t, \omega, t-1) = \mathbb{E}_Q[\beta V_t^*(M_t, X^t) | X^{t-1}]$$

durch die Funktion

$$H_K(M, \omega, t) = a_t^0 + \sum_{j=1}^{24} a_t^j S_t^j(X^t) + a_t^{25} M + \sum_{j=26}^{49} a_t^j M S_t^{(j-25)}(X^t)$$

approximiert. Mit Hilfe der Kleinste-Quadrate-Methode werden die Koeffizienten  $a_t$  geschätzt, wobei  $ECF_{t-1}^T(M_t, \omega_j)$  herangezogen wird. Bei diesem Beispiel veränderten wir die Struktur der Feature-Funktionen. Da der Niveaustand eine reellwertige Größe ist, nehmen wir den Niveauperlauf als eine stetige Basisvariable auf, im Gegensatz zum vorigen Beispiel, wo wir die verbleibenden Ausübungsrechte durch eine Effektkodierung berücksichtigten.

## Ergebnisse

Die Anwendung des Algorithmus von Abschnitt 6.4 mit 1000 Simulationen ermittelte für diesen Vertrag einen Preis von Euro 9.048.064, 03. Da insgesamt 96.952 Megawattstunden (Anfangsstand plus Summe der Wochenzuflüsse minus Endstand) zu verbrauchen waren, kommt man auf Euro 93, 32/MWh. In Abbildung 6.5 sind die Verteilung des Preises zusammen mit der entsprechenden Normalverteilung für 1000 Simulationen dargestellt und in Abbildung 6.6 der Verlauf der Niveaustände bei 1000 Simulationen (links) und zur besseren Übersicht die untere und obere Schranke, sowie die Quartile bei 1000 Simulationen (rechts) dargestellt. Der Vorteil dieses Algorithmus ist, dass als Beiprodukt Entscheidungsfunktionen entstehen, die man zur Entscheidungsfindung heranziehen kann. Die Abbildung zeigt die daraus resultierenden Niveauverläufe auf Stundenbasis. Man kann die obere und untere Schranke sehr gut erkennen und es zeigt sich, dass es an manchen Tagen (insbesondere an manchen Nichtarbeitstagen) nicht sinnvoll ist, die Kapazität vollends auszuschöpfen. Aufgrund der speziellen Wahl von  $H_K(M, \omega, t)$  entsteht ein konvexes Optimierungsproblem für jeden Zeitpunkt  $t$ . Das wiederum führt dazu, dass entweder die erlaubte Mindest- bzw. maximale Menge ausgeübt wird (sozusagen eine „ $\{0, 1\}$ -Entscheidung“). Im nächsten Beispiel erweitern wir die Restriktionen, indem wir maximale Ausübungen pro Stunde fordern und Restriktionen an der Gesamtmenge einführen.

### 6.5.3 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Restriktionen bei der Ausübung

Wir behalten bei diesem Beispiel die gleichen Strukturen bezüglich der Minimal- und Maximalstände für den Speicher ( $U(t)$ ,  $O(t)$ , für  $t \in \mathcal{T}$ ) und die wöchentliche Aufstockung  $I(t)$  für  $t \in \mathcal{T}$  wie zuvor bei. Zusätzlich wird das virtuelle Speicherkraftwerk um Restriktionen bei der Ausübung erweitert, d.h. es werden Schranken bei der Ausübung pro Stunde, pro Stundengruppe etc. berücksichtigt. Genauer gesagt wird nun gefordert, dass die Grundmenge  $Y_t^E$  folgende Struktur hat

$$\begin{aligned}
 Y_t^E &= \{Y \mid 0 \leq Y_i \leq 40 \quad \forall i = 1, \dots, 24\}, \text{ wobei} & (6.25) \\
 &160 \leq \sum_{i=1}^7 Y_i + \sum_{i=21}^{24} Y_i, \\
 &0 \leq \sum_{i=8}^{20} Y_i \leq 160, \\
 &160 \leq \sum_{i=1}^{24} Y_i \quad \text{falls } t \text{ ein Arbeitstag sonst und } 0 \leq \sum_{i=1}^{24} Y_i.
 \end{aligned}$$

Diese Restriktionen an den Ausübungsmengen bewirken einerseits eine Veränderung der zulässigen Niveauverläufe  $M_t^E$  und andererseits in der mengenwertigen Funktion  $\Gamma_t$ . Da höchstens 40 MWh pro Stunde abgerufen werden können, in den Onpeak-Zeiten (Stunde 8 bis 20) insgesamt maximal 160 MWh, können pro Tag in Summe maximal 600 MWh in Anspruch genommen werden. Da in den Offpeak-Zeiten (Stunde 1 bis 7 und Stunde 21 bis 24) mindestens 160 MWh konsumiert werden müssen, ergibt sich somit eine Mindestausübungsmenge von 160 MWh. Diese minimalen und maximalen Ausübungsmengen müssen in der Berechnung der zulässigen Niveauverläufe  $M_t^E$  berücksichtigt werden. Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor geht man an die Beschreibung dieser Grenzen heran. Am Anfang des letzten Tages  $t = T$  muss mindestens  $U(T) + e_{\min}$  und maximal  $O(T)$  an Kapazität vorhanden sein. Um in diesen Bereich

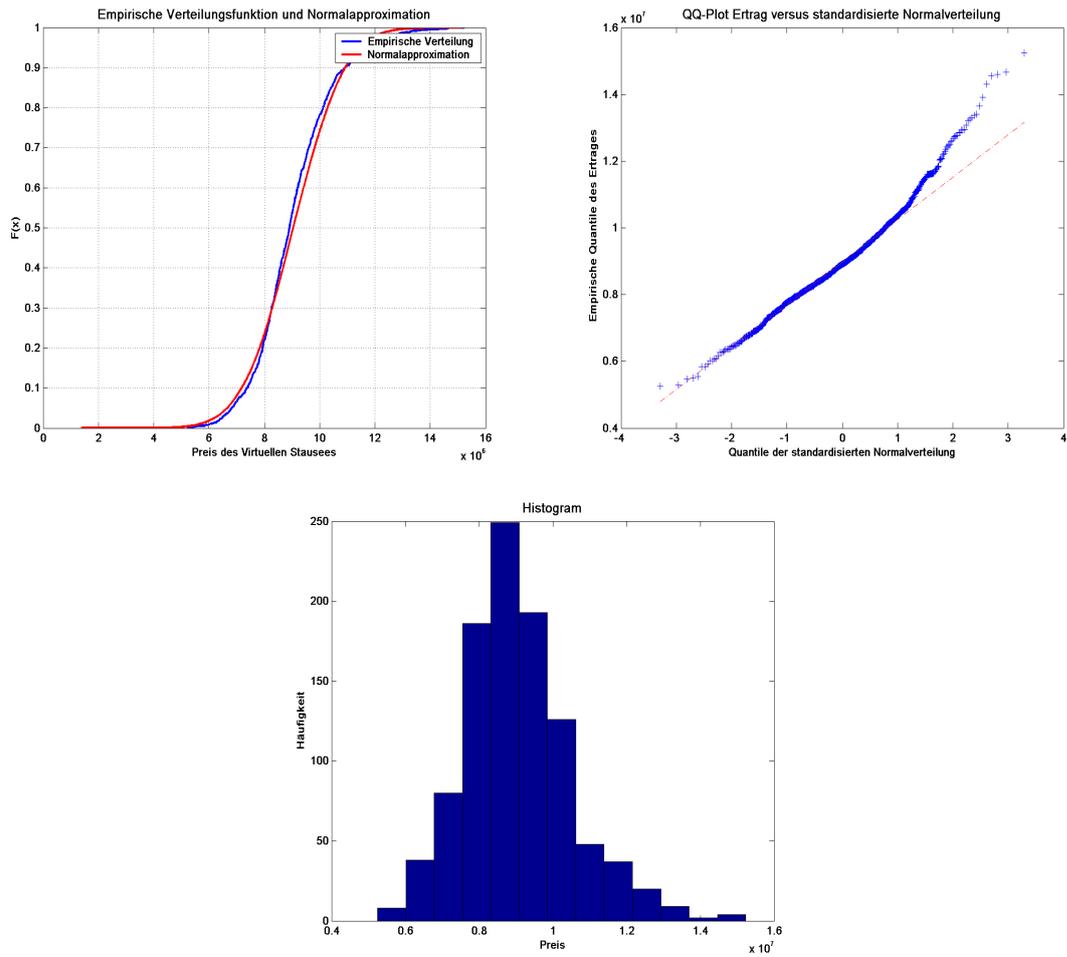


Abbildung 6.5: Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm)

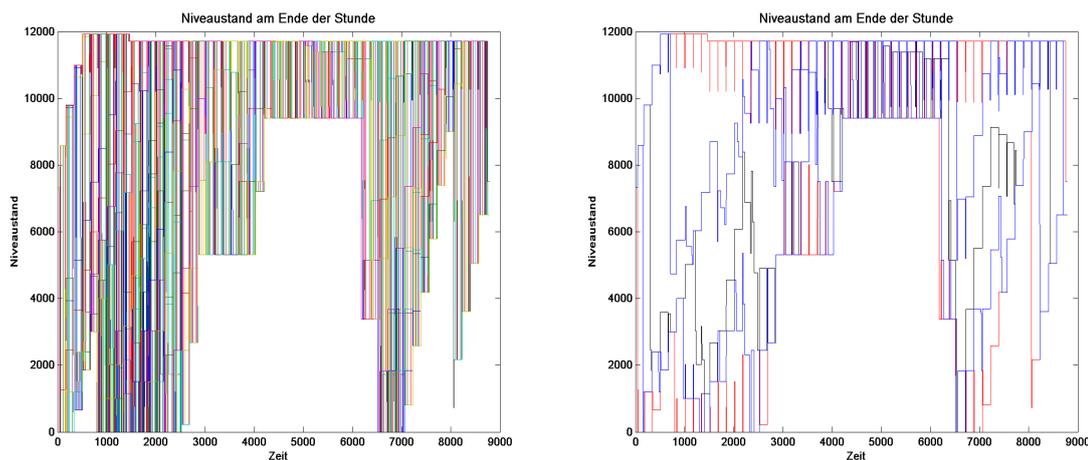


Abbildung 6.6: Verlauf des Niveaus durch die approximierten Ausübungsstrategie auf Stundenbasis (links) sowie die obere, untere Schranke und Quartile der Niveaustände bei 1000 Simulationen (rechts)

zu gelangen, muss man am Beginn des Vortages mindestens  $\max(U^E(T) - I(T) + e_{\min}(T - 1), U(T - 1))$  an Kapazität haben, denn hätte man weniger als  $U^E(T) - I(T) + e_{\min}$  im virtuellen Speicher, erreicht man das Mindestniveau am nächsten Tag nicht mehr. Bezüglich der Obergrenze muss man sich ebenfalls Gedanken machen, da man höchstens  $e_{\max} = 600$  MWh ausüben darf und gleichzeitig Acht geben muss, dass man die geforderten Obergrenzen  $O(t)$  nicht überschreitet. Damit dieser Fall nicht eintritt, darf zum Zeitpunkt  $T - 1$  die Kapazität höchstens  $\min(O^E(T) - I(T) + e_{\max}, O(T - 1))$  betragen. Analog geht man bei den zulässigen Niveauständen  $M_t$  zum Zeitpunkt  $t$  vor, wobei sich die Grenzen rekursiv durch

$$\begin{aligned} U^E(t) &= \max(U^E(t + 1) - I(t + 1) + e_{\min}, U(t)), \\ O^E(t) &= \min(O^E(t + 1) - I(t + 1) + e_{\max}, O(t)) \end{aligned}$$

bilden. Die zulässigen Ausübungsmengen, abhängig vom aktuellen Niveaustand  $M_t$  und der stochastischen Einflussgröße  $X^t$ , erhalten wir durch die Abbildung

$$\Gamma_t(Z_t) = \{Y | Y' \mathbf{1}_{24} \in [\max(e_{\min}, c_U(M_t)), \min(e_{\max}, c_O(M_t))]\}$$

wobei

$$\begin{aligned} c_U(M_t) &= \min(0, M_t + I(t + 1) - O(t + 1)^E), \\ c_O(M_t) &= \max(M_t - U^E(t) + e_{\min}, M_t + I(t + 1) - U^E(t + 1)) \end{aligned}$$

ähnlich zu (6.22) definiert sind.

Nach Ermittlung der zulässigen Niveauperläufe, sowie der zulässigen Ausübungsmengen kann die Approximation, die in der vorigen Anwendung geschildert wurde, eins zu eins auf dieses Problem angewandt werden, wobei hier die Restriktionen bezüglich der Ausübung zu berücksichtigen sind, d.h. die Ermittlung von  $\tilde{Y}_t(j)$  für alle Simulationen und Zeitpunkte  $t$  ist komplexer, da mehr Restriktionen einfließen.

## Ergebnisse

Nach Ausführen des Algorithmus erhält man für das Jahr 2003 als Preis für den Vertrag einen Betrag von Euro 2.975.691, 24, der um ca. zwei Drittel geringer als zuvor ist. Bezogen auf die Megawattstunden beträgt der Preis Euro 30, 69 pro MWh. Das ist darauf zurückzuführen, dass einerseits die Gesamtmenge, die pro Tag abgerufen werden kann, viel stärker eingegrenzt ist (siehe Abbildung 6.8), und andererseits Stundenrestriktionen vorliegen. Meist sind die Preise zu den Mittagsstunden am höchsten. Im vorigen Beispiel konnte man die ganze zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehende Kapazität abrufen, wogegen hier nur maximal 160 MWh verbraucht werden können. Weiters wird man durch die Verpflichtung auch bei Offpeak-Zeiten mindestens 160 MWh zu konsumieren, gezwungen „wertvolle“ Kapazitäten zu einem billigeren Preis zu beziehen. Bei Ausführen des Algorithmus hat man aufgrund der speziellen Wahl von  $H_K(M, \omega, t)$  ein konvexes Optimierungsprobleme für jeden Zeitpunkt  $t$ , für jede Simulation und Zustand  $M_t$  zu lösen. Doch diesmal sind mehr Nebenbedingungen einzuhalten.

In Abbildung 6.8 ist der Kapazitätsverlauf des virtuellen Speichers bei 1000 Simulationen (links) mit obere und untere Schranke sowie mit den Quartilen bei 1000 Simulationen (rechts) dargestellt. Man sieht sehr schön, dass die Bandbreite viel geringer als im Beispiel davor ist. Die empirische Verteilungsfunktion des Preises, der QQ-Plot und das Histogramm (siehe Abbildung 6.7) zeigen eine sehr gute Annäherung an die Normalverteilung.

### 6.5.4 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Wochenrestriktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit folgender Spezifikation. Die Gesamtkapazität des virtuellen Speichers beträgt  $P_0 = 100$  MWh, die vom Kunden in  $KW = 50$  Wochen zu verbrauchen sind, wobei pro Woche mindestens eine Einheit ( $W_{\min} = 1$ ) und maximal drei Einheiten ( $W_{\max} = 3$ ) abgerufen werden dürfen. Dabei darf man höchstens zwei Einheiten ( $W_{\max}^{14:17} = 2$ ) an Strom zwischen 14 : 00 – 17 : 00 Uhr (Stunde 15, 16 und 17) erwerben.

Die Herausforderung bei diesem Vertrag liegt in der Berücksichtigung der Wochenrestriktionen, d.h. der Niveauperlauf  $M_t \in M_t^E$  ist zweidimensional und zwar

- der Niveaustand des virtuellen Speichers  $P_t$  zum Zeitpunkt  $t$  und
- die in der betrachteten Woche noch verbleibende Kapazität  $W_t$  ( $0 \leq W_t \leq W_{\max}$ )

Im ersten Schritt definieren wir die zulässigen Niveaustände  $P_t^E$  und  $W_t^E$  und somit  $M_t^E$ . Am Anfang ist das Speicherniveau 100. Da man in der Woche maximal drei MWh Strom beziehen kann, variiert das Niveau in der ersten Woche zwischen 100 und 97. Nach Ablauf der Woche muss mindestens eine Einheit abgerufen sein, d.h. in der zweiten Woche kann das Niveau maximal 99 MWh sein. Da man wieder drei Einheiten maximal ausüben kann, liegt die untere Grenze bei 94, das setzt sich fort bis zu einem Zeitpunkt, wo man aufgrund der Mindestausübung pro Woche ein verbleibendes Niveau benötigt, sowie aufgrund der maximalen Wochenkapazität, kein höheres Niveau haben darf. Dazu muss man am Ende der Laufzeit, das auch gleich das Ende der Woche ist, beginnen. Nach Ausübung muss der Speicher leer sein. Somit darf in der letzten Woche das Niveau  $P_t \in P_t^E = [0, 3]$  betragen, da man maximal drei Einheiten in einer Woche ausüben darf. In der vorletzten Woche, muss das Mindestniveau eins sein, da man in der letzten Woche mindestens eine Einheit benötigt um die Wochenrestriktion

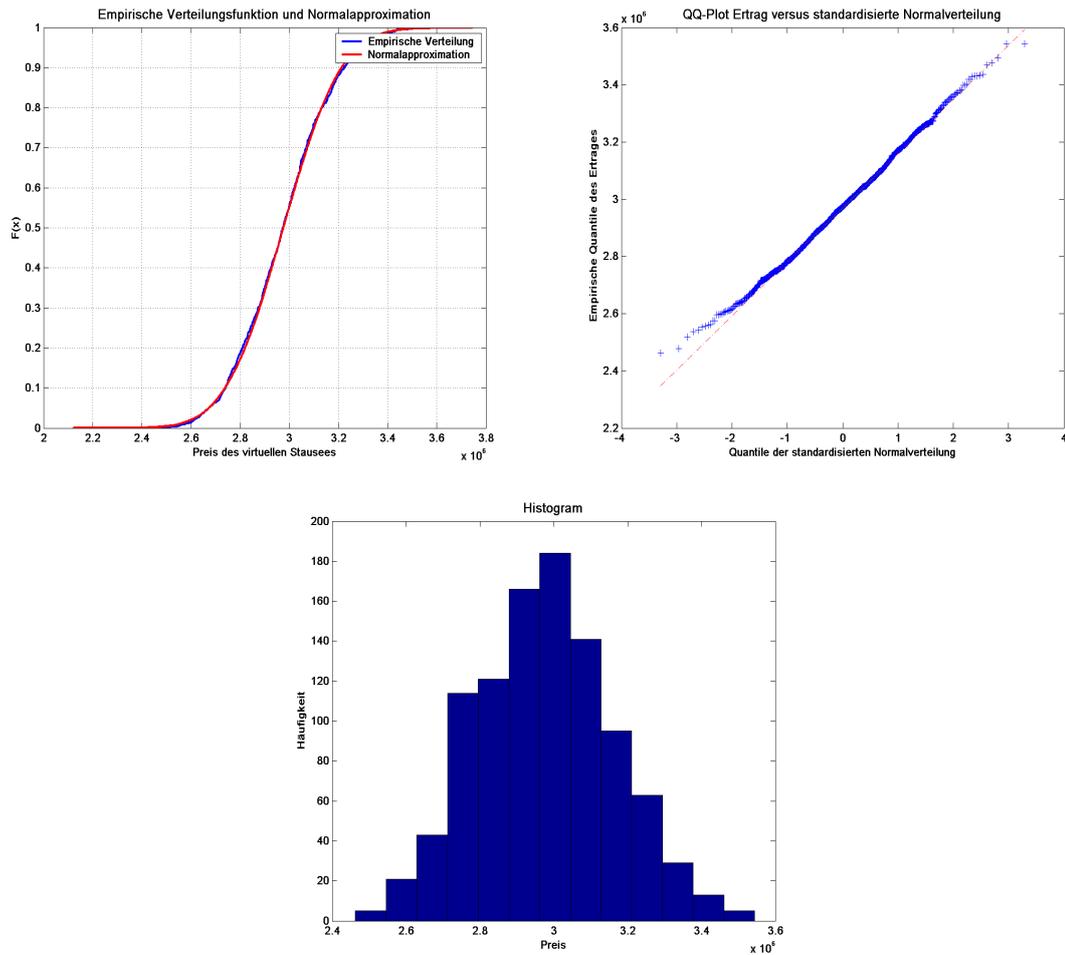


Abbildung 6.7: Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm)

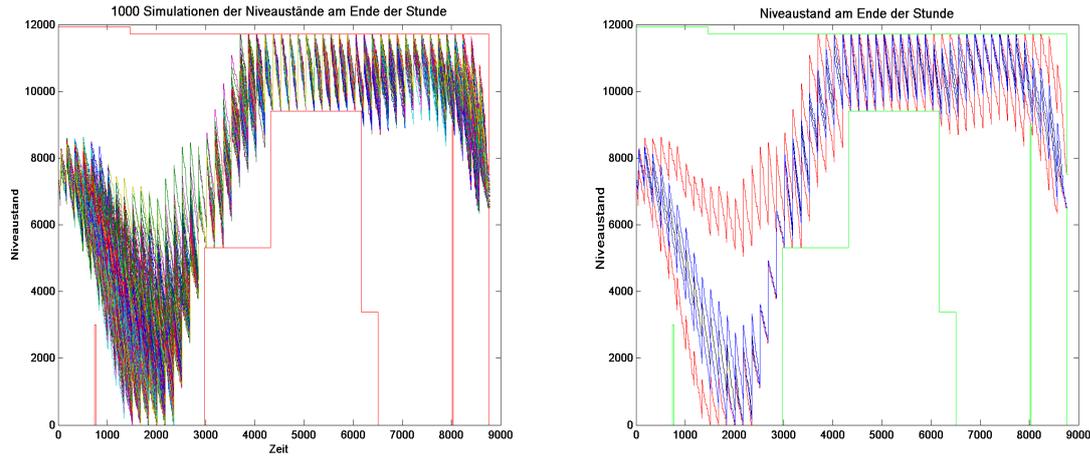


Abbildung 6.8: Verlauf des Niveaus durch die approximierte Ausübungsstrategie auf Stundenbasis (links) sowie die obere, untere Schranke und Quartile der Niveaustände bei 1000 Simulationen (rechts)

(Mindestausübungsmenge in der Woche ist eins) zu erfüllen, somit liegt  $P_t \in P_t^E = [1, 6]$  für  $t$  in der vorletzten Woche ( $t \in [336, 343]$ ). Für die davor liegende Woche gilt  $P_t \in P_t^E = [2, 9]$ , usw. bis man jene Woche  $k$  erreicht, wo

$$P - kW_{\min} > (KW - k)W_{\max}.$$

Somit erhält man die obere Grenze der zulässigen Niveauperläufe

$$O(t)^E = \min(P_0 - (\lceil \frac{t}{7} \rceil - 1)W_{\min}, (KW - \lceil \frac{t}{7} \rceil)W_{\max}).$$

Für die untere Grenze geht man analog vor und erhält

$$U(t)^E = \max(P_0 - \lceil \frac{t}{7} \rceil W_{\max}, (KW - \lceil \frac{t}{7} \rceil)W_{\min}).$$

Nachdem die zulässigen Niveauperläufe ermittelt sind (siehe Abbildung 6.9), kann man erst die zulässigen Wochenkapazitäten bestimmen, da diese vom Niveaustand  $P_t$  abhängen, d.h.  $W_t^E = W_t^E(P_t)$  für  $P_t \in P_t^E$  und zwar

$$W_t^E = [U(P_t)_W^E, O(P_t)_W^E],$$

wobei

$$U(P_t)_W^E = \begin{cases} \max\{W_{\max} + P_t - O(t+1)^E, 0\} & , \text{ falls } P_t - O(t+1)^E \leq 0, \\ P_t - O(t+1)^E & , \text{ falls } P_t - O(t+1)^E > 0, \end{cases}$$

und  $O(P_t)_W^E = W_{\max}$ . Da maximal  $W_{\max}$  Einheiten pro Woche abgerufen werden dürfen, kann die verbleibende Kapazität maximal  $W_{\max}$  Einheiten ausmachen. Daher diese Obergrenze. Die untere zulässige Grenze hängt hingegen vom Niveaustand des virtuellen Speichers  $P_t$  ab. Um die Obergrenze des Niveaustandes  $O(t)^E$  nicht zu verletzen, muss der verbleibende Wochenstand  $W_t$  mindestens  $P_t - O(t+1)^E$  sein, falls der Niveaustand  $P_t$  größer als die Obergrenze  $O(t+1)^E$  ist. Das ist der Fall, wenn  $t$  das Ende einer Woche ist, da sich die Obergrenze  $O(t+1)^E$

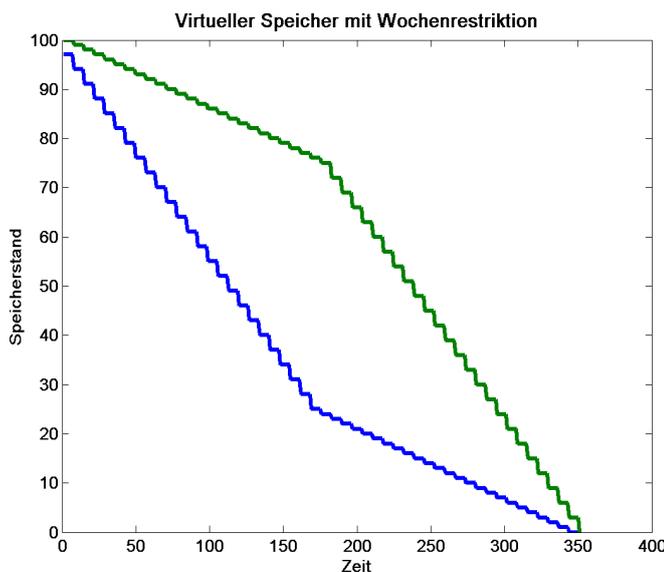


Abbildung 6.9: Die Minimal- und Maximalstände des virtuellen Speichers mit Wochenrestriktionen

am Anfang einer Woche verringert (siehe Abbildung 6.9).

Der Fall  $P_t - O(t + 1)^E \leq 0$  kann eintreten, wenn  $t$  am Anfang oder innerhalb einer Woche liegt. Der Niveaustand liegt unter oder ist gleich der zulässigen Obergrenze  $O(t + 1)^E$ . Da man maximal pro Woche  $W_{\max}$  Einheiten ausüben darf und die Obergrenze am Anfang der nächsten Woche einzuhalten hat, muss der verbleibende Wochenstand zum Zeitpunkt  $t$  mindestens  $\max\{W_{\max} + P_t - O(t + 1)^E, 0\}$  Einheiten ausmachen, denn hätte man weniger, wäre der Niveaustand am Anfang der nächsten Woche höher als die zulässige Obergrenze, die sich ja verringert (siehe Abbildung 6.10).

Nachdem der zulässige Niveaustand und der verbleibende Wochenstand definiert wurden, kann der entsprechende Messraum  $(M_t^E, \mathcal{M}_t^E)$  aufgestellt werden. Mit der stochastischen Einflussgröße  $X_t$  (wie zuvor) definieren wir den gemeinsamen Produktraum  $(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E)$ . Anschließend können wir mit den Restriktionen an den Ausübungsmengen

$$Y_t^E = \{Y \mid 0 \leq Y_i \leq 3\} \text{ mit}$$

$$0 \leq \sum_{i=15}^{17} Y_i \leq 2,$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{24} Y_i \leq 3$$

für alle  $P_t \in P_t^E$  und  $W_t \in W_t^E$  bzw.  $(P_t, W_t) \in M_t^E = (P_t^E \times W_t^E)$  die Menge der zulässigen Ausübungen und zwar

$$\Gamma_t(M_t, X^t) = \{Y \in Y_t^E \mid Y' \mathbf{1}_{24} \in [c_U(M_t), c_O(M_t)]\}$$

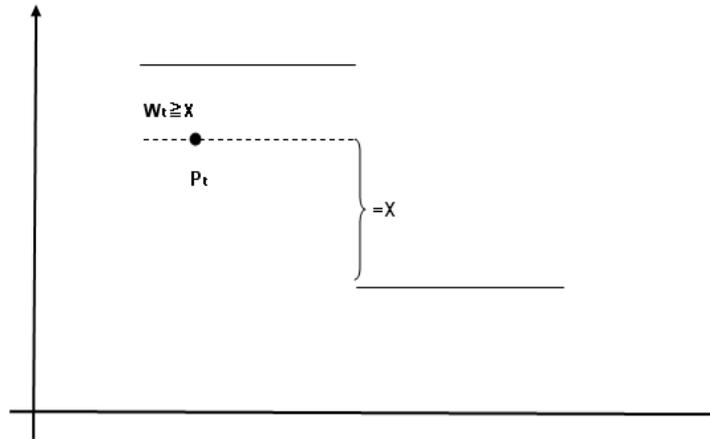


Abbildung 6.10: Die Bestimmung der unteren zulässigen Grenze von  $W_t$

mit

$$\begin{aligned} c_U(M_t) &= \max(P_t - O(t)^E, 0, J_t(W_t)), \\ c_O(M_t) &= \min(W_t, P_t - U(t)^E, P_t - U(t+1)^E), \end{aligned}$$

wobei

$$J_t(W) = \begin{cases} W_{\min} & \text{, falls } W = W_{\max} \text{ und } t \text{ Ende der Woche ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Information liefert, ob die Mindestmenge bereits ausgeübt wurde, bestimmen.

Die Ertragsfunktion ist wie zuvor für alle  $t \in \mathcal{T}$  gleich

$$f_t(M_t, X^t, Y_t) = f(M_t, X^t, Y_t) = Y_t' S_t(X^t).$$

Der Verlauf des Reservoirniveaus  $P_t$  wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} P_{t+1}^Y &= g_{t+1}^P(P_t^Y, Y_t, X^{t+1}), \\ &= P_t^Y - Y_t' \mathbf{1}_{24}, \end{aligned}$$

beschrieben und die wöchentliche zur Verfügung stehende Menge durch

$$\begin{aligned} W_{t+1}^Y &= g_{t+1}^W(W_t^Y, Y_t, X^{t+1}), \\ &= \max(W_t^Y - Y_t' \mathbf{1}_{24} + I(t+1), W_{\max}), \end{aligned}$$

wobei sich diese Menge um  $I(t) = W_{\max}$  erhöht, falls  $t$  ein Wochenanfang ist, ansonsten nicht. Wenn mehr als  $W_{\max}$  Einheiten vorliegen, verfällt die überschüssige Menge, da man nur höchstens  $W_{\max}$  Einheiten in der Woche ausüben darf.

Die notwendigen Werkzeuge sind festgelegt und das Problem kann folgendermaßen definiert werden. Bestimme

$$\sup_{Y \in \Upsilon(Z_0)} v_0(Y, Z_0) \tag{6.26}$$

unter

$$\begin{aligned} M_{t+1}^Y(X^{t+1}) &= g_{t+1}(M_t^Y(X^t), Y_t(X^t), X^{t+1}), \\ Y_t(X^t) &\in \Gamma_t(M_t^Y(X^t), X^t) \text{ und } (M_0, X_0) \text{ } \mathcal{Z}_0\text{-messbar,} \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei  $g_{t+1}(\cdot) = (g_{t+1}^P(\cdot), g_{t+1}^W(\cdot))$ .

Nun kann man den Algorithmus wie zuvor anwenden, nur dass sich die Kombinationen von  $M_t = (P_t, W_t) \in M_t^E$  erhöhen, da man nicht nur die Niveauverläufe  $P_t$  zu betrachten hat, sondern auch die in der Woche zur Verfügung stehende Ausübungsmenge  $W_t$ . Weiters wird wieder eine Diskretisierung von  $M_t^E$  mit  $\Delta_t = 1$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  durchgeführt und die fehlenden Werte, wenn nötig linear interpoliert. Für die Approximation der bedingten Erwartung der diskontierten Wertefunktion werden wir bei diesem Beispiel den verbleibenden Wochenstand ebenfalls als Basisvariable aufnehmen. Somit wird die bedingte Erwartung der diskontierten Wertefunktion

$$H(M_t, \omega, t - 1) = \mathbb{E}_Q[\beta V_t^*(M_t, X^t) | X^{t-1}]$$

durch

$$\begin{aligned} H_K(M_t, \omega, t - 1) &= \sum_{i=0}^K a_{t-1}^i \phi_i(M_t, X^{t-1}), \\ &= a_{t-1}^0 + \sum_{i=1}^{24} a_{t-1}^i S_{t-1}^i(X^{t-1}) + \sum_{i=25}^{48} a_{t-1}^i S_{t-1}^i(X^{t-1}) P_t + \\ &\quad a_{t-1}^{49} W_t + \sum_{j=50}^{73} a_{t-1}^j S_{t-1}^j(X^{t-1}) W_t \end{aligned} \quad (6.28)$$

approximiert und die Parameter werden durch die Kleinste-Quadrate-Methode ermittelt, wobei die diskontierten summierten Cash-Flows  $ECF_t^T$  herangezogen werden.

## Ergebnisse

Wir betrachten die ersten  $KW = 50$  Wochen des Jahres 2005 und führen 1000 Preissimulationen für diesen Zeitraum durch. Mit der Anwendung des Algorithmus im Abschnitt 6.4 erhält man anschließend als Preis für diesen Vertrag einen Betrag von Euro 8.831,7 bzw. bezogen auf die Gesamtausübungsmenge Euro 88.32/MWh. Die Verteilung des Ertrages, wie man in Abbildung 6.11 sehen kann, hat eine leichte Rechtsschiefe.

In Abbildung 6.12 (links) ist einerseits der Verlauf des Niveaustandes, der durch den Algorithmus erzeugt wird, für die 1000 Simulationen dargestellt, sowie die untere, obere Schranke und die Quartile bei 1000 Simulationen (rechts). Unterhalb findet man den verbleibenden Wochenstand, der sich meist zwischen 0 und 3 bewegt, d.h. entweder wird alles oder nichts abgerufen, vor. Zwei verbleibende Einheiten sind das Ergebnis von der Forderung, dass mindestens eine Einheit pro Woche ausgeübt werden muss. Da manche Wochen aufgrund der Preissituation nicht attraktiv sind, eine gewisse Menge auszuüben, wird dann eben nur die Mindestmenge abgerufen. Diese Eigenschaft ist auf die Funktion  $H_K$  siehe (6.28) und die Ertragsfunktion zurückzuführen, die eine konvexe Struktur aufweisen. Somit hat man für jeden Zeitpunkt und jede Simulation ein konvexes Optimierungsproblem mit Restriktionen durchzuführen. Als Lösung erhält man eine Gesamtausübungsmenge von  $c_U(M_t)$  oder  $c_O(M_t)$  Einheiten, wie man es eben in Abbildung 6.12 unten an den entsprechenden Wochenständen sieht.

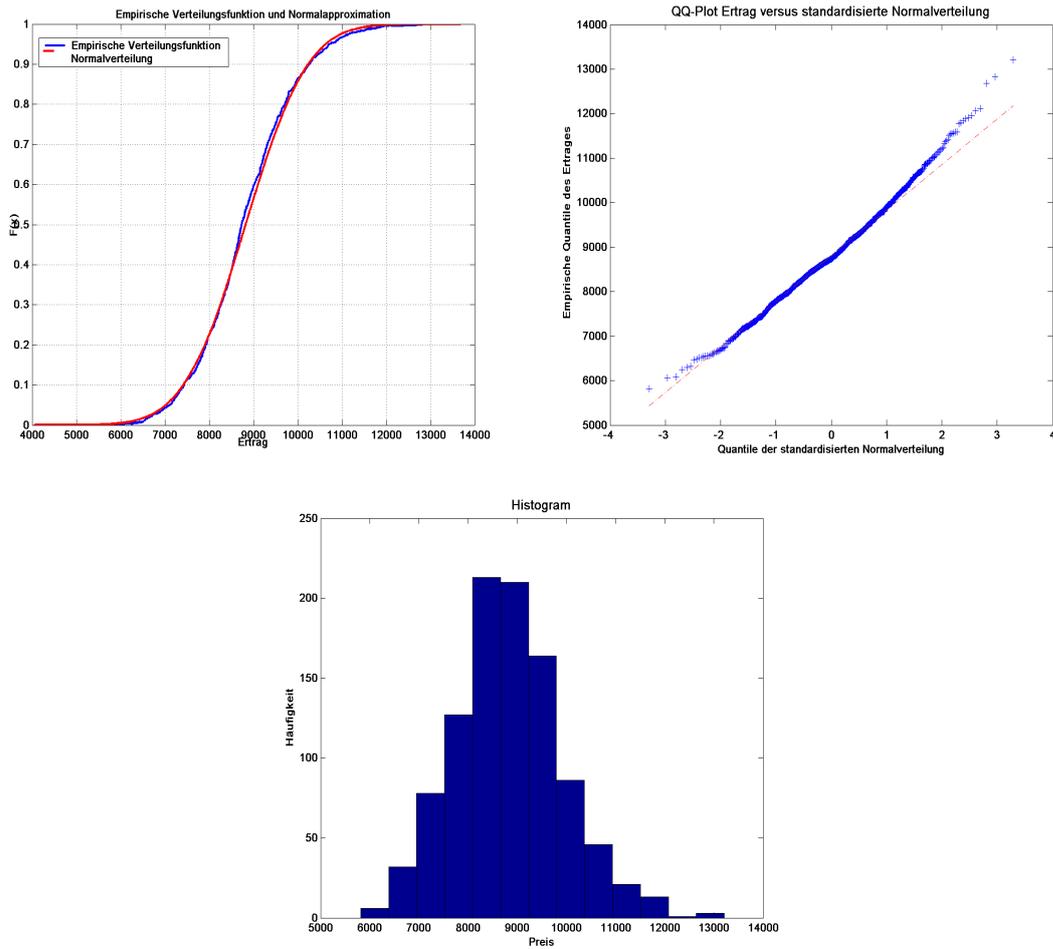


Abbildung 6.11: Die Verteilung des Preises bei 1000 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm)

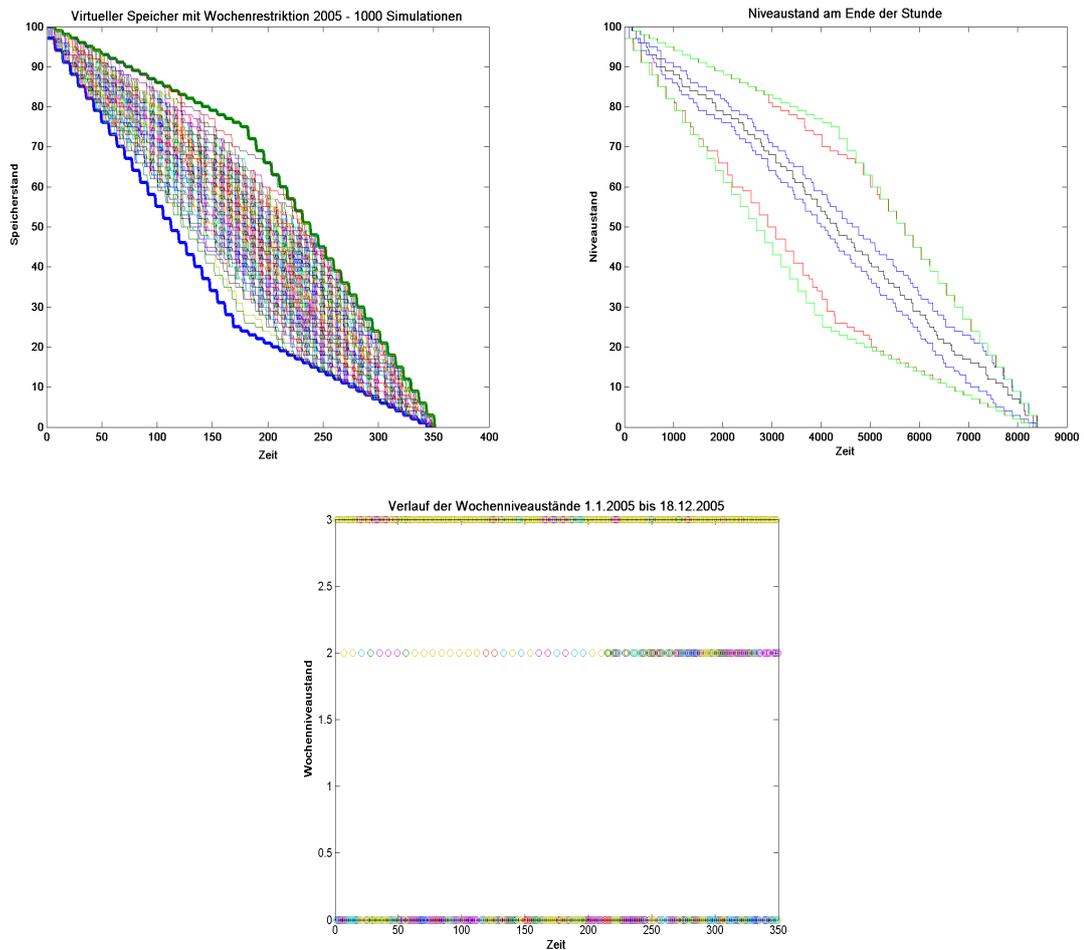


Abbildung 6.12: Der Verlauf des Gesamtniveaus (auf Stundenbasis) - links 1000 Simulationen, rechts untere, obere Schranke und Quartile bei 1000 Simulationen und unten der Verlauf der Wochenstände (auf Tagesbasis)

### 6.5.5 Das virtuelle Speicherkraftwerk mit Ausübungsverboten

Zum Abschluss erweitern wir das vorige Beispiel um Restriktionen an den Ausübungszeiten und führen die Möglichkeit einer Ausübungsverweigerung ein. Der Vertrag lautet wie folgt.

Der Vertragsinhaber darf  $P_0 = 100$  MWh in  $m = 1$  MWh Schritten abrufen. Maximaler Abruf pro Woche ist  $W_{\max} = 10$  MWh. Der Vertragspartner (Verkäufer) darf  $N = 0, \dots, 10$  Mal einen Abruf ablehnen. Zwischen zwei Abrufen müssen mindestens 3 Stunden liegen. Der Vertrag läuft über einen Zeitraum von einem Jahr (2005). Zur Bestimmung des Preises dieses Vertrages geht man ähnlich wie in den vorigen Beispielen vor. Nur müssen wir unseren Zustandsraum  $M_t^E$  um die verbleibende Zahl der Ausübungsverbote und die ersten aufgrund der Ausübung gesperrten Stunden erweitern. Da es keine Restriktionen bezüglich der Menge, die pro Stunde ausgeübt werden kann, gibt, wird die Strategie die Wahl jener Stunde sein, die den größten Preis hat. Hier wird die maximal oder minimal zulässige Menge abgerufen. Zurückzuführen ist dies auf die Struktur von  $H_K$  in der Approximation und der Ertragsfunktion. Daher ist auch die Restriktion, es darf nur in  $m = 1$  MWh Schritten abgerufen werden, hinfällig, da die Höhe der Ausübungsmenge sich sozusagen auf eine  $\{0, 1\}$ -Entscheidung reduzieren lässt. Entweder wird die Mindestmenge oder die maximal zulässige Menge bezogen. Konkret bedeutet dies in diesem Beispiel, entweder wird  $W_{\max} = 10$  MWh oder nichts bezogen. Aufgrund der Linearität der Ertragsfunktion können wir durch die Lösung dieses Problems den Preis für diese Vertragsart für  $P = 100c$  und  $W = 10c$  ebenfalls ermitteln uns zwar ist dieser das  $c$ -Fache des ursprünglichen Preises.

Im Gegensatz zu den vorigen Beispielen müssen wir uns noch überlegen, welche Bedeutung die Ausübungsverbote haben. Für den Vertragsverkäufer könnte diese Klausel z.B. wichtig sein, weil er den Strom bei sehr hohen Preisen selbst für sich in Anspruch nehmen möchte. Für den Vertragsinhaber könnte dies attraktiv sein, weil der Preis des Vertrages dadurch geringer werden muss und man dennoch erwarten kann, einen guten Ertrag daraus zu erzielen, wenn man die Kapazitäten am Markt verkaufen will. Daher kann dieser Vertrag über ein Minimierungs- und Maximierungsproblem beschrieben werden.

Bevor wir mit der Einbettung dieses Problems in unsere mathematische Umgebung beginnen, sind noch die Sperren zwischen zwei Ausübungen zu berücksichtigen. Dazu müssen wir für das Optimierungsproblem die Zustandsvariable  $U_t$  einführen, um die Information zu erhalten, zu welcher Stunde am Vortag ausgeübt wurde, damit die entsprechenden ersten Stunden des aktuellen Tages für eine Ausübung gesperrt werden, falls sie in der Sperrzeit liegen.

Schlussendlich erhalten wir einen vierdimensionalen Zustandsraum  $(P_t, W_t, N_t, U_t)$ , der neben der stochastischen Einflussgröße eine wesentliche Rolle in der Preisfestsetzung spielt. Der Preis lautet somit

$$V_{\text{Swing}}(P_0, W_0, N_0, U_0, X_0) = \inf_{A=\{A_1, \dots, A_T\}} \sup_{Y=\{Y_1, \dots, Y_T\}} \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{t=1}^T \beta^t Y(t)' (S_t(X^t) - K) \mid X_0 \right]$$

unter

$$\begin{aligned} 0 \leq M_t \leq 100, 0 \leq W_t \leq W_{\max} = 10, \\ 0 \leq N_t \leq N_{\max} = 10, 0 \leq U_t \leq U_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Bei diesem Problem haben wir eine zweidimensionale Strategie, einerseits das optimale Setzen von Ausübungsverboten ( $A$ ) und andererseits die optimale Ausübung der Energiemengen ( $Y$ ), wobei diese von den Ausübungsverboten abhängt. Zunächst ermitteln wir die notwendigen Werkzeuge zur Bestimmung und Lösung des Problems.

1. Zunächst benötigen wir für die Zustandsvariable  $M_t^{A,Y}$  alle zulässigen Werte

$$M_t^E = (P_t^E, W_t^E, N_t^E, U_t^E)$$

und den Messraum  $(M_t^E, \mathcal{M}_t^E)$ . Diesmal ist es ausreichend für  $P_t^E, W_t^E, N_t^E$  und  $U_t^E$  zu fordern, dass  $P_t^E = \{0, \dots, 100\}$ ,  $W_t^E = \{0, \dots, 10\}$ ,  $N_t^E = \{0, \dots, 10\}$  und  $U_t^E = \{0, \dots, 3\}$ . Der Messraum entsteht durch die entsprechende Bildung von Potenzmengen.

2. Der stochastische Einfluss ist nach wie vor  $X_t$  mit Messraum  $(X_t, \mathcal{F}_t)$  und

$$(Z_t^E, \mathcal{Z}_t^E) = (M_t^E \times \mathbb{R}^{136}, \mathcal{M}_t^E \times \mathcal{F}_t)$$

3. Für die Ausübungsmenge ist der Bereich

$$Y_t^E = \{Y \in \mathbb{R}_+^{24} \mid \sum_{h=1}^{24} Y_t(h) \leq W_{\max}\}$$

zu definieren und für die Ausübungsverbote

$$A_t^E = \{A_t \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq A_t \leq N_{\max}\}.$$

4. Die zulässigen Ausübungsverbote lassen sich durch die mengenwertige Funktion

$$\Gamma_t^A(P_t, W_t, N_t, U_t, X^t) = \{0, \dots, \min\{N_t, 24\}\}$$

und die zulässige Ausübungsmenge durch

$$\Gamma_t^Y(P_t, W_t, N_t, U_t, X^t, A_t) = \{Y \in G^Y(A_t, U_t) \mid Y' \mathbf{1}_{24} \in [0, \min\{M_t, W_t, KW(t)\}]\}$$

beschreiben, wobei

$$G^Y(A_t, U_t) = \left\{ \begin{array}{l} Y \in \mathbb{R}_+^{24}, Y_1 = \dots = Y_{\min\{U_t, 24\}} = 0 \quad \text{zusätzlich} \\ \text{wenn } n = \min\{A_t, 24 - U_t\} > 0 : \\ Y(U_t + j_1) = \dots = Y(U_t + j_n) = 0, \text{ wobei} \\ S_t(U_t + j_1) \geq \dots \geq S_t(U_t + j_n) \geq S_t(h) \text{ und } h \notin \{U_t + j_1, \dots, U_t + j_n\} \end{array} \right\}$$

und

$$KW(t) = \left\lceil \frac{T-t}{7} \right\rceil W_{\max}.$$

5. Die Ertragsfunktion hat für alle  $t \in \mathcal{T}$  die Form

$$f_t(M_t, X^t, A_t, Y_t) = Y_t(A_t)' S_t(X^t).$$

6. Abschließend müssen wir den Verlauf des Zustandsvektors  $M_t^{A,Y}$  beschreiben.

$$\begin{aligned}
 P_0^{A,Y} &= P_0, \\
 P_{t+1}^{A,Y} &= g_{t+1}^P(P_t^{A,Y}, A_t, Y_t, X^{t+1}) = \max\{P_t^{A,Y} - Y_t' \mathbf{1}_{24}, \text{KW}(t+1)\}, \\
 W_0^{A,Y} &= W_{\max}, \\
 W_{t+1}^{A,Y} &= g_{t+1}^W(W_t^{A,Y}, A_t, Y_t, X^{t+1}) = \max\{W_t^{A,Y} - Y_t' \mathbf{1}_{24} + I(t+1), W_{\max}\}, \\
 N_0^{A,Y} &= N_{\max}, \\
 N_{t+1}^{A,Y} &= g_{t+1}^N(N_t^{A,Y}, A_t, Y_t, X^{t+1}) = \max\{N_t^{A,Y} - A_t, 0\}, \\
 U_0^{A,Y} &= 0, \\
 U_{t+1}^{A,Y} &= g_{t+1}^U(U_t^{A,Y}, A_t, Y_t, X^{t+1}) = \max\{U_{\max} + \max\{h | Y_t(h) > 0\} - 24, 0\} \begin{matrix} U_t - 24, & \text{falls } U_t > 24 \\ & \text{sonst.} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

mit

$$I(t+1) = W_{\max}, \text{ falls } t \text{ der Beginn einer Woche ist,}$$

**Bemerkung 16.** Bei der Veränderung des Niveaustandes ist zu bemerken, dass bei diesem Vertrag keine Forderung besteht, dass die Kapazität vollständig verbraucht werden muss. Hat man nun überschüssige Kapazität angesammelt, die man nicht mehr verbrauchen kann, so verfällt sie einfach. Daher  $P_{t+1}^{A,Y} = \max\{P_t^{A,Y} - Y_t' \mathbf{1}_{24}, \text{KW}(t+1)\}$ . Analog gilt dies für den Wochenverbrauch. Hat man am Ende der Woche noch Kapazitäten frei, werden diese als ungültig erachtet und somit steht am Anfang der nächsten Woche nur die maximale Wochenmenge von  $W_{\max}$  wieder zur Verfügung.

Nun können wir das Problem (6.3) folgendermaßen definieren

$$\inf_{A \in \Upsilon_1(Z_0)} \sup_{Y \in \Upsilon_2(Z_0)} V_0(A, Y, Z_0) \quad (6.29)$$

unter

$$\begin{aligned}
 M_{t+1}^{A,Y}(X^{t+1}) &= g_{t+1}(M_t^{A,Y}(X^t), A_t(X^t), Y_t(X^t), X^{t+1}), \\
 A_t(X^t) &\in \Gamma_t^A(M_t^Y(X^t), X^t) \text{ und} \\
 Y_t(X^t) &\in \Gamma_t^Y(M_t^Y(X^t), X^t, A_t) \text{ und} \\
 (M_0, X_0) &\mathcal{Z}_0\text{-messbar,}
 \end{aligned} \quad (6.30)$$

wobei  $\Upsilon_1(Z_0)$  und  $\Upsilon_2(Z_0)$  die Menge der zulässigen Strategien  $A$  bzw.  $Y$  sind.

Nachdem das Problem spezifiziert wurde, kann man auch hier den Algorithmus nach Abschnitt 6.4 anwenden. Nur haben wir neben der Maximierungs- auch eine Minimierungskomponente zu berücksichtigen. Der Algorithmus ist folgendermaßen zu adaptieren.

### Preisapproximation

Zunächst führt man  $J$  Preissimulationen für den entsprechenden Zeitraum durch und beginnt mit dem Ende der Laufzeit  $t = T$ .

Für  $t = T$ :

Bestimme für alle Simulationen  $j = 1, \dots, J$  und Kombinationen  $M_t = (P, W, N, U) \in M_t^E$

$$CF_t^T(P, W, N, U, \omega_j, t) = \inf_{A_t \in \Gamma_t^A(M, W, N, U, \omega_j)} \sup_{Y_t \in \Gamma_t^Y(M, W, N, U, \omega_j, A_t)} Y_t' S_t(\omega_j).$$

Lösung:

1. Sortiere absteigend  $S = (S_t(U + 1), \dots, S_t(24))$  und bezeichne die Folge mit  $\hat{S} = (\hat{S}(1), \dots, \hat{S}(24 - U))$ . Dann erhält man als Lösung
2.  $CF_t^T(P, W, N, U, \omega_j, t) = (\min\{P, W, KW(t)\}(\hat{S}(N + 1) - K))_+$ .

Anschließend werden die Cash-Flows für alle Simulationen und  $M_t = (P, W, N, U) \in M_t^E$  diskontiert

$$ECF_{t-1}^T(P, W, N, U, \omega_j) = \beta CF_t^T(P, W, N, U, \omega_j, t)$$

und zur Approximation der bedingten Erwartung der diskontierten Wertefunktion

$$H(M_t, \omega, t - 1) = \mathbb{E}_Q[\beta V_t^*(M_t, X^t) | X^{t-1}]$$

durch die Funktion

$$\begin{aligned} H_K(M, \omega, t - 1) = & a_{N,U,t-1}^0 + \sum_{i=1}^{24} a_{N,U,t-1}^i S_{t-1}^i(X^{t-1}) + \sum_{i=25}^{48} a_{N,U,t-1}^i S_{t-1}^i(X^{t-1})P + \\ & \sum_{i=49}^{72} a_{N,U,t-1}^i S_{t-1}^i(X^{t-1})W \end{aligned} \quad (6.31)$$

herangezogen, wobei die Koeffizienten  $a_{t-1} \in \mathbb{R}^K$  mit  $K = 73(N_{\max} + 1)(U_{\max} + 1)$  durch die Kleinste-Quadrate-Methode bestimmt werden, d.h.

$$\min_{a_{t-1} \in \mathbb{R}^K} \sum_{j=1}^J \sum_{P,W,N,U} (ECF_{t-1}^T(P, W, N, U, \omega_j) - H_K(P, W, N, U, \omega, t - 1))^2.$$

Für  $t = T - 1, \dots, 1$ :

Bestimme für alle Simulationen  $j = 1, \dots, J$  und Kombinationen  $M_t = (P, W, N, U) \in M_t^E$  die Werte  $\tilde{A}_t$  und  $\tilde{Y}(t) = \hat{Y}(t, \tilde{A}_t)$ , sodass

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(P, W, N, U, \omega_j) = & \inf_{A_t \in \Gamma_t^A(P, W, N, U, \omega_j)} \sup_{Y_t \in \Gamma_t^Y(P, W, N, U, \omega_j, A_t)} Y_t'(S_t(\omega_j) - K) + \\ & \tilde{H}_K(P_{t+1}^{A,Y}(P), W_{t+1}^{A,Y}(W), N_{t+1}^{A,Y}(N), U_{t+1}^{A,Y}(U), \omega_j, t) \end{aligned}$$

gilt. Anschließend ermittle den optimalen diskontieren, summierten Cashflow für alle Simulationen  $\omega_j$  und Kombinationen  $M_t = (P, W, N, U) \in M_t^E$ :

$$\begin{aligned} ECF_{t-1}^T(P, W, N, U, \omega_j) = & \beta \tilde{Y}(t)(S_t(\omega_j) - K) + \\ & \beta ECF_t^T(P_{t+1}^{A,Y}(P), W_{t+1}^{A,Y}(W), N_{t+1}^{A,Y}(N), U_{t+1}^{A,Y}(U), \omega_j) \end{aligned}$$

und approximiere die bedingte Erwartung der diskontierten Wertefunktion

$$H(M, \omega, t - 1) = E_Q[\beta V_t^*(M_t, X^t) | X^{t-1}]$$

wie zuvor und gehe zu  $t = t - 1$  über. Ist man bei  $t = 1$  angelangt, dann erhält man den Preis diese Vertrages zum Zeitpunkt 0 durch

$$V^*(Z_0) \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J ECF_0^T(P_0, W_0, N_0, U_0, \omega_j).$$

## Ergebnisse

Zur Berechnung des Preises dieser Vertragsform haben wir  $J = 500$  Simulationen herangezogen und wie bereits erwähnt  $N_{\max} = 10$  Ausübungsverbote vorgegeben, sowie einen maximalen Abruf pro Woche von  $W_{\max} = 10$  MWh. Über das Jahr darf der Kunde maximal  $P = 100$  MWh verbrauchen und es wird kein Ausübungspreis verlangt ( $K=0$ ). Weiters wird gefordert, dass zwischen zwei Abrufen mindestens drei Stunden liegen müssen. Da jedoch keine Stundenrestriktionen vorliegen, verläuft die optimale Strategie in der Form, dass bei Ausübung nur jene Stunde am Tag ausgeübt wird, die den höchsten Preis besitzt und dann wird die maximal zulässige Menge ausgeübt. Daher ist es notwendig, die Zustandsvariable  $U_t$  einzuführen, die die Information liefert, welche Anfangsstunden am Tag  $t$  für eine etwaige Ausübung gesperrt sind, z.B. wenn am Tag  $t - 1$  bei Stunde 23 ausgeübt wird, darf man am Tag  $t$  die Stunden 1 und 2 nicht ausüben. Nach Anwendung des Algorithmus im Abschnitt 6.4 erhält man als Preis Euro 10.792,10.

In Tabelle 6.4 ist der Preis in Abhängigkeit von der Gesamtausübungsmenge  $P_0$  aufgelistet. Man sieht wie im ersten Beispiel, je höher die Gesamtausübungsmenge ist, desto geringer wird der Preis pro Megawattstunde. Je mehr Menge man zur Ausübung zur Verfügung hat, desto *weniger sparsam* muss man sozusagen mit der Ausübung umgehen. In der Tabelle 6.5 ist der Preis in Abhängigkeit von der Anzahl der Ausübungsverbote aufgelistet. Je geringer die Anzahl ist, desto höher wird der Preis. Das Gewähren von zehn Ausübungsverböten bewirkt eine Verringerung des Preises (pro Megawattstunde) von ca. Euro 40. Das sind ca. 27%. In Abbildung 6.14 ist die Entwicklung abhängig von der Gesamtausübungsmenge grafisch dargestellt sowie in Abhängigkeit von den Ausübungsverböten bei einer Gesamtausübungsmenge von  $P_0 = 100$  MWh.

In Abbildung 6.13 (links) sieht man die empirische Verteilung des Preises für die Kombination  $P_0 = 100$ ,  $W_{\max} = 10$ ,  $N_{\max} = 10$  und  $U_{\max} = 3$  zusammen mit der entsprechenden Normalverteilung, rechts den entsprechenden QQ-Plot, sowie unterhalb das Histogramm. Eine leichte Linksschiefe liegt vor.

Abschließend betrachten wir die Verläufe der einzelnen Zustände  $P_t$ ,  $W_t$ ,  $N_t$  und  $U_t$ . Bereits in den ersten 50 Tagen werden bis zur Hälfte der Gesamtausübungsmenge abgerufen. In ganz extremen Fällen kommt es erst am Ende der Laufzeit zur ersten Ausübung. Die obere Schranke der 500 Simulationen ist ca. bis zum Tag  $t = 310$  bei 100 MWh. Die Wochenstände nehmen nur die Werte 0 und  $W_{\max}$  an. Dies ist auf die Struktur von  $H_K$  (siehe (6.31)) und der Ertragsfunktion zurückzuführen. Der Verlauf der verbleibenden Ausübungsverböte besitzt eine große

Bandbreite. Bei einigen Preiskonstellationen werden die Ausübungsverbote viel schneller ausgesprochen. Die untere Grenze bei 500 Simulationen liegt bereits bei 0 um den Tag 10 herum. Die obere Grenze bleibt bis zum Tag  $t = 225$  bei 10. Danach beginnt sie sich zu reduzieren. Es zeigt sich, dass nicht alle Ausübungsverbote in Anspruch genommen werden (Obergrenze am Ende der Laufzeit ist 1).

Bei der Anzahl der ersten gesperrten Stunden sind, wie zu erwarten, größtenteils keine Stunden zu berücksichtigen, da bei einer Ausübung meist eine Stunde in den Onpeak-Zeiten herangezogen wird. Am Ende der Laufzeit, das sind die Monate November und Dezember, kommt es relativ selten vor, dass mindestens eine Stunde gesperrt werden muss, d.h. dass am Vortag eine Stunde in der Nacht ausgeübt wird.

$P_0$	Preis/ $P_0$	$P_0$	Preis/ $P_0$
10	159.2	60	116.4
20	146.5	70	114.9
30	133.6	80	112.5
40	125.4	90	109.8
50	118.9	100	107.9

Tabelle 6.4: Preis der Swing-Option in Abhängigkeit von der Gesamtausübungsmenge

N	Preis/ $P_0$	N	Preis/ $P_0$
0	147.1	6	116.7
1	145.4	7	114.6
2	133.6	8	112.5
3	127.6	9	110.2
4	123.1	10	107.9
5	119.7		

Tabelle 6.5: Preis/ $P_0$  der Swing-Option in Abhängigkeit von der Zahl der Ausübungsverbote

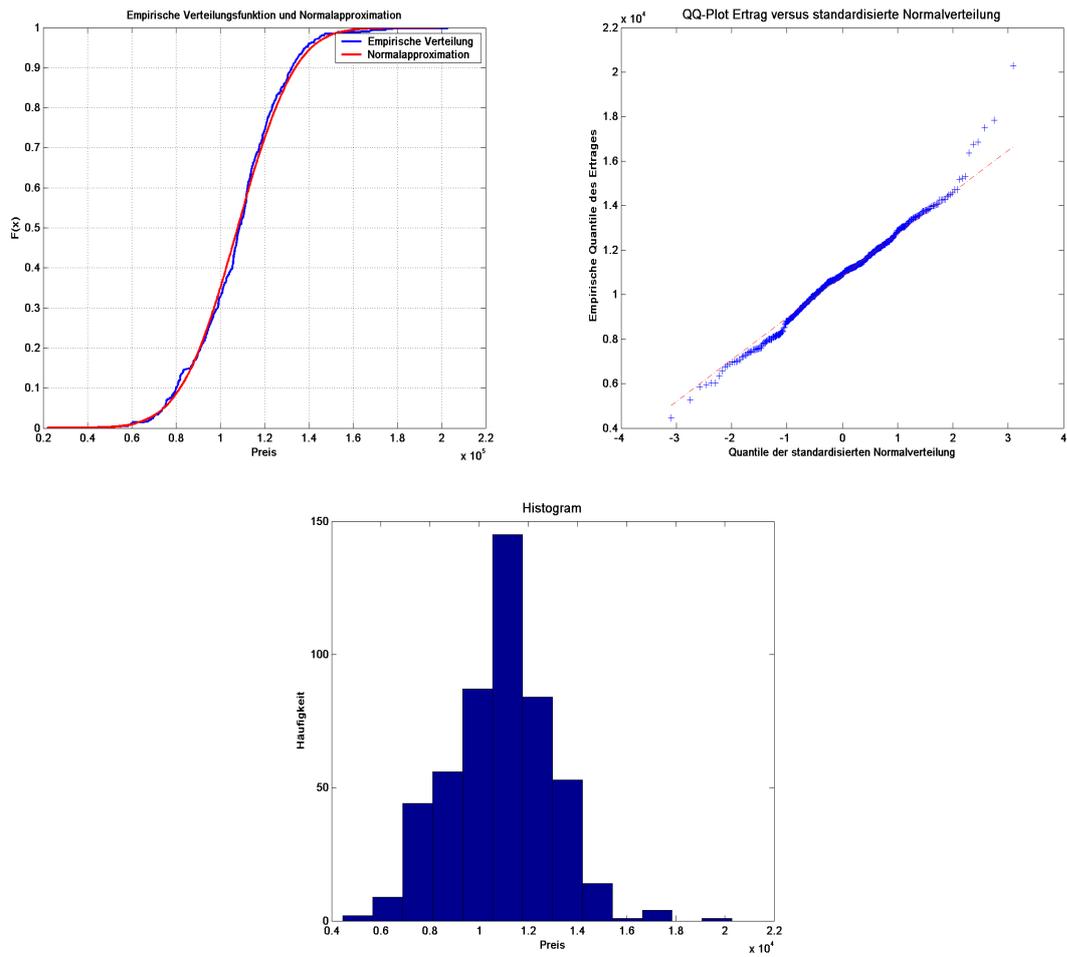


Abbildung 6.13: Die Verteilung des Preises bei 500 Simulationen (links empirische Verteilungsfunktion, rechts QQ-Plot und unten Histogramm)

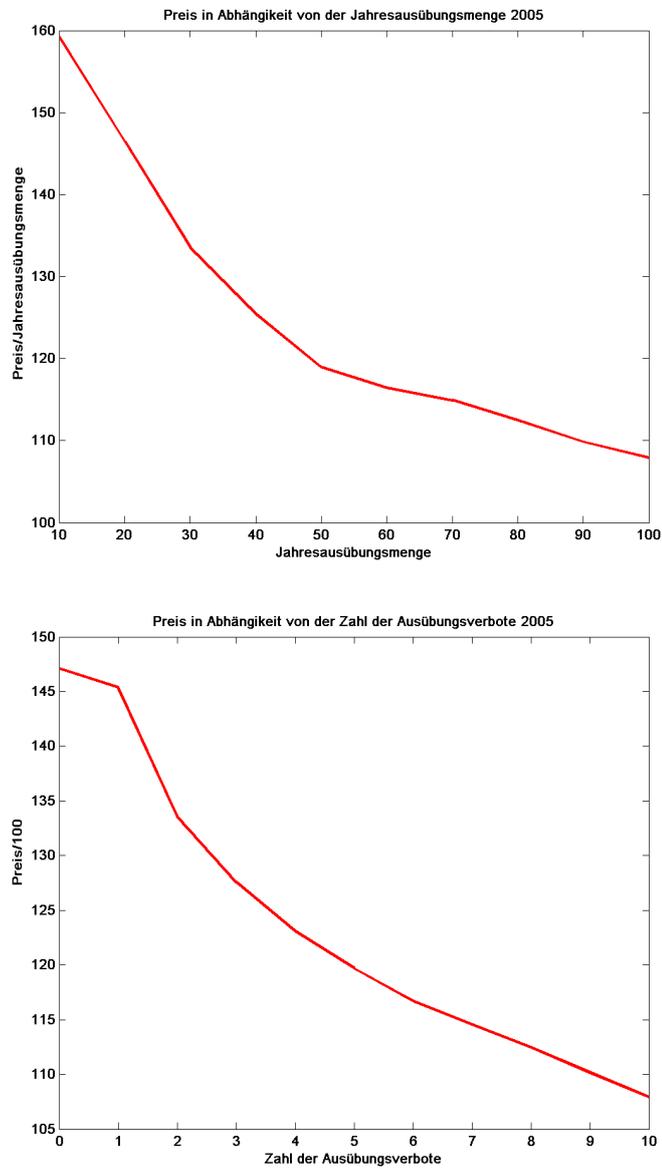


Abbildung 6.14: Der Preis in Abhängigkeit von der Ausübungsmenge und den Ausübungsverboten

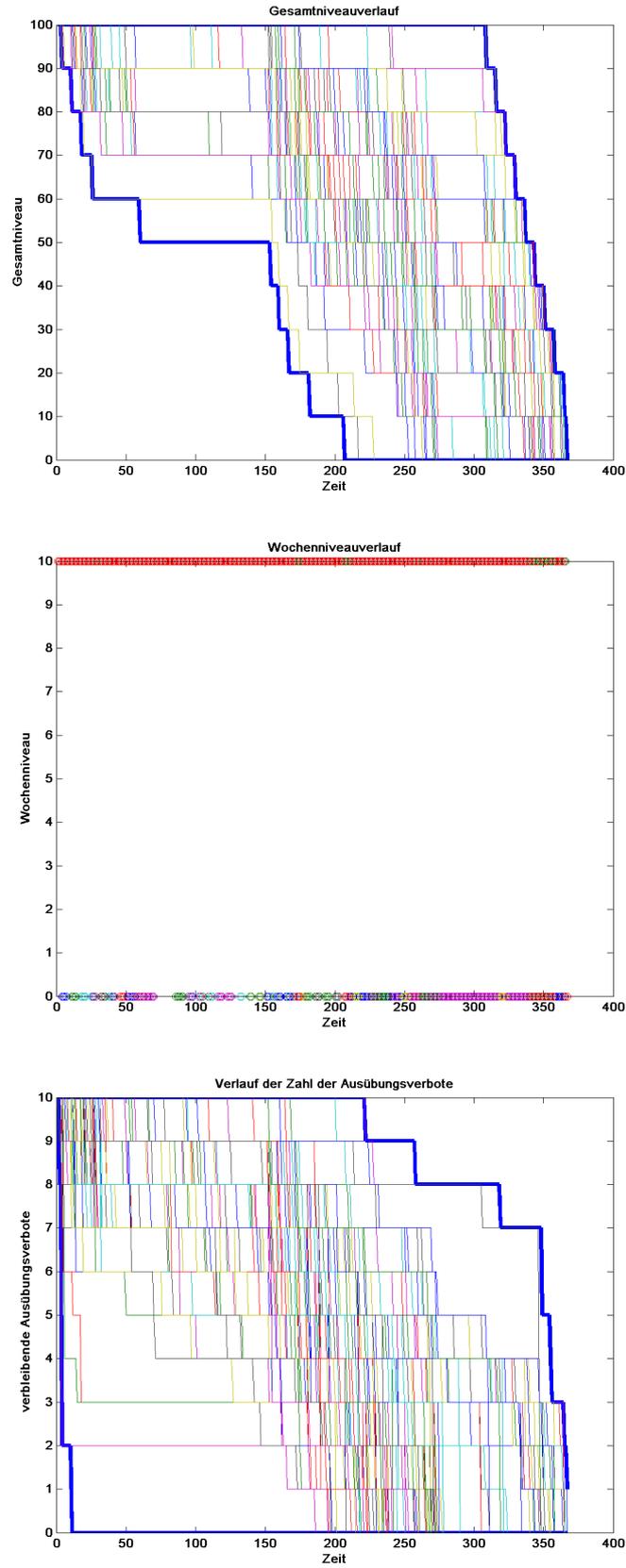


Abbildung 6.15: Die Verläufe der Zustände  $P_t$ ,  $W_t$  und  $N_t$

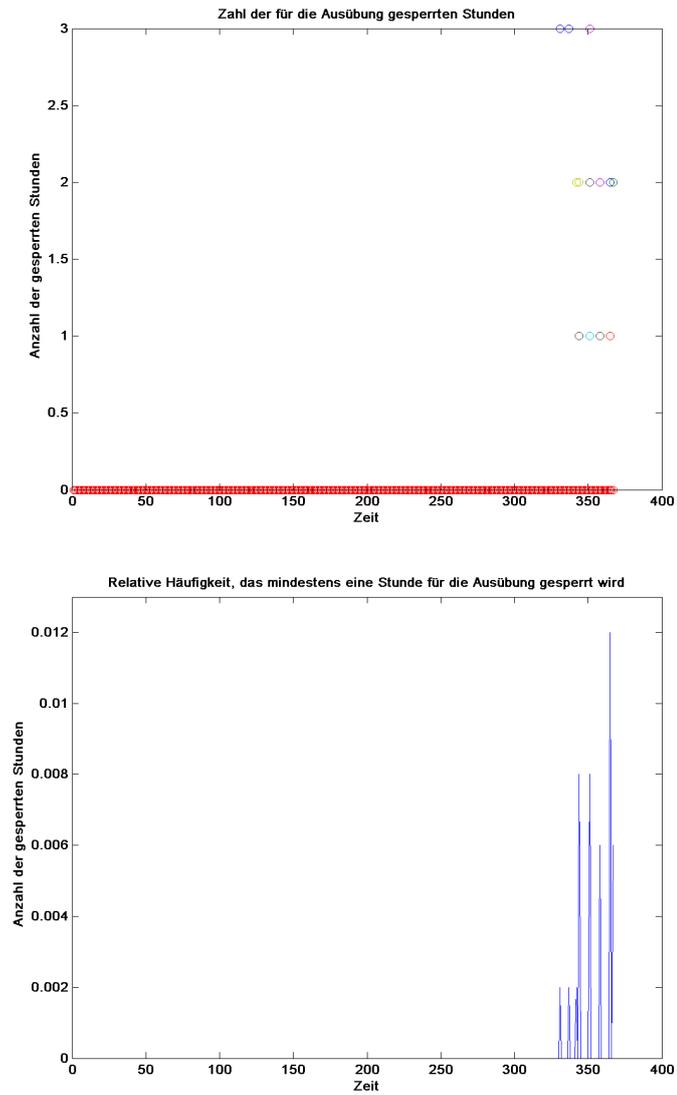


Abbildung 6.16: Der Verlauf des Zustandes  $U_t$



## **Anhang A**

# **Komponenten der Nachfrage- und Angebotsseite**

**Arbeitstag**

Monat	1		2		3		4		5		6	
	% der Varianz	% Kumul.										
1	83,90	83,90	78,44	78,44	71,78	71,78	82,48	82,48	50,58	50,58	72,41	72,41
2	9,60	93,50	15,77	94,20	20,51	92,30	11,23	93,71	24,30	74,88	16,72	89,12
3	2,95	96,45	2,49	96,70	3,40	95,70	2,53	96,24	7,79	82,67	4,85	93,98
4	2,02	98,47	1,30	98,00	1,23	96,93	1,27	97,51	6,46	89,13	2,63	96,61
5	0,50	98,97	0,67	98,67	1,00	97,93	0,80	98,31	3,56	92,69	1,29	97,90
6	0,31	99,28	0,42	99,09	0,73	98,66	0,78	99,09	2,43	95,12	0,62	98,52
7	0,21	99,49	0,22	99,31	0,41	99,07	0,26	99,35	1,36	96,48	0,52	99,04
8	0,11	99,60	0,15	99,46	0,21	99,27	0,15	99,50	1,23	97,71	0,24	99,28
9	0,10	99,69	0,12	99,58	0,18	99,45	0,11	99,61	0,55	98,26	0,13	99,41
10	0,07	99,76	0,09	99,67	0,12	99,57	0,09	99,70	0,42	98,68	0,10	99,50

Monat	7		8		9		10		11		12	
	% der Varianz	% Kumul.										
1	81,04	81,04	70,19	70,19	82,78	82,78	77,92	77,92	80,89	80,89	79,17	79,17
2	12,00	93,03	18,81	89,00	11,80	94,58	12,30	90,22	13,20	94,08	16,38	95,55
3	2,44	95,47	4,28	93,28	1,83	96,41	4,71	94,93	3,09	97,17	2,14	97,68
4	1,55	97,02	2,25	95,53	1,21	97,62	2,44	97,37	0,93	98,10	1,21	98,89
5	0,95	97,97	1,42	96,96	0,98	98,60	1,20	98,57	0,59	98,70	0,33	99,22
6	0,49	98,46	0,83	97,79	0,65	99,25	0,39	98,96	0,43	99,12	0,28	99,50
7	0,39	98,85	0,46	98,25	0,18	99,43	0,31	99,28	0,17	99,29	0,13	99,63
8	0,26	99,11	0,39	98,64	0,15	99,58	0,19	99,47	0,15	99,44	0,12	99,75
9	0,16	99,28	0,31	98,95	0,11	99,69	0,15	99,62	0,12	99,56	0,07	99,82
10	0,13	99,41	0,22	99,17	0,07	99,76	0,08	99,71	0,10	99,67	0,04	99,86

Tabelle A.1: Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - Bedarf Arbeitstag

**Nichtarbeitstag**

Monat	1 und 2		3		4		5		6		7	
	% der Varianz	% Kumul.										
1	79,23	79,23	79,06	79,06	70,80	70,80	88,65	88,65	90,53	90,53	91,80	91,80
2	14,52	93,75	13,41	92,47	22,30	93,11	6,63	95,27	4,49	95,02	6,28	98,08
3	2,83	96,58	3,90	96,36	4,62	97,72	3,29	98,57	3,32	98,34	0,67	98,75
4	1,90	98,49	2,19	98,56	0,63	98,35	0,76	99,32	0,64	98,98	0,38	99,13
5	0,42	98,91	0,51	99,06	0,60	98,95	0,28	99,60	0,41	99,39	0,28	99,42
6	0,38	99,29	0,28	99,34	0,36	99,31	0,13	99,73	0,22	99,61	0,18	99,60
7	0,20	99,49	0,27	99,61	0,29	99,59	0,08	99,81	0,13	99,74	0,16	99,76
8	0,15	99,64	0,17	99,78	0,15	99,75	0,06	99,87	0,11	99,85	0,10	99,86
9	0,14	99,78	0,08	99,86	0,10	99,85	0,03	99,90	0,05	99,90	0,05	99,91
10	0,06	99,84	0,05	99,91	0,04	99,89	0,02	99,92	0,03	99,93	0,03	99,94

Monat	8		9		10		11		12	
	% der Varianz	% Kumul.								
1	93,67	93,67	79,61	79,61	72,57	72,57	73,97	73,97	75,39	75,39
2	2,83	96,49	17,42	97,03	16,40	88,97	21,25	95,22	12,70	88,09
3	2,41	98,90	1,57	98,60	5,41	94,37	2,10	97,31	8,16	96,25
4	0,42	99,32	0,55	99,16	3,23	97,60	1,36	98,67	1,64	97,89
5	0,21	99,53	0,29	99,45	1,55	99,15	0,48	99,16	0,67	98,55
6	0,15	99,67	0,27	99,73	0,38	99,53	0,39	99,54	0,45	99,01
7	0,14	99,81	0,07	99,80	0,20	99,73	0,18	99,72	0,35	99,36
8	0,05	99,87	0,06	99,85	0,07	99,80	0,07	99,79	0,20	99,56
9	0,03	99,90	0,05	99,90	0,06	99,86	0,06	99,85	0,16	99,71
10	0,03	99,93	0,03	99,93	0,04	99,90	0,05	99,90	0,12	99,83

Tabelle A.2: Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz - Bedarf Nichtarbeitstag

Arbeitstag

Monat	1		2		3		4		5		6	
Komponente	% der Varianz	% Kumul.										
1	62,79	62,79	80,93	80,93	70,42	70,42	54,47	54,47	41,39	41,39	49,24	49,24
2	25,58	88,37	8,90	89,83	14,17	84,58	21,29	75,76	35,20	76,59	26,44	75,68
3	3,28	91,65	2,43	92,26	6,69	91,27	10,64	86,40	7,23	83,82	8,53	84,22
4	2,12	93,78	1,98	94,24	1,78	93,05	2,70	89,10	3,08	86,90	5,44	89,66
5	1,43	95,20	1,25	95,49	1,46	94,52	2,33	91,43	2,87	89,77	2,76	92,41
6	1,14	96,34	0,90	96,39	1,05	95,57	1,65	93,08	2,03	91,80	1,55	93,96
7	0,75	97,09	0,67	97,05	0,83	96,40	1,10	94,18	1,43	93,23	1,13	95,09
8	0,52	97,60	0,54	97,60	0,69	97,09	0,90	95,08	1,23	94,46	0,90	95,99
9	0,47	98,07	0,43	98,02	0,47	97,56	0,82	95,90	1,04	95,50	0,68	96,67
10	0,35	98,42	0,36	98,38	0,38	97,94	0,71	96,61	0,75	96,25	0,65	97,32

Monat	7		8		9		10		11		12	
Komponente	% der Varianz	% Kumul.										
1	60,60	60,60	62,83	62,83	57,02	57,02	53,62	53,62	72,96	72,96	79,95	79,95
2	18,84	79,43	23,37	86,20	13,68	70,70	22,48	76,10	12,31	85,27	9,00	88,95
3	7,15	86,59	3,51	89,70	8,14	78,84	6,23	82,33	3,94	89,22	3,44	92,39
4	3,31	89,90	2,28	91,98	5,31	84,15	4,27	86,60	1,97	91,19	2,10	94,50
5	2,83	92,73	2,14	94,12	3,34	87,49	2,54	89,14	1,59	92,78	1,16	95,65
6	1,19	93,92	1,33	95,45	2,82	90,31	1,78	90,92	1,22	94,00	0,80	96,45
7	1,05	94,97	0,76	96,21	1,89	92,21	1,57	92,49	0,97	94,97	0,62	97,07
8	0,94	95,91	0,61	96,82	1,47	93,68	1,27	93,76	0,86	95,83	0,52	97,59
9	0,67	96,57	0,55	97,37	0,95	94,63	1,18	94,95	0,71	96,54	0,46	98,04
10	0,62	97,20	0,43	97,81	0,91	95,54	0,96	95,91	0,58	97,12	0,36	98,40

Tabelle A.3: Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz -  $B_t$  Arbeitstag

Nichtarbeitstag

Monat	1 und 2		3		4		5		6		7	
Komponente	% der Varianz	% Kumul.										
1	68,43	68,43	82,17	82,17	81,02	81,02	73,04	73,04	81,58	81,58	75,41	75,41
2	14,53	82,96	7,68	89,85	7,76	88,78	9,94	82,99	10,76	92,34	14,21	89,62
3	9,54	92,50	4,32	94,17	4,22	92,99	8,28	91,27	2,77	95,11	4,24	93,86
4	2,35	94,85	1,86	96,02	2,11	95,10	4,15	95,42	1,67	96,78	1,85	95,71
5	1,42	96,27	1,66	97,69	1,21	96,31	1,48	96,90	0,99	97,77	1,44	97,15
6	0,85	97,12	0,63	98,32	0,97	97,27	0,84	97,74	0,73	98,50	0,66	97,81
7	0,72	97,85	0,35	98,67	0,64	97,92	0,58	98,32	0,55	99,04	0,60	98,41
8	0,62	98,47	0,26	98,93	0,61	98,52	0,49	98,81	0,21	99,25	0,47	98,87
9	0,36	98,83	0,23	99,16	0,42	98,94	0,29	99,10	0,16	99,41	0,32	99,19
10	0,28	99,11	0,19	99,35	0,27	99,21	0,22	99,32	0,13	99,54	0,23	99,41

Monat	8		9		10		11		12	
Komponente	% der Varianz	% Kumul.								
1	79,54	79,54	64,55	64,55	69,61	69,61	84,67	84,67	74,81	74,81
2	14,62	94,16	19,62	84,17	11,99	81,61	5,65	90,32	9,48	84,29
3	2,64	96,80	5,42	89,59	10,05	91,66	4,25	94,57	5,02	89,31
4	1,30	98,10	3,34	92,94	2,67	94,33	1,95	96,52	3,96	93,26
5	0,60	98,70	1,78	94,71	1,51	95,83	1,09	97,61	2,02	95,29
6	0,39	99,09	1,42	96,13	1,05	96,88	0,48	98,09	1,30	96,58
7	0,28	99,37	1,02	97,16	0,78	97,67	0,42	98,51	1,04	97,62
8	0,19	99,56	0,54	97,69	0,61	98,28	0,32	98,83	0,60	98,23
9	0,13	99,69	0,48	98,17	0,38	98,65	0,27	99,09	0,40	98,62
10	0,07	99,76	0,41	98,58	0,32	98,98	0,21	99,31	0,30	98,92

Tabelle A.4: Anteil der ersten 10 Hauptkomponenten an der Gesamtvarianz -  $B_t$  Nichtarbeitstag

Nichtarbeitstag

StdMonat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	127636,92	127636,92	107111,79	96159,93	90601,20	87171,43	83693,85	81312,20	89904,50	88686,07	105218,28	124229,86
2	139905,19	139905,19	118612,83	108263,38	87667,92	83804,86	80137,93	77595,67	85716,29	100498,29	116612,83	135727,95
3	135593,35	135593,35	113842,21	104426,14	77730,72	74083,50	70861,19	68820,40	75739,43	93798,21	111290,34	130728,76
4	109905,38	109905,38	93332,07	82379,31	61132,48	58769,71	56586,67	55368,53	60285,43	74046,21	88292,14	105979,90
5	99162,38	99162,38	83791,59	74325,66	56421,60	54761,64	53140,96	52568,80	56514,79	67993,07	81016,76	96358,14
6	98396,69	98396,69	84308,34	75579,03	57770,64	55379,57	53696,07	54579,80	59058,50	69495,29	82524,69	96345,29
7	88879,50	88879,50	79736,69	72381,03	60335,12	58561,93	55555,93	56317,27	60330,36	70863,64	79166,90	88128,95
8	93412,88	93412,88	84475,93	78110,97	69327,92	66960,21	62588,44	63360,47	67130,86	77898,07	84985,24	93963,14
9	100203,19	100203,19	91572,28	85607,45	78007,12	75200,93	70007,19	70814,27	75355,64	85424,07	92523,93	101463,48
10	106574,27	106574,27	97117,31	91664,76	84223,36	81928,21	76590,52	77171,47	82324,43	91498,71	98478,21	107788,62
11	110487,81	110487,81	99834,34	94779,03	87351,84	85158,50	79919,63	80618,60	85949,93	94691,21	101600,69	111506,05
12	113324,42	113324,42	101672,07	97332,97	89603,92	87533,07	82265,93	82608,93	88249,86	96842,29	104130,76	113937,33
13	110178,65	110178,65	98323,45	94481,03	87638,72	85844,50	80406,67	80732,60	85675,21	93997,71	101230,83	111246,71
14	104437,19	104437,19	92207,66	89088,90	82920,56	81646,43	76412,81	76674,60	80850,64	88229,93	95780,48	105899,14
15	101208,00	101208,00	87966,41	84824,90	79004,64	77939,57	73107,26	73618,00	77162,71	83952,86	92325,66	103658,38
16	100219,12	100219,12	85780,97	82168,55	76730,16	75654,43	71249,63	71921,93	75313,64	81959,79	92441,17	104602,71
17	104632,85	104632,85	86903,66	81506,90	75717,28	74690,86	70550,74	71095,93	75065,64	82973,79	99446,97	110583,14
18	112989,38	112989,38	90973,17	81736,97	75014,72	73480,21	69017,41	69629,60	74810,64	87137,21	106569,17	114571,38
19	115437,50	115437,50	99654,28	83508,21	75387,84	73060,71	68731,85	68799,67	77589,86	94587,57	106477,03	112854,10
20	113790,15	113790,15	102345,17	88402,69	76477,68	73512,64	69713,11	69967,80	83507,93	96587,14	103920,62	109456,90
21	108076,27	108076,27	97887,52	92270,07	79382,48	74572,21	71308,07	73697,60	82623,50	91373,71	98094,76	104243,81
22	124156,46	124156,46	114459,17	104989,66	77955,84	75456,86	72134,81	71268,07	75989,14	100667,29	111890,41	120902,48
23	146432,27	146432,27	127732,69	116343,03	99486,32	96457,00	92528,30	89635,40	100018,71	111731,07	129267,86	143266,71
24	140258,15	140258,15	118749,93	108032,55	87860,64	84248,07	80799,04	77861,53	88690,50	102238,79	120458,21	137471,24

Tabelle A.5: Ergebnisse des mittleren Bedarfs für  $L_t$  und Nichtarbeitstag

Arbeitstag

StdMonat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	138189,97	128004,07	111937,16	101188,16	92739,19	90317,02	85397,70	82927,56	91843,03	92381,88	114202,62	131916,20
2	153535,78	142593,87	126577,34	116679,21	90378,97	87265,74	82103,27	79353,52	87928,48	108154,22	127894,79	146313,45
3	139012,89	128541,87	113096,25	104059,25	80393,62	77662,30	72986,85	70549,71	78270,90	94846,58	113275,21	131264,47
4	114118,89	105144,17	91241,97	82970,20	64055,24	62385,66	59353,48	57678,92	63164,45	75199,82	91595,93	107428,24
5	106323,38	98878,07	86406,50	78059,21	60952,65	59983,91	57804,88	56509,68	61239,19	71984,25	87674,79	101028,67
6	114386,15	108177,10	96822,19	88090,56	69018,38	67151,15	64486,09	64184,35	70915,32	82834,34	98100,33	109691,02
7	123579,45	118919,90	109581,72	102753,34	85618,00	83473,15	78940,42	77701,65	88098,81	102918,71	113321,93	120376,47
8	141654,22	134648,13	124897,13	118981,57	106210,11	104231,83	98198,03	95805,11	107525,94	121628,18	130713,84	138900,43
9	152565,48	144882,60	135527,66	130299,87	118509,84	116784,85	110604,00	108135,24	118971,58	131849,69	141098,39	150097,14
10	156072,34	148046,43	138960,25	134331,11	123877,89	122657,02	117149,55	114352,76	123413,19	135336,34	144349,57	153685,80
11	156513,85	148590,10	139990,91	135662,92	126186,59	125268,17	120162,06	117327,40	125051,29	136222,65	145084,75	154187,73
12	156651,72	148352,90	140316,94	136317,93	127847,03	126936,64	121707,42	118955,90	126113,52	136659,66	145882,16	154608,67
13	154327,63	145617,57	138366,69	134668,66	127083,89	125670,21	120185,52	117471,17	124293,00	134667,85	144071,87	152544,82
14	149982,89	140893,23	133679,06	130451,48	124101,73	122669,28	116766,52	114235,30	120739,90	130551,54	140227,61	148863,69
15	146072,65	135907,43	128363,50	125551,02	119759,62	118272,77	112599,55	110006,13	116053,71	125767,02	136740,59	145814,00
16	143980,37	132529,60	124795,44	121407,51	115612,97	113985,74	108728,18	106381,27	111907,29	121561,72	135427,28	146094,98
17	146458,22	131731,40	122693,63	117462,36	111374,05	109975,49	104603,55	102247,97	108263,29	118941,82	139689,25	149961,69
18	151770,65	138491,93	124330,91	115145,64	107713,78	106173,32	100767,70	98419,71	105714,90	120119,20	143197,34	150602,35
19	147155,48	139145,83	128920,34	111469,28	102189,19	99725,96	94239,24	91981,75	103056,65	122133,32	137601,70	144673,69
20	137553,88	130319,77	124200,34	109989,31	96797,84	93165,66	87804,70	86951,14	102938,97	117556,89	127417,61	135013,80
21	126141,51	119615,20	113933,59	108774,72	95003,89	89421,91	84219,09	86186,29	97015,23	107061,75	116110,69	124157,57
22	139944,18	133113,60	124631,72	118951,97	91200,81	88293,19	82999,76	81422,67	87343,13	113549,75	128010,46	137320,75
23	158653,97	150314,87	136922,81	125916,56	109393,68	106798,85	100784,27	97548,70	108298,61	120030,37	141899,18	155374,35
24	152053,20	142459,90	127043,31	115974,13	95323,03	92687,28	86932,03	84138,25	95127,06	108475,42	131684,59	147667,45

Tabelle A.6: Ergebnisse des mittleren Bedarfs für  $L_t$  und Arbeitstag

Nichtarbeitstag

Monat	1			2			3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	9978,71	831,00	-1555,02	9978,71	831,00	-1555,02	10865,25	796,58	3053,59
2	12193,73	17,20	-2101,41	12193,73	17,20	-2101,41	13243,23	-1351,83	2541,18
3	7185,85	7676,55	-1029,32	7185,85	7676,55	-1029,32	7322,43	6136,66	1070,08
4	5952,78	6836,09	-1066,71	5952,78	6836,09	-1066,71	1578,92	6389,08	3390,37
5	5796,80	4775,38	-1225,68	5796,80	4775,38	-1225,68	4127,06	4050,79	2380,07
6	6390,78	2480,10	-1365,74	6390,78	2480,10	-1365,74	6217,64	1577,74	2100,34
7	7237,94	-1143,80	-1798,43	7237,94	-1143,80	-1798,43	5673,39	-1278,96	2456,21
8	8203,36	-2194,57	-1910,84	8203,36	-2194,57	-1910,84	7257,86	-2709,84	1514,81
9	10122,01	-4204,91	-2024,86	10122,01	-4204,91	-2024,86	9246,94	-4403,17	1299,93
10	11072,96	-5141,44	-1680,12	11072,96	-5141,44	-1680,12	10319,40	-4788,06	607,55
11	10607,13	-4068,71	-849,28	10607,13	-4068,71	-849,28	10081,63	-3426,54	-53,36
12	10107,71	-3092,76	61,91	10107,71	-3092,76	61,91	9978,93	-2546,75	-793,70
13	9822,74	-2763,94	986,83	9822,74	-2763,94	986,83	9651,24	-2319,38	-919,14
14	9532,52	-2431,29	1851,93	9532,52	-2431,29	1851,93	9202,05	-1959,26	-1015,62
15	9959,93	-1777,39	2596,80	9959,93	-1777,39	2596,80	9025,19	-1678,48	-1397,96
16	9922,47	-1354,73	2889,61	9922,47	-1354,73	2889,61	9126,83	-1365,56	-1443,37
17	9586,92	-282,34	3097,28	9586,92	-282,34	3097,28	9478,13	-732,53	-1547,96
18	8621,05	1391,42	1711,32	8621,05	1391,42	1711,32	9537,40	1393,30	-1880,80
19	6267,57	2548,77	533,56	6267,57	2548,77	533,56	8659,94	3042,74	-3020,26
20	5037,39	3427,82	387,77	5037,39	3427,82	387,77	6052,18	3726,35	-2822,88
21	4750,65	3789,25	495,21	4750,65	3789,25	495,21	4256,52	3735,20	-1932,91
22	5844,72	4053,74	1083,96	5844,72	4053,74	1083,96	5756,68	4198,62	-1047,13
23	5921,28	3609,16	530,90	5921,28	3609,16	530,90	7604,72	4584,16	-539,56
24	6257,27	4503,20	549,18	6257,27	4503,20	549,18	8302,46	5125,33	66,48

Arbeitstag

Monat	1			2			3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	6198,75	4244,16	96,37	6893,66	4469,47	-463,05	7004,12	5319,25	-604,17
2	7104,36	4492,86	225,58	8191,45	5009,04	-476,58	6467,90	5117,83	-373,40
3	7623,98	4607,06	573,71	8474,86	4976,80	-564,21	5910,76	4757,77	98,14
4	6790,41	4062,34	766,49	7011,29	4321,81	-573,29	5132,78	4270,01	107,22
5	5882,53	3637,18	514,64	5788,71	3742,39	-529,92	4681,83	4023,17	206,26
6	6054,56	3007,11	-152,31	5358,72	3217,57	-284,18	4475,72	3867,42	414,89
7	7477,62	1713,45	-1727,00	5348,43	2108,36	945,13	4331,26	2397,14	-111,56
8	8450,02	886,53	-2527,33	5723,57	768,62	1968,97	5225,37	861,83	-735,94
9	8558,16	-179,11	-2423,63	6142,93	-63,77	2530,90	5757,16	-227,40	-1374,52
10	8394,39	-717,30	-2279,42	6249,90	-604,63	2483,85	5725,64	-836,37	-1747,19
11	8163,54	-1106,98	-2096,50	6190,33	-855,56	2312,55	5647,61	-1373,10	-2027,73
12	8011,28	-1706,57	-1715,96	6210,38	-1335,90	1896,35	5503,46	-2030,47	-1884,65
13	8233,59	-2600,01	-1136,84	7020,87	-2415,73	832,47	6009,07	-2975,00	-1712,87
14	8599,39	-3387,82	-202,27	7630,96	-3932,98	-358,02	6352,46	-3753,54	-983,41
15	9177,20	-3355,75	882,99	7918,92	-4364,68	-1218,14	6422,42	-4163,31	-214,34
16	9438,39	-3492,83	1415,05	8159,69	-4655,91	-1411,75	6357,32	-4662,46	475,62
17	8542,53	-2801,47	1965,40	8117,43	-4665,00	-922,03	6592,59	-3967,58	760,96
18	8346,28	-1234,44	1177,79	7954,81	-3641,61	-294,78	6967,54	-2723,85	1238,83
19	8080,05	-677,09	1111,79	7111,44	-1506,71	-465,30	5875,94	-1057,43	2703,89
20	7390,36	-574,73	1200,86	6452,44	-586,08	-581,42	4312,51	-1128,49	2222,38
21	6754,61	-502,02	1450,41	5837,30	-380,83	-627,08	3812,14	-1328,51	1629,38
22	6831,97	40,14	1467,18	6870,83	573,00	-923,27	4987,17	-374,73	1428,22
23	5671,04	576,43	1327,26	5654,35	1036,03	-553,50	6656,74	877,16	1071,08
24	6013,83	1251,21	1486,40	6250,69	1943,51	-787,66	7393,08	1218,51	280,27

Tabelle A.7: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $L_t$

Nichtarbeitstag

Monat	4			5			6		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	8016,37	5869,65	-3388,54	558,12	3968,54	1860,66	1404,98	2431,85	2149,21
2	9751,93	3728,45	-4247,33	647,92	3543,27	1915,20	1497,97	2868,23	2334,79
3	3355,65	7819,45	-415,39	711,58	3047,74	1499,81	1294,57	2737,56	1776,28
4	3070,89	6898,74	-495,42	756,76	2522,50	1224,61	1166,39	2097,02	1153,17
5	3706,28	5880,61	-935,85	1259,50	2029,04	1167,14	1569,97	1588,22	824,25
6	5009,04	4466,78	-1399,30	3110,42	1969,11	1110,13	3159,52	1074,79	604,32
7	6589,49	225,72	-1457,13	6881,04	100,24	1096,94	6553,22	461,18	197,53
8	7805,46	-1817,16	-1354,74	10321,55	-594,87	1182,13	9825,39	-250,43	125,57
9	9951,34	-3395,49	-1933,95	12036,64	-684,43	1450,16	11518,93	-549,84	448,30
10	10840,85	-4043,81	-2034,79	12235,71	-534,09	1648,85	11969,47	-783,16	1269,35
11	10529,05	-3575,37	-860,11	11532,83	-313,73	829,36	11097,20	-760,39	953,93
12	10514,50	-3343,95	263,57	11034,30	-212,24	28,19	10343,15	-774,89	648,37
13	10423,48	-3400,54	569,18	11226,47	-210,02	-522,17	10324,91	-753,22	189,24
14	10155,38	-3260,15	1041,67	11055,12	-378,54	-698,17	9849,57	-415,14	-388,42
15	10204,15	-3092,71	1435,88	10682,77	-517,86	-717,96	9609,84	-259,15	-535,96
16	9801,22	-2805,15	1435,64	10192,04	-426,57	-610,60	9097,71	-106,87	-532,83
17	9186,68	-2393,10	1327,70	9187,96	-290,69	-537,65	8288,62	306,09	-370,81
18	7805,16	-1054,69	2293,45	7700,01	493,31	-2088,58	6910,55	800,83	-2382,77
19	6706,83	1131,15	3090,23	5139,30	1028,37	-2952,51	4737,26	1465,60	-2774,61
20	5701,50	3734,63	3421,84	2989,25	1988,82	-2611,77	2504,98	2255,97	-2515,40
21	3746,32	3748,10	3188,27	1084,48	3408,05	-2095,26	1105,42	2456,87	-1818,92
22	3968,53	4079,13	2325,31	1037,58	2293,66	-1233,22	588,05	2333,59	-940,09
23	5505,98	7205,19	1243,40	860,82	3596,80	-1088,88	532,09	1877,90	-364,26
24	6120,56	7705,89	1005,74	1052,96	3615,79	-461,20	882,13	1794,08	78,55

Arbeitstag

Monat	4			5			6		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	8107,44	-4179,59	230,82	-497,85	3266,70	-495,60	1803,82	3055,48	1541,82
2	7610,04	-3703,32	216,49	-467,03	3227,28	-240,66	2153,15	2950,61	1471,44
3	6930,73	-3165,05	20,18	-301,48	2599,36	-262,02	2220,83	2603,34	1153,36
4	6037,09	-2987,34	-182,89	-201,73	2115,01	-184,34	1866,37	2240,53	837,57
5	5632,01	-2973,21	-251,45	-204,08	1941,35	-131,28	1807,00	2112,19	770,77
6	5849,48	-2989,06	-269,39	33,71	1934,73	-154,83	1846,78	1969,66	400,75
7	5899,48	-1316,51	314,34	343,65	1592,51	271,78	2694,58	1859,50	-137,02
8	6042,13	-431,82	901,82	715,42	1205,81	720,34	3081,10	1742,71	-819,58
9	6327,70	-50,26	1420,31	1072,38	908,48	754,02	3433,30	1494,81	-1473,67
10	6473,32	331,98	1860,26	1523,17	763,59	1238,11	3746,54	1535,22	-1554,06
11	6602,15	765,28	2181,06	1875,01	506,58	1119,83	3891,09	1547,99	-1597,60
12	6554,81	946,69	2187,32	2077,80	425,13	1095,41	3848,10	1156,88	-1456,92
13	6696,34	1718,95	1615,06	2540,39	95,19	958,45	4117,81	350,11	-1023,96
14	6696,63	2860,75	1058,16	3282,89	8,68	533,35	4849,60	-952,76	-416,90
15	6673,87	3493,81	320,91	3915,55	-223,33	266,21	5071,80	-1428,16	225,18
16	7002,62	4057,20	-230,69	4025,00	-497,43	-28,45	5131,99	-1959,82	470,81
17	6894,79	3723,78	-581,51	3722,77	-426,79	78,81	5136,64	-1934,78	374,25
18	7183,26	3140,80	-824,82	2633,99	-170,80	-449,40	4908,11	-1616,77	590,87
19	7670,47	2782,02	-1303,54	1751,36	-327,74	-1621,27	4401,43	-1587,92	604,30
20	7717,91	1788,73	-2017,40	1672,44	-467,64	-1810,40	4281,03	-1196,58	423,14
21	5719,54	1078,06	-1758,97	2509,99	259,68	-1645,61	4132,88	-1110,55	472,80
22	6006,03	162,51	-1708,29	2371,10	67,99	-554,81	3503,31	-1091,19	416,60
23	8782,34	-1805,58	-1258,25	1931,93	1228,36	-326,53	2631,26	-685,23	677,50
24	9453,89	-2486,38	-865,87	1322,15	1595,45	-344,27	2083,61	-163,41	759,45

Tabelle A.8: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $L_t$

Nichtarbeitstag

Monat	7			8			9		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2351,35	1445,44	390,56	1012,21	2694,90	-132,48	7758,97	3469,87	1120,30
2	2493,49	1507,87	488,19	1303,20	2722,14	23,93	7018,61	2855,66	857,77
3	2124,95	1572,86	418,23	1263,14	2402,86	202,16	5934,96	2608,07	702,11
4	1722,87	1345,83	195,50	1179,35	1935,41	335,78	4818,95	2066,40	696,98
5	1916,59	1248,32	-111,36	1490,55	1676,02	255,06	4781,62	1562,77	776,10
6	2841,30	710,81	-270,07	2945,72	1432,30	199,15	5565,89	793,01	965,39
7	4904,71	366,14	-366,31	6023,39	893,31	-79,76	6005,45	-1926,29	905,37
8	6787,48	-249,95	-361,64	9007,41	286,84	-268,71	7598,69	-3463,23	1062,10
9	8338,15	-827,67	-322,31	10831,75	273,09	-631,67	8731,58	-4090,85	914,74
10	9449,42	-1154,48	-240,47	11817,68	403,58	-1039,06	9318,21	-4533,97	698,27
11	8841,58	-1049,93	67,80	11285,61	232,11	-713,58	8810,88	-3662,18	23,67
12	8224,26	-836,22	342,69	10593,20	-64,83	-585,07	8293,23	-2860,44	-532,13
13	7935,96	-489,92	406,47	10521,45	-484,48	-289,11	8070,49	-2759,72	-602,94
14	7265,71	20,82	380,36	10033,56	-710,33	90,21	7653,02	-2651,13	-518,67
15	7025,76	161,61	94,57	9585,12	-758,41	190,62	7475,65	-2506,31	-518,58
16	6946,52	311,60	-4,93	9070,20	-535,68	78,49	7388,07	-2368,36	-815,07
17	6510,49	544,55	-179,71	8450,35	-325,55	69,47	7327,72	-1790,81	-1059,80
18	4002,91	1354,05	-346,47	6456,14	-1107,61	1632,51	6712,32	924,53	-2014,10
19	2253,83	1805,39	-427,89	4371,04	-750,44	2192,51	6740,69	3006,58	-2503,49
20	963,36	2288,23	-713,83	2689,33	-216,94	2392,07	5947,49	4504,53	-1411,12
21	-68,24	2602,66	-1015,18	1098,35	296,46	2558,69	3831,31	3998,00	-75,70
22	54,37	2660,34	192,08	938,14	490,63	1960,37	3508,50	3283,12	-1,21
23	299,10	2182,64	859,74	839,36	589,61	1471,81	8252,82	6079,89	537,01
24	768,62	1584,33	865,71	1202,07	750,70	1104,21	8689,68	5661,38	693,89

Arbeitstag

Monat	7			8			9		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2300,90	2660,49	882,13	954,54	2753,56	1020,89	7164,29	-3963,66	-116,44
2	2361,01	2582,89	793,72	1061,18	2696,13	999,51	6251,13	-3354,45	-36,05
3	2389,58	2272,17	581,67	1267,52	2475,45	646,77	5494,86	-2684,85	0,70
4	2142,79	2007,90	425,48	1066,75	2100,37	557,86	4604,71	-2293,65	-131,48
5	2253,39	1928,85	337,15	1202,98	1993,75	388,58	4397,63	-2256,18	-115,77
6	2446,28	1823,36	95,10	1688,84	1904,86	-24,24	4865,70	-2272,15	-225,38
7	3570,26	1880,83	-141,25	2199,38	1603,80	-344,12	5365,60	-1506,79	562,96
8	3924,67	1493,68	-381,48	2430,99	1298,42	-530,17	6405,13	-1216,16	1238,55
9	3972,92	1156,31	-872,64	2768,36	1131,63	-1022,44	6426,45	-370,00	1705,24
10	3980,13	1022,29	-1201,98	2892,33	897,41	-1131,24	5837,08	366,10	1825,28
11	4205,15	846,20	-1115,82	2916,01	794,17	-1128,43	5601,28	901,00	1688,51
12	4551,71	335,42	-884,82	3121,46	516,80	-1055,54	5121,55	1416,33	1425,84
13	4802,88	-212,65	-724,16	3484,94	45,66	-647,19	5295,54	1898,52	862,53
14	5396,44	-1242,14	-391,16	3998,86	-904,47	-47,56	5710,08	3069,11	153,83
15	5552,60	-1724,36	-296,06	3984,60	-1542,23	436,34	5752,79	3474,67	-360,18
16	5634,85	-1971,48	4,99	4159,56	-1784,12	672,89	5799,86	3618,47	-695,36
17	5331,47	-1692,75	262,56	3945,56	-1461,68	845,00	5961,93	3418,41	-559,91
18	4607,27	-1086,32	753,65	3273,47	-999,51	550,67	6284,44	2860,00	-481,35
19	4077,80	-928,21	1181,10	3103,86	-666,71	320,53	7459,26	2331,28	-475,59
20	3594,70	-870,35	1031,00	3588,65	-389,46	-139,73	7625,83	974,14	-450,05
21	3330,63	-916,78	676,72	3757,26	-411,74	-197,03	5548,43	810,49	-1164,09
22	3809,60	-767,73	211,12	2479,79	-634,63	605,61	4767,30	484,35	-941,37
23	3521,53	-513,42	374,51	1883,11	-248,42	711,41	9186,18	-1901,35	-1202,56
24	2752,90	19,62	438,62	1520,24	193,63	679,96	8922,87	-2420,01	-1127,98

Tabelle A.9: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $L_t$

Nichtarbeitstag

Monat	10			11			12		
	Std/Faktor	1	2	3	1	2	3	1	2
1	5393,03	4625,88	-220,51	10125,48	3814,93	-2101,18	7694,88	3463,60	-3394,81
2	7236,96	3029,31	-1392,17	11639,21	2097,27	-2827,62	9750,10	2884,07	-4503,49
3	2346,86	5532,96	-5884,42	5681,44	8465,98	-725,35	4205,07	7818,70	-656,16
4	1622,26	4897,47	-2039,35	5528,21	7180,45	-492,89	3897,42	7080,89	-993,18
5	2429,44	4318,84	-243,56	5816,08	5174,99	-753,13	4270,10	5362,80	-1423,03
6	4647,88	3099,96	-2095,77	6482,09	2879,52	-948,92	5302,93	3330,79	-2217,50
7	6583,67	198,92	-368,84	7223,05	-1349,85	-1006,90	7383,23	-20,53	-2600,55
8	8735,71	-931,38	625,91	7954,16	-3004,62	-853,14	9098,95	-1240,30	-2716,76
9	10725,37	-2365,64	341,72	9362,64	-4700,84	-1111,35	11122,07	-2803,72	-3062,90
10	11492,70	-3062,07	-339,21	10196,80	-5132,85	-1217,49	11492,57	-3312,34	-2724,11
11	10468,44	-2546,72	-721,65	9375,40	-4201,87	-345,34	10305,17	-2609,51	-1062,97
12	9881,55	-2061,71	-853,62	8940,44	-3510,59	551,13	9420,63	-2004,03	113,22
13	9988,55	-2031,05	-1111,86	8854,31	-3557,96	993,27	9645,62	-2425,55	699,94
14	9664,32	-2099,87	-1036,48	8774,92	-3459,68	1072,83	9881,20	-2492,59	979,49
15	9106,25	-2152,70	-783,20	8713,63	-3314,45	1151,85	11083,54	-1465,17	894,68
16	8648,15	-1760,61	-202,40	8868,31	-2991,19	1235,29	11116,45	-1594,88	1648,04
17	8069,36	-998,68	1390,54	9002,14	-1529,07	1509,15	9989,70	-1615,54	2583,56
18	6596,27	1133,81	4576,29	7411,53	184,97	1451,13	9490,38	-694,04	3307,27
19	4908,14	2491,63	2955,14	5609,45	1935,80	1819,45	7587,58	740,82	4454,22
20	2928,78	2662,90	1168,76	4363,40	3407,83	1903,99	5841,61	2079,07	4992,67
21	1962,75	2789,16	682,25	3773,87	3933,44	1452,09	4858,66	2656,56	4480,63
22	2854,20	3586,19	1058,18	4937,21	4091,66	1074,46	4874,27	2249,63	3544,22
23	4564,76	6510,77	1975,87	6050,06	5241,48	1259,04	4200,30	3804,75	1703,93
24	4803,82	6714,23	1913,21	6673,18	5748,80	943,39	4059,76	4371,76	653,04

Arbeitstag

Monat	10			11			12		
	Std/Faktor	1	2	3	1	2	3	1	2
1	7891,37	-3495,50	233,23	9179,22	-4253,42	711,82	7133,05	6950,61	-1054,71
2	7106,07	-3038,59	238,31	9300,43	-3987,31	615,09	8297,64	7663,43	-738,61
3	6504,07	-2552,04	-24,80	9070,83	-3379,28	569,34	8326,47	7654,95	-155,98
4	5517,24	-2243,20	-281,15	8238,54	-3181,46	269,13	7272,44	6939,89	40,08
5	5611,53	-2309,88	-500,68	7110,97	-2921,89	30,88	6355,07	5775,90	-98,57
6	6103,15	-2376,56	-792,00	6467,48	-2457,59	-37,52	6734,47	4490,58	-272,51
7	4926,64	-1756,50	-281,93	5434,34	-1579,58	-194,93	8657,63	1011,08	-1213,19
8	4701,23	-1219,47	706,24	5804,72	-701,45	241,01	10303,12	-402,80	-1473,46
9	4667,92	-552,27	1623,76	5956,77	374,72	913,63	10518,64	-1087,78	-1548,49
10	4512,63	83,29	2349,16	5775,69	1237,81	1503,39	10072,52	-1629,23	-1677,33
11	4253,32	676,51	2520,06	5650,57	1814,28	1926,23	9730,28	-2338,99	-1919,18
12	4136,77	1300,44	2564,25	5257,60	2290,35	2111,50	9470,07	-2823,74	-1888,94
13	4330,22	1856,34	2493,20	5271,45	2996,14	2009,12	9512,44	-3557,40	-1370,74
14	4749,50	3063,54	1679,98	5403,89	3933,65	1124,84	10093,69	-4130,42	-600,00
15	4805,05	3589,51	875,51	5767,78	4424,44	668,99	10533,75	-4385,55	-220,62
16	4759,00	3929,35	96,83	6473,81	4818,20	327,83	10863,68	-4789,12	73,45
17	5519,69	3741,90	-1391,38	6822,21	3724,71	-702,65	10629,73	-3588,56	1326,86
18	6738,41	3354,86	-3087,16	6229,20	2284,84	-2046,21	9947,83	-2086,07	2027,29
19	6210,09	2061,67	-1579,38	6173,17	1716,56	-2368,94	9337,59	-1647,52	2224,19
20	4636,22	1347,08	-651,30	5837,76	1465,04	-2251,55	8526,82	-1014,73	2349,75
21	4140,46	1221,47	-477,33	5700,33	1139,02	-2175,13	7938,93	-572,91	2291,51
22	5322,73	613,89	-555,58	6033,99	988,45	-1429,95	7993,99	-92,70	1868,74
23	8893,25	-647,65	-912,78	7730,27	-401,48	-958,41	7049,89	2220,36	1817,62
24	8860,29	-1067,77	-530,21	8553,18	-1317,10	-581,13	6743,94	3669,83	1801,87

Tabelle A.10: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $L_t$

Nichtarbeitstag

StdlMonat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2,98	2,98	2,87	2,82	2,57	2,44	2,35	2,39	2,64	2,51	2,71	2,81
2	2,82	2,82	2,68	2,64	2,37	2,22	2,17	2,16	2,48	2,29	2,51	2,65
3	2,68	2,68	2,52	2,52	2,18	2,00	1,94	1,91	2,38	2,14	2,35	2,52
4	2,57	2,57	2,45	2,48	2,06	1,85	1,80	1,75	2,31	2,07	2,36	2,45
5	2,48	2,48	2,40	2,48	2,01	1,75	1,51	1,67	2,25	2,01	2,34	2,45
6	2,41	2,41	2,29	2,46	1,96	1,62	1,39	1,58	2,28	2,10	2,26	2,39
7	1,99	1,99	1,95	2,21	1,87	1,76	1,72	1,62	2,36	2,18	2,05	1,87
8	2,25	2,25	2,17	2,25	2,21	2,25	2,09	2,12	2,53	2,42	2,26	2,17
9	2,56	2,56	2,60	2,61	2,59	2,58	2,44	2,50	2,74	2,62	2,66	2,56
10	2,91	2,91	2,88	2,88	2,79	2,81	2,72	2,73	2,95	2,80	2,85	2,79
11	3,06	3,06	3,01	3,04	2,95	2,97	2,87	2,94	3,07	2,98	3,03	2,99
12	3,18	3,18	3,13	3,20	3,07	3,07	2,96	3,09	3,25	3,18	3,16	3,13
13	3,10	3,10	3,03	3,08	2,97	2,96	2,86	2,95	3,10	2,99	3,02	3,02
14	3,00	3,00	2,89	2,85	2,82	2,81	2,72	2,77	2,94	2,81	2,85	2,89
15	2,88	2,88	2,75	2,75	2,71	2,69	2,59	2,62	2,84	2,71	2,70	2,78
16	2,84	2,84	2,64	2,63	2,60	2,61	2,50	2,53	2,78	2,67	2,68	2,79
17	2,92	2,92	2,60	2,58	2,58	2,61	2,46	2,48	2,73	2,64	2,84	2,97
18	3,20	3,20	2,72	2,65	2,63	2,60	2,49	2,52	2,78	2,78	3,27	3,29
19	3,34	3,34	3,06	2,73	2,69	2,68	2,58	2,64	2,90	3,04	3,31	3,28
20	3,24	3,24	3,17	2,88	2,73	2,70	2,60	2,65	3,01	3,21	3,17	3,11
21	3,10	3,10	3,06	3,06	2,81	2,69	2,58	2,68	3,07	3,02	3,01	2,98
22	3,02	3,02	3,01	3,08	2,86	2,72	2,60	2,71	2,98	2,86	2,88	2,91
23	3,14	3,14	3,05	3,06	2,91	2,81	2,72	2,74	2,92	2,82	2,94	3,06
24	2,99	2,99	2,89	2,85	2,70	2,65	2,44	2,39	2,69	2,63	2,69	2,85

Tabelle A.11: Ergebnisse der mittleren Ausgangsbasis auf der Angebotsseite für  $B_t$  und Nichtarbeitstag

Arbeitstag

StdlMonat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,19	1,33	1,43	1,60	1,47	1,46	1,42	1,52	1,59	1,48	1,27	1,27
2	0,81	1,01	1,11	1,26	1,32	1,30	1,29	1,41	1,51	1,06	0,90	0,96
3	0,88	1,11	1,22	1,36	1,34	1,28	1,29	1,42	1,55	1,09	0,99	1,06
4	1,15	1,38	1,48	1,61	1,51	1,41	1,39	1,52	1,73	1,33	1,24	1,32
5	1,27	1,48	1,60	1,73	1,64	1,48	1,45	1,60	1,81	1,48	1,40	1,45
6	1,37	1,51	1,62	1,78	1,72	1,61	1,59	1,73	1,87	1,61	1,47	1,47
7	1,46	1,58	1,68	1,88	1,81	1,77	1,79	1,87	1,96	1,67	1,56	1,50
8	1,67	1,74	1,71	1,87	1,83	1,92	1,84	1,87	2,01	1,81	1,71	1,70
9	1,57	1,62	1,64	1,81	1,84	1,88	1,80	1,83	1,96	1,72	1,59	1,67
10	1,53	1,59	1,61	1,79	1,83	1,89	1,83	1,87	1,96	1,69	1,57	1,62
11	1,57	1,63	1,62	1,82	1,91	2,00	1,89	1,94	2,02	1,74	1,62	1,66
12	1,63	1,72	1,70	1,97	2,13	2,45	2,24	2,30	2,39	1,94	1,71	1,73
13	1,59	1,64	1,62	1,81	1,88	2,05	1,90	1,95	2,02	1,72	1,61	1,66
14	1,61	1,66	1,65	1,79	1,84	1,93	1,83	1,90	1,98	1,71	1,63	1,71
15	1,56	1,64	1,65	1,78	1,78	1,84	1,80	1,85	1,95	1,70	1,58	1,66
16	1,52	1,60	1,62	1,75	1,72	1,76	1,74	1,80	1,93	1,65	1,57	1,65
17	1,56	1,53	1,57	1,72	1,65	1,70	1,69	1,76	1,87	1,62	1,60	1,77
18	1,79	1,58	1,56	1,70	1,66	1,71	1,70	1,77	1,87	1,64	1,98	2,07
19	1,85	1,83	1,69	1,72	1,70	1,75	1,73	1,82	1,91	1,76	1,96	1,99
20	1,69	1,81	1,84	1,75	1,74	1,79	1,76	1,83	1,97	1,98	1,79	1,85
21	1,70	1,81	1,85	1,91	1,80	1,82	1,80	1,90	2,19	1,89	1,74	1,75
22	1,39	1,49	1,57	1,73	1,86	1,81	1,80	1,96	2,06	1,59	1,42	1,48
23	1,17	1,26	1,38	1,55	1,56	1,56	1,59	1,67	1,63	1,42	1,22	1,23
24	1,11	1,26	1,37	1,52	1,61	1,64	1,59	1,66	1,67	1,41	1,18	1,15

Tabelle A.12: Ergebnisse der mittleren Ausgangsbasis auf der Angebotsseite für  $B_t$  und Arbeitstag

Nichtarbeitstag

Monat	1			2			3		
Std/Faktor	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,214	0,151	0,075	0,214	0,151	0,075	0,226	0,050	0,031
2	0,267	0,184	-0,011	0,267	0,184	-0,011	0,295	0,077	-0,003
3	0,346	0,254	-0,089	0,346	0,254	-0,089	0,441	0,029	0,005
4	0,387	0,246	-0,106	0,387	0,246	-0,106	0,447	0,032	0,016
5	0,439	0,207	-0,147	0,439	0,207	-0,147	0,475	0,042	0,022
6	0,472	0,155	-0,115	0,472	0,155	-0,115	0,770	-0,271	0,164
7	0,795	-0,137	-0,194	0,795	-0,137	-0,194	0,974	-0,311	0,015
8	0,689	-0,238	-0,039	0,689	-0,238	-0,039	0,663	0,008	-0,312
9	0,596	-0,374	0,161	0,596	-0,374	0,161	0,469	0,096	-0,113
10	0,307	-0,077	0,119	0,307	-0,077	0,119	0,349	0,111	-0,029
11	0,238	-0,022	0,140	0,238	-0,022	0,140	0,223	0,127	-0,026
12	0,189	0,029	0,168	0,189	0,029	0,168	0,166	0,102	0,009
13	0,174	0,037	0,128	0,174	0,037	0,128	0,192	0,103	0,008
14	0,175	0,033	0,102	0,175	0,033	0,102	0,238	0,097	0,005
15	0,189	0,009	0,091	0,189	0,009	0,091	0,279	0,102	-0,037
16	0,182	0,033	0,076	0,182	0,033	0,076	0,367	0,088	0,000
17	0,131	0,072	0,111	0,131	0,072	0,111	0,361	0,107	-0,017
18	0,094	0,108	0,178	0,094	0,108	0,178	0,342	0,134	0,062
19	0,100	0,104	0,177	0,100	0,104	0,177	0,302	0,156	0,123
20	0,080	0,105	0,148	0,080	0,105	0,148	0,204	0,113	0,111
21	0,065	0,105	0,111	0,065	0,105	0,111	0,128	0,080	0,090
22	0,068	0,091	0,076	0,068	0,091	0,076	0,091	0,095	0,076
23	0,051	0,129	0,130	0,051	0,129	0,130	0,119	0,100	0,101
24	0,106	0,115	0,097	0,106	0,115	0,097	0,116	0,060	0,083

Arbeitstag

Monat	1			2			3		
Std/Faktor	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,250	-0,110	0,035	0,190	0,085	0,022	0,036	0,086	0,021
2	0,286	-0,239	0,029	0,160	0,133	0,026	0,025	0,159	-0,015
3	0,329	-0,330	-0,020	0,155	0,180	0,018	0,040	0,195	-0,032
4	0,332	-0,358	-0,048	0,167	0,182	0,001	0,062	0,208	-0,025
5	0,314	-0,353	-0,046	0,178	0,165	0,003	0,061	0,162	-0,009
6	0,230	-0,145	0,019	0,163	0,065	-0,005	0,068	0,075	0,041
7	0,199	-0,066	0,065	0,184	-0,031	-0,004	0,158	0,013	0,099
8	0,312	0,090	-0,069	0,263	-0,045	0,002	0,192	-0,032	0,047
9	0,321	0,099	-0,100	0,310	-0,021	-0,051	0,223	-0,024	-0,016
10	0,252	0,094	-0,023	0,312	-0,021	-0,049	0,230	-0,025	-0,051
11	0,256	0,096	0,015	0,300	-0,012	-0,060	0,217	-0,018	-0,070
12	0,290	0,132	0,006	0,304	-0,010	-0,069	0,184	-0,008	-0,087
13	0,281	0,140	0,000	0,284	-0,026	-0,057	0,228	-0,023	-0,055
14	0,246	0,138	-0,027	0,282	-0,037	-0,037	0,222	-0,019	-0,032
15	0,196	0,083	0,038	0,249	-0,039	0,008	0,222	-0,021	0,003
16	0,189	0,063	0,040	0,236	-0,034	0,016	0,211	-0,024	0,042
17	0,213	0,102	0,047	0,195	-0,041	0,013	0,202	-0,014	0,047
18	0,354	0,160	0,110	0,201	-0,059	0,048	0,200	-0,019	0,041
19	0,431	0,283	-0,141	0,268	-0,032	0,060	0,232	-0,016	-0,068
20	0,175	0,099	0,022	0,263	-0,024	0,052	0,226	-0,018	-0,084
21	0,210	0,084	0,097	0,217	-0,066	0,069	0,194	0,001	0,035
22	0,164	0,001	0,084	0,195	-0,035	0,045	0,185	0,006	0,081
23	0,190	0,028	0,064	0,220	-0,032	0,061	0,198	0,010	0,096
24	0,173	-0,046	0,058	0,168	0,004	0,011	0,138	0,058	0,060

Tabelle A.13: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $B_t$

Nichtarbeitstag

Monat	4			5			6		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,222	0,003	0,040	0,166	-0,079	0,096	0,229	0,130	-0,085
2	0,295	-0,012	0,053	0,205	-0,088	0,132	0,319	0,078	-0,130
3	0,360	-0,105	0,084	0,348	-0,120	0,096	0,541	0,011	-0,080
4	0,370	-0,162	0,110	0,383	-0,163	0,138	0,726	-0,053	-0,001
5	0,379	-0,193	0,091	0,461	-0,153	0,079	0,814	-0,125	0,034
6	0,410	-0,140	0,056	0,582	-0,064	0,076	1,082	-0,194	0,068
7	0,550	-0,183	-0,128	0,775	-0,138	-0,274	1,060	-0,141	0,080
8	0,535	-0,061	-0,252	0,630	0,069	-0,245	0,618	0,141	-0,090
9	0,484	0,125	-0,031	0,345	0,195	0,080	0,273	0,218	-0,163
10	0,353	0,125	-0,011	0,238	0,224	0,037	0,205	0,216	-0,005
11	0,261	0,041	-0,046	0,158	0,127	0,010	0,123	0,227	0,082
12	0,214	0,052	-0,031	0,154	0,099	0,026	0,092	0,223	0,122
13	0,202	0,042	-0,017	0,129	0,132	0,014	0,067	0,172	0,096
14	0,324	0,085	0,012	0,143	0,153	0,007	0,117	0,185	0,018
15	0,342	0,113	0,027	0,196	0,146	0,016	0,160	0,178	-0,039
16	0,387	0,108	0,041	0,270	0,157	0,072	0,205	0,198	-0,054
17	0,383	0,113	0,035	0,262	0,087	0,081	0,190	0,168	-0,035
18	0,306	0,128	0,034	0,204	0,073	0,058	0,167	0,148	-0,002
19	0,296	0,096	0,052	0,158	0,054	0,069	0,089	0,146	0,018
20	0,227	0,083	0,050	0,125	0,043	0,089	0,064	0,148	0,062
21	0,112	-0,016	0,022	0,080	0,016	0,070	0,057	0,144	0,060
22	0,067	0,003	0,030	0,065	-0,026	0,088	0,010	0,118	0,068
23	0,080	-0,003	0,051	0,075	-0,065	0,104	-0,017	0,114	0,147
24	0,111	-0,056	0,044	0,119	-0,052	0,120	0,072	0,142	0,092

Arbeitstag

Monat	4			5			6		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,060	0,091	0,024	0,130	-0,017	0,013	0,085	0,118	0,057
2	0,063	0,156	0,023	0,234	-0,042	-0,046	0,102	0,265	0,050
3	0,074	0,212	0,019	0,269	-0,046	-0,076	0,093	0,321	0,015
4	0,084	0,230	0,026	0,296	-0,055	-0,052	0,064	0,328	0,026
5	0,067	0,179	0,017	0,213	-0,087	0,019	0,042	0,318	-0,008
6	0,052	0,061	0,013	0,161	-0,033	0,081	0,027	0,190	-0,044
7	0,089	-0,021	0,072	0,094	0,032	0,077	0,059	0,031	0,052
8	0,139	-0,045	0,058	0,028	0,039	0,050	0,143	-0,021	0,073
9	0,180	-0,026	-0,027	0,065	0,135	0,003	0,150	-0,046	0,097
10	0,194	-0,011	-0,046	0,072	0,176	-0,028	0,178	-0,039	0,109
11	0,167	-0,002	-0,074	0,020	0,181	-0,044	0,295	-0,038	0,043
12	0,189	0,021	-0,153	-0,016	0,247	-0,064	0,537	-0,029	-0,232
13	0,180	-0,004	-0,098	0,009	0,179	-0,026	0,365	-0,047	-0,059
14	0,186	-0,020	-0,060	0,016	0,173	-0,017	0,261	-0,041	0,019
15	0,183	-0,030	-0,030	0,053	0,142	-0,014	0,226	-0,050	0,056
16	0,168	-0,036	-0,006	0,040	0,097	0,014	0,183	-0,042	0,092
17	0,161	-0,050	0,026	0,026	0,064	0,016	0,140	-0,031	0,066
18	0,139	-0,050	0,049	0,027	0,068	0,027	0,131	-0,019	0,049
19	0,134	-0,038	0,048	0,029	0,075	0,035	0,118	-0,020	0,046
20	0,132	-0,046	0,053	0,025	0,090	0,037	0,090	-0,023	0,046
21	0,121	-0,038	0,091	0,039	0,066	0,054	0,080	-0,029	0,048
22	0,162	-0,010	0,073	0,058	0,068	0,079	0,064	-0,030	0,069
23	0,147	-0,038	0,107	0,074	0,069	0,089	0,052	-0,035	0,091
24	0,106	-0,001	0,044	0,067	0,062	0,073	0,014	-0,026	0,105

Tabelle A.14: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $B_t$

Nichtarbeitstag

Monat	7			8			9		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,123	0,174	0,113	0,326	0,235	0,010	0,208	0,006	0,036
2	0,257	0,181	0,075	0,493	0,153	-0,033	0,215	-0,016	0,025
3	0,475	0,159	-0,027	0,799	-0,042	0,001	0,236	-0,063	0,010
4	0,514	0,127	-0,131	1,053	-0,294	0,047	0,231	-0,093	0,027
5	1,107	-0,269	0,087	1,121	-0,367	0,045	0,302	-0,177	0,095
6	1,251	-0,339	0,116	1,294	-0,344	0,081	0,320	-0,211	0,108
7	0,632	0,203	-0,319	1,285	-0,046	-0,108	0,286	-0,159	-0,018
8	0,508	0,178	-0,112	0,719	0,500	-0,333	0,273	-0,087	-0,058
9	0,269	0,253	-0,034	0,371	0,312	-0,034	0,298	-0,002	-0,085
10	0,207	0,190	0,049	0,301	0,257	0,011	0,233	0,036	-0,087
11	0,098	0,181	0,094	0,208	0,151	0,070	0,205	0,034	-0,078
12	0,058	0,163	0,090	0,190	0,140	0,088	0,154	0,022	-0,099
13	0,046	0,152	0,074	0,158	0,117	0,090	0,168	0,088	-0,051
14	0,111	0,141	0,024	0,164	0,179	0,059	0,205	0,081	-0,062
15	0,142	0,168	0,038	0,272	0,272	0,015	0,195	0,071	-0,037
16	0,127	0,207	0,072	0,268	0,290	0,045	0,199	0,085	-0,020
17	0,122	0,187	0,054	0,253	0,294	0,055	0,166	0,081	-0,009
18	0,100	0,187	0,052	0,256	0,288	0,053	0,149	0,089	-0,001
19	0,099	0,156	0,064	0,132	0,188	0,099	0,134	0,136	0,034
20	0,081	0,133	0,039	0,131	0,181	0,092	0,137	0,195	0,068
21	0,066	0,106	0,045	0,132	0,178	0,097	0,106	0,191	0,064
22	0,063	0,099	0,034	0,116	0,184	0,123	0,120	0,165	0,052
23	-0,028	0,058	0,088	0,077	0,121	0,127	0,127	0,159	0,070
24	0,041	0,164	0,110	0,186	0,245	0,192	0,160	0,103	0,074

Arbeitstag

Monat	7			8			9		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,128	0,068	0,037	0,185	-0,082	0,047	0,088	0,088	0,033
2	0,150	0,169	-0,005	0,222	-0,248	0,016	0,073	0,114	0,047
3	0,142	0,266	0,016	0,234	-0,270	-0,019	0,068	0,125	0,063
4	0,131	0,292	-0,003	0,242	-0,288	-0,038	0,057	0,121	0,065
5	0,123	0,277	0,007	0,266	-0,332	-0,014	0,053	0,107	0,070
6	0,099	0,168	-0,008	0,221	-0,199	0,035	0,077	0,040	0,040
7	0,124	0,051	0,066	0,179	-0,052	0,026	0,138	-0,034	0,029
8	0,212	0,026	0,073	0,183	0,018	0,068	0,171	-0,078	0,042
9	0,256	-0,064	0,067	0,223	0,094	0,020	0,166	-0,058	0,044
10	0,314	-0,073	0,059	0,267	0,112	-0,005	0,189	-0,041	0,026
11	0,334	-0,095	-0,064	0,297	0,103	-0,038	0,184	0,025	-0,024
12	0,537	-0,033	-0,244	0,475	0,138	-0,110	0,315	0,092	-0,165
13	0,342	-0,076	-0,047	0,308	0,108	-0,104	0,162	0,031	-0,039
14	0,259	-0,080	0,042	0,299	0,118	-0,066	0,134	0,007	-0,038
15	0,251	-0,083	0,086	0,258	0,112	-0,011	0,121	-0,037	-0,011
16	0,175	-0,061	0,093	0,214	0,096	0,023	0,114	-0,040	-0,005
17	0,149	-0,054	0,076	0,191	0,085	0,068	0,120	-0,048	0,003
18	0,117	-0,036	0,075	0,180	0,074	0,071	0,130	-0,044	0,004
19	0,108	-0,009	0,064	0,154	0,063	0,069	0,121	-0,059	-0,004
20	0,102	0,003	0,056	0,148	0,060	0,083	0,065	-0,060	0,028
21	0,116	0,019	0,050	0,187	0,060	0,068	0,134	-0,072	0,087
22	0,098	0,026	0,046	0,194	0,047	0,055	0,126	-0,054	0,033
23	0,083	0,005	0,042	0,156	0,045	0,055	0,130	-0,003	0,023
24	0,138	0,015	0,057	0,177	0,009	0,055	0,104	0,037	0,038

Tabelle A.15: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $B_t$

Nichtarbeitstag

Monat	10			11			12		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,247	-0,029	0,112	0,339	0,130	-0,057	0,290	0,168	0,070
2	0,345	-0,030	0,159	0,472	0,100	-0,176	0,349	0,141	0,023
3	0,416	-0,034	0,240	0,630	-0,046	-0,222	0,410	0,231	-0,154
4	0,481	-0,066	0,242	0,476	0,056	-0,162	0,403	0,199	-0,177
5	0,603	-0,192	0,124	0,546	0,003	-0,106	0,348	0,126	-0,083
6	0,587	-0,132	0,060	0,731	-0,107	-0,059	0,389	0,083	-0,125
7	0,638	-0,265	-0,323	1,036	-0,192	0,070	0,898	-0,190	-0,166
8	0,463	-0,020	-0,209	0,994	-0,216	0,094	0,721	-0,340	-0,002
9	0,324	0,118	-0,108	0,449	0,045	0,149	0,505	-0,133	0,049
10	0,297	0,143	-0,054	0,373	0,045	0,131	0,426	-0,080	0,098
11	0,251	0,161	-0,017	0,243	0,118	0,100	0,272	0,018	0,073
12	0,182	0,167	-0,010	0,181	0,139	0,105	0,218	0,074	0,083
13	0,196	0,184	-0,040	0,218	0,132	0,080	0,232	0,036	0,052
14	0,242	0,137	-0,072	0,304	0,085	0,107	0,260	0,000	0,072
15	0,242	0,125	-0,075	0,345	0,031	0,102	0,295	-0,028	0,062
16	0,285	0,087	-0,110	0,393	-0,007	0,080	0,317	-0,014	0,068
17	0,222	0,135	-0,063	0,360	0,098	0,019	0,267	0,009	0,097
18	0,134	0,195	0,043	0,233	0,134	0,056	0,267	0,067	0,151
19	0,137	0,209	0,096	0,199	0,140	0,058	0,254	0,080	0,158
20	0,157	0,139	0,023	0,152	0,172	0,028	0,205	0,083	0,099
21	0,159	0,126	0,029	0,157	0,124	0,010	0,192	0,073	0,058
22	0,122	0,081	0,029	0,242	0,110	-0,078	0,203	0,101	0,034
23	0,112	0,104	0,040	0,188	0,143	-0,074	0,180	0,153	0,075
24	0,163	0,066	0,026	0,320	0,172	-0,080	0,196	0,161	0,006

Arbeitstag

Monat	10			11			12		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,173	-0,074	0,041	0,284	-0,032	-0,010	0,091	0,137	0,030
2	0,264	-0,101	-0,016	0,387	-0,081	-0,005	0,084	0,158	-0,014
3	0,284	-0,165	-0,024	0,470	-0,148	-0,034	0,072	0,163	-0,043
4	0,287	-0,179	-0,017	0,480	-0,138	-0,002	0,069	0,190	-0,069
5	0,262	-0,120	0,004	0,367	-0,100	0,002	0,060	0,182	-0,055
6	0,153	-0,020	0,042	0,235	-0,037	-0,011	0,097	0,168	0,011
7	0,177	0,038	0,097	0,163	0,076	-0,013	0,146	0,162	0,039
8	0,122	0,092	0,025	0,134	0,055	0,053	0,247	0,130	0,064
9	0,138	0,114	-0,035	0,116	0,065	0,070	0,364	0,029	0,007
10	0,128	0,101	-0,045	0,109	0,059	0,072	0,341	0,005	-0,018
11	0,106	0,100	-0,090	0,144	0,086	0,041	0,374	-0,018	-0,042
12	0,153	0,060	-0,141	0,149	0,107	0,010	0,440	-0,042	-0,047
13	0,093	0,092	-0,062	0,142	0,088	0,040	0,353	-0,023	-0,077
14	0,112	0,116	-0,051	0,135	0,079	0,038	0,403	-0,023	-0,077
15	0,118	0,131	-0,025	0,117	0,072	0,077	0,380	-0,034	-0,060
16	0,115	0,125	0,034	0,119	0,059	0,080	0,384	-0,034	-0,071
17	0,108	0,117	0,049	0,122	0,069	0,049	0,485	-0,068	-0,048
18	0,112	0,134	0,061	0,229	0,219	-0,167	0,536	-0,060	0,169
19	0,112	0,156	0,055	0,195	0,161	-0,061	0,501	-0,048	0,108
20	0,107	0,069	0,001	0,140	0,087	0,010	0,424	-0,039	-0,019
21	0,080	0,049	0,060	0,123	0,074	0,032	0,149	0,045	0,108
22	0,105	0,030	0,060	0,148	0,040	0,030	0,088	0,092	0,018
23	0,103	-0,011	0,015	0,126	0,013	0,016	0,075	0,085	0,032
24	0,125	-0,033	0,019	0,162	0,015	-0,008	0,075	0,096	0,029

Tabelle A.16: Ergebnisse der Hauptkomponentengewichte für  $B_t$



# Literaturverzeichnis

- [1] M.T. Barlow, *A diffusion model for electricity prices*, *Mathematical Finance* (2002), no. 12, 287–298.
- [2] J. Bather, *Decision Theory: An Introduction to Dynamic Programming and Sequential Decisions*, Wiley, Chichester - New York - Weinheim - Brisbane - Singapore - Toronto, 2000.
- [3] M.W. Baxter and A.J.O. Rennie, *Financial Calculus, An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge, New York and Melbourne, 1996.
- [4] R. Bellmann, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton - New York, 1957.
- [5] D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis, *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific, Belmont, MA, 1996.
- [6] F. Black, *The pricing of commodity contracts*, *Journal of Financial Economics* **3** (1976), 167–179.
- [7] M. Burger, B. Klar, A. Müller, and G. Schindlmayr, *A spot market model for the pricing of derivatives in electricity markets*, *Quantitative Finance* (2004), no. 5, 109–122.
- [8] J. Casals, S. Sotoca, and M. Jerez, *A fast and stable method to compute the likelihood of time invariant state space models*, *Economics Letters* **65** (1999), 329–337.
- [9] L. Clewlow and C. Strickland, *Valuing energy options in a one factor model fitted to forward prices*, Working Paper, University of Sydney, April 1999.
- [10] ———, *Energy Derivatives-Pricing and Risk Management*, Lacima Publications, London, England, 2000.
- [11] E. Clément, D. Lamberton, and P. Protter, *An analysis of a least squares regression algorithm for american option pricing*, *Finance and Stochastics* **6** (2002), no. 4, 449–471.
- [12] California Energy Commission, *Wholesale electricity price review, june 2000*, [www.energy.ca.gov/electricity/wepr/2000-06/index.html](http://www.energy.ca.gov/electricity/wepr/2000-06/index.html), Juni 2000.
- [13] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman&Hall/CRC Finance, Boca Raton, London, New York and Washington D.C., 2004.
- [14] S. Deng, *Stochastic models of energy commodity prices and their applications: Mean-reversion with jumps and spikes*, Working Paper, Georgia Institute of Technology, 2000.

- [15] R. Douc, É. Moulines, and T. Rydén, *Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with Markov regime*, Working Paper, September 2003.
- [16] EnviaM, *Energie-Erzeugung*, www.enviam.de, 2004.
- [17] Á. Escribano, J. I. Peña, and P. Villaplana, *Modeling electricity prices: international evidence*, Working Paper 02-27, Economic Series 08, Juni 2002.
- [18] European Energy Exchange, *www.eex.de*.
- [19] ———, *EEX-Terminmarktkonzept*, November 2003.
- [20] ———, *Das Spotmarktkonzept*, November 2004.
- [21] H. Geman and A. Roncoroni, *A class of marked point processes for modeling electricity prices*, ESSEC Working Papers, März 2003.
- [22] G. Guthrie and S. Videbeck, *High frequency electricity spot price dynamics: An intra-day market approach*, Working Paper, Dezember 2002.
- [23] J. D. Hamilton, *Estimation, Inference and Forecasting of Time Series Subject to Change in Regime*, vol. 11, ch. 9, pp. 231–260, Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
- [24] ———, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [25] ———, *Specification testing in Markov-switching time-series models*, *J. of Econometrics* **70** (1996), 127–157.
- [26] A. C. Harvey, *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [27] R. Huisman and R. Mahieu, *Regime jumps in electricity prices*, Working Paper, ERIM Report Series Research in Management, August 2001.
- [28] R. A. Johnson and D. W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- [29] C. De Jong and R. Huisman, *Option formulas for mean reverting power prices with spikes*, Working Paper, ERIM Report Series Research in Management, September 2002.
- [30] P. De Jong, *The likelihood for a state space model*, *Biometrika* **75** (1988), no. 1, 165–169.
- [31] C.-J. Kim, *Dynamic linear models with Markov-switching*, *Journal of Econometrics* **60** (1994), 1–22.
- [32] C.-J. Kim and C. R. Nelson, *State-Space Models with Regime-Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, The MIT Press, Cambridge, 1999.
- [33] P. Kosmol, *Optimierung und Approximation*, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1991.
- [34] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, *Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach*, *The Review of Financial Studies* **14** (2001), no. 1, 113–147.

- 
- [35] J. Lucia and E. S. Schwartz, *Electricity prices and power derivatives- evidence from the nordic power exchange*, Review of Derivatives Research **5** (2002), 5–50.
- [36] A. I. McLeod, *Diagnostic checking periodic autoregressive models with application*, Journal of Time Series Analysis **15** (1994), no. 2, 221–233.
- [37] R. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics **3** (1976), 125–144.
- [38] W. Müller, *Mitschrift zur Vorlesung Finanzmathematik 2*, Institut für Statistik, Graz, WS 2001/2002.
- [39] D. Pilipović, *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*, McGraw-Hill, New York, 1997.
- [40] C. Pirrong and M. Jermakyan, *Valuing Power and Weather Derivatives on a Mesh Using Finite Difference Methods*, ch. 5, pp. 231–260, Risk Books, 1999.
- [41] E. S. Schwartz and J. E. Smith, *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices*, Management Science **46** (2000), no. 7, 893–911.
- [42] A. N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance*, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, vol. 3, World Scientific, New Jersey, 1999.
- [43] P. L. Skantze and M. D. Ilic, *Valuation, Hedging and Speculation in Competitive Electricity Markets*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- [44] N. L. Stockey and R. E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1989.
- [45] J. Terceiro, J. M. Casals, M. Jerez, G. R. Serrano, and S. Sotoca, *E4-Estimación de modelos Económicos en Espacio de los Estados*, [www.ucm.es/info/icae/e4](http://www.ucm.es/info/icae/e4).
- [46] J. N. Tsitsiklis and B. Van Roy, *Optimal stopping of Markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing financial derivatives*, IEEE Transactions on Automatic Control **44** (1999), no. 10, 1840–1851.
- [47] ———, *Regression methods for pricing complex american-style options*, IEEE Transactions on Neural Networks **12** (2001), no. 4, 694–703.
- [48] VDEW, *Pressekonferenz - Leistungsbilanz 2002/2003*, [www.strom.de](http://www.strom.de), Jänner 2004.