

Prüfung aus
Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien
(506.000)

Gruppe A

17. 12. 2012

<i>Familienname</i>	<i>Vorname</i>	<i>Matrikelnummer</i>
---------------------	----------------	-----------------------

- 1) Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die reine Arbeitszeit beträgt **80 Minuten (1h 20 Minuten)**.
- 2) Lösungen werden nur dann bewertet, wenn sie in diesem Exemplar durchgeführt werden.
- 3) Das Beispiel wird **nicht** anerkannt, wenn nur der Wert der Lösung vorliegt bzw. die Herleitung des Ergebnisses nicht erkennbar ist.
- 4) Viel Glück beim *Nüsseknacken*.

1.

2.

3.

4.

ÜB

Σ

Note:

- 1) Die beiden ungiftigen Pilzarten, der essbare Waldchampignon (C) und der wohl-schmeckende Pilz Nymphenbrot (N) werden sehr häufig mit dem sehr giftigen Grünen Knollenblätterpilz (K) verwechselt. In einer Zufallsauswahl dieser Pilze sind im Schnitt 80% C, 10% N und 10% K. Mit einer W! von 3% hält ein Pilzsucher ein C für ein K, mit einer W! von 2% ein N für ein K und mit einer W! von 4% ein K für ein C. Ansonsten wird der Pilz richtig erkannt.
- (a) Zeichnen den zugehörigen W-Baum. (4P)
 - (b) Mit welcher W! ist ein zufällig ausgewählter Pilz ungiftig und wird fälschlicherweise als giftiger Knollenblätterpilz identifiziert? (4P)
 - (c) Der Pilzsammler hat einen ungiftigen Pilz gefunden. Mit welcher W! erkennt er diesen auch als ungiftig? (4P)
 - (d) Der Pilzesammler hat einen Pilz als K identifiziert. Mit welcher W! ist es wirklich ein giftiger Knollenblätterpilz? Welchen Prozentsatz an Pilzen wirft der Sammler daher weg, obwohl sie nicht giftig sind? (8P)
-

2) Die Zufallsvariable X besitze folgende Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} bx^2 & 0 < x < 2 \\ 5b - bx & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante b . (4P)
- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (8P)
- (c) Skizzieren Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$. (4P)
- (d) Wie lautet $E(X)$? (4P)
-

3) Ein multinationaler Konzern feiert im Jahr 2013 seinen 100. Gründungstag. Die Konzernleitung beschließt, allen Kindern von MitarbeiterInnen, die am Jubeltag geboren werden, einen Betrag von EUR 4.000,- auszuschütten. Im Durchschnitt werden pro Jahr (365 Tage) 730 Kinder — zufällig übers Jahr verteilt — geboren.

(a) Geben Sie die W-Funktion $P(X = k)$ der Zufallsvariablen $X = \#(\text{Kinder, die am Jubeltag geboren werden})$ an. (4P)

(b) Die Konzernleitung hat für die Ausschüttung insgesamt EUR 20.000,- eingeplant. Mit welcher W-keit wird dieser Betrag reichen? Man benutze für die Berechnung eine geeignete Approximation der W-Funktion in (a). (10P)

(c) Wie lauten $E(Y)$ und $\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)}$ der für die Konzernleitung relevanten Zufallsvariablen $Y = \text{aus zuschüttender Betrag}$? (6P)

- 4) Die gemeinsame W-Verteilung der diskreten Zufallsvariablen X und Y ist wie folgt gegeben:

X/Y	-1	0	1	
1	p	0.2		0.4
2		0.1		
	0.25			

- (a) Wie lauten $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$? (8P)
- (b) Bestimmen Sie p so, dass X und Y unkorreliert sind. D.h. für welchen Wert von p gilt $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$? (8P)
- (c) Sind X und Y unabhängige ZV? Begründen sie Ihre Antwort. (4P)
-

Tab. 7.1: Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der $N(0, 1)$ -Verteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8718	.8729	.8749	.8870	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995

Für $z < 0$ benutze man die Relation $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Prüfung aus
Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien
(506.000)

Gruppe B

17. 12. 2012

<i>Familienname</i>	<i>Vorname</i>	<i>Matrikelnummer</i>
---------------------	----------------	-----------------------

- 1) Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die reine Arbeitszeit beträgt **80 Minuten (1h 20 Minuten)**.
- 2) Lösungen werden nur dann bewertet, wenn sie in diesem Exemplar durchgeführt werden.
- 3) Das Beispiel wird **nicht** anerkannt, wenn nur der Wert der Lösung vorliegt bzw. die Herleitung des Ergebnisses nicht erkennbar ist.
- 4) Viel Glück beim *Nüsseknacken*.

1.

2.

3.

4.

ÜB

Σ

Note:

- 1) Die beiden ungiftigen Pilzarten, der essbare Waldchampignon (C) und der wohl-schmeckende Pilz Nymphenbrot (N) werden sehr häufig mit dem sehr giftigen Grünen Knollenblätterpilz (K) verwechselt. In einer Zufallsauswahl dieser Pilze sind im Schnitt 90% C, 5% N und 5% K. Mit einer W! von 3% hält ein Pilzsucher ein C für ein K, mit einer W! von 2% ein N für ein K und mit einer W! von 1% ein K für ein C. Ansonsten wird der Pilz richtig erkannt.
- (a) Zeichnen den zugehörigen W-Baum. (4P)
 - (b) Mit welcher W! ist ein zufällig ausgewählter Pilz ungiftig und wird fälschlicherweise als giftiger Knollenblätterpilz identifiziert? (4P)
 - (c) Der Pilzsammler hat einen ungiftigen Pilz gefunden. Mit welcher W! erkennt er diesen auch als ungiftig? (4P)
 - (d) Der Pilzesammler hat einen Pilz als K identifiziert. Mit welcher W! ist es wirklich ein giftiger Knollenblätterpilz? Welchen Prozentsatz an Pilzen wirft der Sammler daher weg, obwohl sie nicht giftig sind? (8P)
-

2) Die stetige Zufallsvariable X besitze eine Dichte der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ b/x^3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Man bestimme die Konstanten a und b , falls die Dichte $f_X(x)$ in $x = 1$ stetig. (4P)
- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (8P)
- (c) Skizzieren Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$. (4P)
- (d) Wie lautet $E(X)$? (4P)
-

3 Ein multinationaler Konzern feiert im Jahr 2013 seinen 100. Gründungstag. Die Konzernleitung beschließt, allen Kindern von MitarbeiterInnen, die am Jubeltag geboren werden, einen Betrag von EUR 5.000,- auszuschütten. Im Durchschnitt werden pro Jahr (365 Tage) 730 Kinder — zufällig übers Jahr verteilt — geboren.

(a) Geben Sie die W-Funktion $P(X = k)$ der Zufallsvariablen $X = \#(\text{Kinder, die am Jubeltag geboren werden})$ an. (4P)

(b) Die Konzernleitung hat für die Ausschüttung insgesamt EUR 25.000,- eingeplant. Mit welcher W-keit wird dieser Betrag reichen? Man benutze für die Berechnung eine geeignete Approximation der W-Funktion in (a). (10P)

(c) Wie lauten $E(Y)$ und $\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)}$ der für die Konzernleitung relevanten Zufallsvariablen $Y = \text{auszuschüttender Betrag}$? (6P)

- 4) Die gemeinsame W-Verteilung der diskreten Zufallsvariablen X und Y ist wie folgt gegeben:

X/Y	-1	0	1	
1		0.1	p	0.6
2		0.2		
	0.35			

- (a) Wie lauten $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$? (8P)
- (b) Bestimmen Sie p so, dass X und Y unkorreliert sind. D.h. für welchen Wert von p gilt $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$? (8P)
- (c) Sind X und Y unabhängige ZV? Begründen sie Ihre Antwort. (4P)
-

Tab. 7.1: Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der $N(0,1)$ -Verteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8718	.8729	.8749	.8870	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995

Für $z < 0$ benutze man die Relation $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.