Mathematische Statistik – Übungen: Blatt 5

1. 1000 Würfe einer Münze ergaben 560 mal Kopf und 440 mal Zahl.

   Ist es glaubwürdig anzunehmen, dass diese Münze fair ist? Rechtfertige die Antwort!

2. In einer kleinen Stadt wird angenommen, dass die Anzahl der Autounfälle in einem Jahr einer Poisson-Verteilung genügt. In den Jahren davor war die mittlere Anzahl von Unfällen 15. Dieses Jahr gab es 10 Unfälle. Ist es gerechtfertigt zu behaupten, dass die Unfallrate abgenommen hat?

3. Die Beziehung zwischen arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel kann auch über Likelihood Quotienten Tests (LRTs) hergeleitet werden.

   Seien dazu Zufallsvariablen Y_i, $i = 1, \dots, n$, unabhängig verteilt mit Dichte $\lambda_i \exp(-\lambda_i y_i)$ und wir testen $H_0 : \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ gegen $H_1 : \lambda_i$ sind nicht alle gleich.

   (a) Zeige, dass die LRT Statistik gegeben ist durch $(\overline{Y})^{-n}/(\prod_i Y_i)^{-1}$ und entwickle daraus die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

   (b) Führe die Transformation $X_i = 1/Y_i$ durch und zeige, dass die LRT Statistik basierend auf $X_1, \dots, X_n$ gegeben ist durch $[n/\sum_i(1/X_i)]^n/\prod_i X_i$. Schließe daraus auf die Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel.

4. Berechne und zeichne für Stichproben vom Umfang $n \in \{1, 4, 16, 64, 100\}$ aus einer $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ Population mit bekanntem σ^2 die Power-Funktion für folgende LRTs. Nimm dazu $\alpha = 0.05$.

   (a) $H_0 : \mu \leq 0$ gegen $H_1 : \mu > 0$,

   (b) $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_1 : \mu \neq 0$.

5. Für eine Zufallsstichprobe $X_1, \dots, X_n$ von Bernoulli(p)-Variablen möchte man testen:

   $$H_0 : p = 0.49 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : p = 0.51\,.$$

   Verwende den Zentralen Grenzwertsatz um annähernd den notwendigen Stichprobenumfang zu bestimmen, so dass die Wahrscheinlichkeiten für den Type I und Type II Error beide um 0.01 sind. Verwende eine Teststatistik die H_0 verwirft falls $\sum_i X_i$ groß ist.

6. Seien $X_1, \dots, X_n$ iid $N(\theta, \sigma^2)$ mit unbekanntem σ^2. Teste

   $$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0\,.$$

   (a) Zeige, dass ein Test der H_0 verwirft falls

   $$|\overline{X} - \theta_0| > t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{S^2/n}$$

   ein Test von der Größe (size) α ist.

   (b) Zeige, dass dieser Test auch als LRT hergeleitet werden kann.

7. Sei $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ eine Zufallsstichprobe aus einer bivariaten Normalverteilung mit Parametern μ_X, μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2 und ρ. Teste

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \,.$$

   (a) Zeige, dass die Zufallsvariablen $W_i = X_i - Y_i$ iid aus $\mathrm{N}(\mu_W, \sigma_W^2)$ sind.

   (b) Zeige, dass die obigen Hypothesen mit der Statistik

$$T_W = \frac{\overline{W}}{\sqrt{S_W^2/n}}$$

   getestet werden können, mit $\overline{W} = (1/n)\sum_i W_i$ und $S_W^2 = (1/(n-1))\sum_i (W_i - \overline{W})^2$. Zeige auch, dass diese Teststatistik unter H_0 einer Student's t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden folgt. Dieser Test ist auch bekannt als t Test für gepaarte Stichproben.

8. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus $\mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ eine davon unabhängige Zufallsstichprobe aus $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Teste

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \,.$$

   unter der Annahme $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.

   (a) Entwickle den LRT für diese Hypothesen. Zeige, dass der LRT auf der Statistik

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}$$

   basiert, wobei

$$S_p^2 = \frac{1}{(n+m-2)} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2 \right) .$$

   Die Größe S_p^2 wird auch *gepoolter Varianzschätzer* genannt.

   (b) Zeige, dass $T \sim t_{n+m-2}$ unter H_0 gilt, weshalb man diesen Test auch den Zweistichproben t Test nennt.

   (c) Es liegen Holzstichproben vom Innen- und Außenteil einer byzantinischen Kirche vor. Das Datieren dieser Stücke ergab folgendes Ergebnis:

Innen		Außen	
1294	1251	1284	1274
1279	1248	1272	1264
1274	1240	1256	1256
1264	1232	1254	1250
1263	1220	1242	
1254	1218		
1251	1210		

   Verwende den Zweistichproben t Test um zu schließen, ob das mittlere Alter vom Innenteil der Kirche gleich ist dem mittleren Alter des Außenteils.