Mathematische Statistik – Übungen: Blatt 4

1. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer Population mit Dichte

$$f(x|\theta) = \theta x^{-2}\,, \qquad 0 < \theta \leq x < \infty\,.$$

   (a) Bestimme eine suffiziente Statistik für θ.

   (b) Finde den MLE für θ.

   (c) Was liefert hier die Anwendung der Momenten-Methode?

2. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer Population mit Dichte

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\,, \qquad 0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 < \theta < \infty\,.$$

   (a) Finde den MLE für θ und zeige, dass dessen Varianz $\to 0$ für $n \to \infty$
   (Hinweis: Finde die Verteilung von $Z = -\sum_i \log X_i$ und bestimme damit $\mathrm{var}(1/Z)$).

   (b) Finde den Schätzer für θ auch nach der Momenten-Methode.

3. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe mit Dichte (Lokations-Exponentialverteilung)

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}\,, \qquad \theta < x < \infty\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

   Finde eine minimale suffiziente Statistik für θ.

4. Angenommen die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ genügen dem linearen Regressionsmodell

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

   wobei $x_1, \ldots, x_n$ feste Konstanten sind, und $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ iid $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ mit unbekanntem σ^2.

   (a) Finde eine zweidimensionale suffiziente Statistik für (β, σ^2).

   (b) Finde den MLE für β und zeige, dass dieser unverzerrt ist.

   (c) Finde die Verteilung des MLEs $\hat{\beta}$.

5. Betrachte Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ wie im linearen Regressionsmodell von zuvor.

   (a) Zeige, dass $\sum_i Y_i \Big/ \sum_i x_i$ unverzerrter Schätzer für β ist.

   (b) Berechne die exakte Varianz von $\sum_i Y_i / \sum_i x_i$ und vergleiche sie mit der des MLEs.

   (c) Zeige, dass $\sum_i (Y_i/x_i)/n$ unverzerrt für β ist und berechne dessen exakte Varianz.

6. Beweise Lemma 3.3.1: Falls $f(x|\theta)$

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X|\theta)\right) = \int \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x|\theta)\right) f(x|\theta)\right] dx$$

   genügt, (dies stimmt für die Exponentialfamilie), dann gilt

$$\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X|\theta)\right)^2 = -\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X|\theta)\right)\,.$$

7. Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Bernoulli(p) Variablen. Zeige, dass die Varianz von $\overline{X}$ die Cramèr-Rao Schranke erreicht. Daher ist $\overline{X}$ der beste unverzerrte Schätzer für p.

8. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus der Population in Beispiel 2.
   Gibt es eine Funktion $g(\theta)$, für die ein unverzerrter Schätzer existiert dessen Varianz die Cramèr-Rao Schranke erreicht? Falls er existiert, finde diesen. Falls er nicht existiert, diskutiere warum dies so ist.

9. Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Exponential(λ) Variablen.

   (a) Finde einen unverzerrten Schätzer für λ, der nur auf $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ basiert.

   (b) Geben sie eine suffiziente Statistik für λ an. Ist diese auch minimal suffizient?

   (c) Die folgenden Daten sind Ausfallszeiten (in Stunden) eines voll belasteten Dampfkessels im Space Shuttle:

   50.1, 70.1, 137.0, 166.9, 170.5, 152.8, 80.5, 123.5, 112.6, 148.5, 160.0, 125.4

   Ausfallszeiten werden häufig mit der Exponentialverteilung modelliert. Schätze die mittlere Ausfallszeit mit dem zuvor entwickelten Schätzer. Diskutiere die Schätzung!