Mathematische Statistik – Übungen: Blatt 2

1. Der Hersteller von Bücher verpackt diese in Kartons zu 100 Stück. Es ist bekannt, dass ein derartiges Buch im Mittel 10dkg wiegt mit einer Standardabweichung von 0.5dkg. Der Hersteller interessiert sich für die Berechnung von

$$P(100 \text{ Bücher wiegen mehr als } 1004\text{dkg})$$

   um damit zu erkennen, ob zu viele Bücher im Karton sind. Erkläre wie man den (approximativen?) Wert dieser Wahrscheinlichkeit berechnen kann. Führe dazu alle relevanten Sätze oder dabei getroffene Annahmen an.

2. Sei $\overline{X}$ das Stichprobenmittel von 100 Beobachtungen aus einer Population mit Erwartung μ und Varianz $\sigma^2 = 9$. Finde Grenzen zwischen denen $\overline{X} - \mu$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% liegen wird. Verwende dazu beides, die Chebychev'sche Ungleichung und den Zentralen Grenzwertsatz, vergleiche und kommentiere beide Ergebnisse.

3. Die Stirling Formel zur Approximation von Fakultäten kann einfach aus dem Zentralen Grenzwertsatz erhalten werden. Argumentiere:

   (a) Falls $X_i \sim \text{Exponential}(1)$, $i = 1, 2, \ldots$, alle unabhängig, dann gilt für jedes x

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \to P(Z \leq x)\,,$$

   mit $Z \sim N(0, 1)$.

   (b) Zeige, dass sich durch Differenzieren beider Seiten der Approximation in (a)

$$\frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n)}(x\sqrt{n} + n)^{n-1} e^{-(x\sqrt{n}+n)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

   ergibt, und dass für $x = 0$ Stirling's Formel resultiert.

4. Sei X eine Zufallsvariable aus der $F_{p,q}$-Verteilung.

   (a) Leite die Dichte von X her.

   (b) Zeige, dass $1/X \sim F_{q,p}$.

5. Sei T eine Zufallsvariable aus Student's t Verteilung mit p Freiheitsgraden.

   (a) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von T.

   (b) Zeige, dass $T^2 \sim F_{1,p}$.

   (c) Bezeichne $f(t|p)$ die Dichte von T. Zeige, dass in jedem $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{p\to\infty} f(t|p) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)\,.$$

   Hinweis: Verwende die Stirling Formel.

6. Sei X **eine** Variable aus der $N(0, \sigma^2)$ Population. Ist $|X|$ eine suffiziente Statistik für σ^2?