Mathematische Statistik
Die Gamma- und Betafunktion

Die Funktion $\Gamma : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (x > 0)$$

nennt man **Gammafunktion** mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, für $x > 0$,
- $\Gamma(n+1) = n!$, für $n = 1, 2, \ldots$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Die Funktion $\mathrm{B} : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definiert als

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \qquad (p, q > 0)$$

nennt man **Betafunktion** mit den folgenden Eigenschaften für $p, q > 0$:

- sie ist symmetrisch, d.h. $\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p)$,
- $\mathrm{B}(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$.

Ihre Repräsentation ist vielfältig. Durch (Substitution) erhält man für $p, q > 0$:

$$\begin{aligned}
(t = s/(1+s)): \qquad & \mathrm{B}(p, q) = \int_0^{+\infty} s^{p-1} (1+s)^{-(p+q)} ds \\
(t = s^2): \qquad & \mathrm{B}(p, q) = 2 \int_0^1 s^{2p-1} (1-s^2)^{q-1} ds \\
(t = s^2/(1+s^2)): \qquad & \mathrm{B}(p, q) = 2 \int_0^{+\infty} s^{2p-1} (1+s^2)^{-(p+q)} ds \\
(t = \cos^2\theta): \qquad & \mathrm{B}(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta
\end{aligned}$$