Übungsaufgabe 1:

Führe eine Monte Carlo Simulation mit geeigneter Replikationszahl ($R > 1000$) durch für die Varianz des Mittels $\text{var}(\overline{X}_n)$, der asymptotischen Varianz des Medians $\text{avar}(\tilde{X}_n)$, und der asymptotischen relativen Effizienz der beiden, d.h.

$$\text{are}(\overline{X}_n, \tilde{X}_n) = \frac{\text{avar}(\tilde{X}_n)}{\text{var}(\overline{X}_n)}$$

in Abhängigkeit von den Stichprobenumfängen $n = 5, 10, 15, \ldots, 50, 100,\ 200, \ldots, 1000$. Nimm dafür die nachfolgenden symmetrischen Verteilungsanahmen $F(x)$ für die Grundgesamtheit an. In der Klammer findet man dafür auch die allgemeinen Ergebnisse für die jeweilige Varianz des Mittelwerts sowie die asymptotische Varianz des Medians (avar):

1. $F(x) = \text{N}(0, 1)$, $(\text{var}(\overline{X}_n) = \sigma^2/n$, $\text{avar}(\tilde{X}_n) = \pi/2 \cdot \sigma^2/n$, hier mit $\sigma^2 = 1)$,
2. $F(x) = \text{Logistic}(0, 1)$, $(\text{var}(\overline{X}_n) = \pi^2/3 \cdot \beta^2/n$, $\text{avar}(\tilde{X}_n) = 4\beta^2/n$, hier mit $\beta = 1)$,
3. $F(x) = \text{Cauchy}(0, 1)$, $(\text{var}(\overline{X}_n) = -$, $\text{avar}(\tilde{X}_n) = \pi^2/4 \cdot \sigma^2/n$, hier mit $\sigma = 1)$,
4. $F(x) = \text{Laplace}(0, 1)$, $(\text{var}(\overline{X}_n) = 2\sigma^2/n$, $\text{avar}(\tilde{X}_n) = \sigma^2/n$, hier mit $\sigma = 1)$,
5. $F(x) = \text{Uniform}(-1, 1)$, $(\text{var}(\overline{X}_n) = a^2/(3n)$, $\text{avar}(\tilde{X}_n) = a^2/n$, hier mit $a = 1)$.

Zeichne für jede Populationsverteilung den Grafen von $\widehat{\text{are}}_{\text{MC}}(\overline{X}_n, \tilde{X}_n)$ gegen den Stichprobenumfang n und zeichne zusätzlich auch den zu erwartenden asymptotischen Wert als horizontale Referenzlinie ein.
Interpretiere diese Resultate für jede der obigen Populationsannahmen!!

Bemerkungen zur Laplace-Verteilung: es wird dafür in `R` kein unmittelbarer Generator angeboten!
Eigenschaften der Laplace-Verteilung: Dichtefunktion

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp(-|x - \mu|/\sigma), \quad \text{für} \ \ x, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0\ ,$$

Momente: $\text{E}(X) = \mu$, $\text{var}(X) = 2\sigma^2$.
Vorgehensweise: Für $U \sim$Uniform$(0, 1)$ ist

$$X = \begin{cases} \mu + \sigma \log(2U), & \text{für } U \leq 1/2, \\ \mu - \sigma \log(2(1 - U)), & \text{für } U > 1/2, \end{cases}$$

Laplace(μ, σ)-verteilt (Inversionsmethode).