Stochastische Prozesse für Informatikstudien

506.007

Übungsblatt 1

28. Jän. 2010

1. [A 1.5] Sei $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein stochastischer Prozess mit

$$X_t = U \cdot \sin 2\pi t,$$

wobei U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable sei ($U \sim U(0,1)$).

(a) Berechnen Sie $m_t = E(X_t)$.

(b) Wie lautet $E(X_t \cdot X_s)$?

(c) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion $K(s,t) = E(X_t \cdot X_s) - m_t \cdot m_s$.

(d) Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn?

2. [A 1.7] Es seien $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t | t \in \mathbb{R}\}$ zwei unabhängige stochastische Prozesse mit gleicher Kovarianzfunktion $K(s,t)$, und beide Trendfunktionen m_t gleich 0. Der stochastische Prozess $\{Z_t | t \in \mathbb{R}\}$ sei gegeben durch

$$Z_t = X_t \cos \omega t - Y_t \sin \omega t \,.$$

Man zeige: Wenn die Prozesse $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t | t \in \mathbb{R}\}$ *stationär im weiteren Sinn* sind, dann ist es auch der Prozess $\{Z_t | t \in \mathbb{R}\}$.

Hinweis: Verwenden Sie

$$\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 = \cos(x_2 - x_1).$$

3. [A 1.14] Der stochastische Prozess $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ sei ein *Moving-Average-Prozess* erster Ordnung, d.h.

$$X_n = a + Z_n + bZ_{n-1}$$

$a, b \in \mathbb{R}, Z_n$ unabh. und id. verteilt nach F mit $E(Z_n) = 0, Var(Z_n) = \sigma^2$.

(a) Berechnen Sie $m_n = E(X_n)$ und $Var(X_n)$.

(b) Wie lautet die Kovarianzfunktion $K(n,m)$? Berechnen Sie speziell $K(n, n+1)$ und $K(n, n+j); j \geq 2$. Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn?

4. [A 2.1] Eine Feuerwehrstation einer großen Stadt erhält pro Tag (24 Stunden) im Schnitt 10 Anforderungen um Hilfe. Eine Schicht dauert 12 Stunden, d.h. alle 12 Stunden wird die Mannschaft ausgewechselt. Man nehme an, dass die Anforderungen um Hilfe einem homogenen POISSON–Prozess genügen.

(a) Wie lange wartet die Mannschaft im Durchschnitt vom Beginn der Schicht bis zum ersten Anruf?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft während der Schicht 6 Anforderungen um Hilfe bekommt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft während der Schicht keine Anforderungen um Hilfe bekommt?

(d) Einer von fünf Hilferufen ist ein Fehlalarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft 6 Anforderungen um Hilfe und dabei keinen Fehlalarm hat?

5. [A 2.8] Sei $\{N_t | t \geq 0\}$ ein homogener POISSON–Prozess mit Intensität $\lambda = 2$. Man berechne:

(a) $P(N_1 \leq 2)$, $P(N_1 = 2, N_3 = 6)$,

(b) $P(N_1 = 2 | N_3 = 6)$, $P(N_3 = 6 | N_1 = 2)$,

(c) $E(N_2)$, $E((N_1)^2)$, $E(N_1 N_2)$.

6. [A 3.1] Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 2 | X_1 = 0, X_0 = 1) \quad \text{und} \quad P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 1).$$

(b) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 0),\ P(X_{n+1} = 2, X_n = 0 | X_{n-1} = 0),\ n > 1.$$

Unter Vorliegen der Anfangsverteilung

$$P(X_0 = 0) = \tfrac{2}{5},\ P(X_0 = 1) = \tfrac{3}{10},\ P(X_0 = 2) = \tfrac{3}{10},$$

berechne man $P(X_1 = 2)$ und $P(X_1 = 1, X_2 = 2)$.

7. [A 3.5] Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen.

(b) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 0 | X_1 = 1, X_0 = 2) \quad \text{und} \quad P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 2).$$

(c) Bestimmen Sie die Grenzverteilung $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$.

8. [A 3.21] Die MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ ist gegeben durch die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und berechnen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeiten $P_i(T)$ für $i = 1, 2$ und $T = \{0\}$.

(b) Man bestimme die erwartete Anzahl von Schritten m_i $(i = 1, 2)$ bis zur Absorption in den Zustand 0 oder in den Zustand 3.

Besprechungstermin:

Do. 28. 01. 2010 8:30 - 10:00 HS i2

Übungstermine:

Gruppe 1:	**Do. 28. 01. 2010**	**14:00 - 14:45**	**HS i7**
Gruppe 2:	**Do. 28. 01. 2010**	**15:00 - 15:45**	**HS i7**

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Moritz Jirak `m0ritz@yahoo.com`

Markus Zahrnhofer `markus.zahrnhofer@student.tugraz.at`

Markus Kügerl `kuegerl@student.TUGraz.at`

Brigitte Pfeiler `b.pfeiler@student.TUGraz.at`

Lisa Stadlmüller `lisa86@sbox.TuGraz.at`

Lösungen:

1. (a) $m_t = \frac{1}{2}\sin(2\pi t)$
   (b) $E(X_t X_s) = \frac{1}{3}\sin(2\pi t)\sin(2\pi s)$
   (c) $K(s,t) = \frac{1}{12}\sin(2\pi t)\sin(2\pi s)$
   (d) Nein.
3. (a) $m_n = a$, $\mathrm{Var}(X_n) = (1+b^2)\sigma^2$
   (b) $K(n,n+1) = b\sigma^2$, $K(n,n+j) = 0$ für $j \geq 2$, ja.
4. (a) 2.4 Stunden
   (b) 0.146
   (c) 0.007
   (d) 0.038
5. (a) 0.677, 0.053
   (b) 0.329, 0.195
   (c) $E(N_2) = 4$, $E(N_1^2) = 6$, $E(N_1 N_2) = 10$
6. (a) 1/2, 1/5
   (b) 1/4 für $n \geq 1$
   $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{125}$
7. (b) 1/5, 1/25
   (c) $\mathbf{p} = (\frac{2}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12})$
8. (a) $P_1(T) = \frac{30}{43}$, $P_2(T) = \frac{19}{43}$
   (b) $m_1 = \frac{90}{43}$, $m_2 = \frac{100}{43}$