Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

30. Jän. 2007

1. **[A 11.3]** Es sei $X_t = A\,\sin(\omega t + \Phi)$ ein stochastischer Prozess, wobei A und Φ unabhängige, nicht negative Zufallsvariablen sind. Weiters seien $E(A) = \mu_A$, $Var(A) = \sigma_A^2$ und Φ in $(0, 2\pi)$ gleichverteilt ($\Phi \sim U(0, 2\pi)$).
   (a) Berechnen Sie die Trendfunktion m_t des Prozesses $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Berechnen Sie die Kovarianzfunktion $K(s,t)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(s,t)$ des Prozesses $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$.

   Hinweis: Verwenden Sie
   $$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big).$$

2. **[A 11.5]** Es sei $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine Folge reeller Zahlen und $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ eine Folge unabhängiger, in $(0, 2\pi)$ gleichverteilter Zufallsvariablen.

   Man berechne die Kovarianzfunktion $K(s,t)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(s,t)$ des stochastischen Prozesses
   $$X_t = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega t + \Phi_i)\,.$$

3. **[A 11.8]** Es seien $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t | t \in \mathbb{R}\}$ zwei unabhängige stochastische Prozesse mit den Trendfunktionen $m_X(t)$ und $m_Y(t)$ sowie den Kovarianzfunktionen $K_X(s,t)$ und $K_Y(s,t)$.

   Man berechne die Kovarianzfunktionen $K_U(s,t)$ und $K_V(s,t)$ der beiden Prozesse
   $$U_t = X_t + Y_t \quad \text{und} \quad V_t = X_t - Y_t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

4. **[A 12.1]** Eine Feuerwehrstation einer großen Stadt erhält pro Tag (24 Stunden) im Schnitt 10 Anforderungen um Hilfe. Eine Schicht dauert 12 Stunden, d.h. alle 12 Stunden wird die Mannschaft ausgewechselt. Man nehme an, dass die Anforderungen um Hilfe einem homogenen POISSON–Prozess genügen.
   (a) Wie lange dauert es im Durchschnitt vom Beginn einer Schicht bis zur ersten Anforderung?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft während der Schicht 6 Anforderungen um Hilfe bekommt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft während der Schicht keine Anforderungen um Hilfe bekommt?

(d) Einer von fünf Hilferufen ist ein Fehlalarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft 6 Anforderungen um Hilfe in ihrer Schicht empfängt und darunter kein Fehlalarm ist?

5. [A 12.8] Sei $\{X_t | t \geq 0\}$ ein homogener POISSON–Prozess mit Intensität λ. Für $s, t > 0$ bestimme man die bedingte Verteilung von X_t gegeben $X_{t+s} = n$.

6. [A 13.2] Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeichne den Übergangsgraphen und berechne die Matrix der zweistufigen Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}^{(2)}$.

(b) Bei Vorgabe der Anfangsverteilung

$$P(X_0 = i) = \tfrac{1}{3}\,,\ i = 0, 1, 2\,,$$

berechne man die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 = 0)$ und $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2)$.

7. [A 13.4] In einer bestimmten Region folgt die Wetterlage folgendem Muster. Ein Tag wird als *sonnig* bezeichnet, falls die Sonne mehr als 50% der Tagesstunden scheint, und als *bewölkt*, falls die Sonne weniger als 50% der Tagesstunden scheint. Die Daten lassen den Schluss zu, dass es nach einem *bewölkten* Tag gleich wahrscheinlich ist, dass der nächste Tag *sonnig* oder *bewölkt* ist. Nach einem *sonnigen* Tag ist es am darauf folgenden Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ wieder *sonnig*, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ *bewölkt*.

(a) Wie lautet die Übergangsmatrix für diese MARKOV–Kette?

(b) Falls es heute sonnig ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es in drei Tagen i. *sonnig*, ii. *bewölkt*?

(c) Man berechne $\mathbf{P}^{(5)}$ und $\mathbf{P}^{(10)}$ (mit Hilfe eines Programms für symbolisches Rechnen wie z.B. `Maple` oder `Mathematica`). Wie verhält sich $\mathbf{p}^{(n)}$ für $n \to \infty$?

8. [A 13.10] Die MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ ist gegeben durch die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die MARKOV–Kette im Zustand 0 endet, falls sie im Zustand 1 startet.

(b) Man berechne die erwartete Anzahl $m_i\,(i = 1, 2)$ der Schritte bis zur Absorption in den Zustand 0 oder in den Zustand 3.

Besprechungstermine:

Gruppe A:	**Di. 30. 01. 2007**	**10:45 - 13:00**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe B:	**Di. 30. 01. 2007**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: Dr. Hörmann
Gruppe C:	**Di. 30. 01. 2007**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: Dr. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere Studienassistentinnen:

Dr. Siegfried Hörmann `shoermann@TUGraz.at`

Dipl.-Math. Gordana Djuras `gordana.djuras@joanneum.at`

Verena Feirer `vfeirer@sbox.TUGraz.at`

DI Johannes Schauer `johannes.schauer@TUGraz.at`

Lösungen:

1. (a) $m_t = 0$

   (b) $K(s,t) = \frac{1}{2}(\sigma_A^2 + \mu_A^2)\cos\big(\omega(t-s)\big)$
   $\rho(s,t) = \cos\big(\omega(t-s)\big)$

2. $K(s,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2 \cos\big(\omega(t-s)\big)$
   $\rho(s,t) = \cos\big(\omega(t-s)\big)$

3. $K_U(s,t) = K_V(s,t) = K_X(s,t) + K_Y(s,t)$

4. (a) $2h\,24min\ (2.4h)$

   (b) $p = 0.146$

   (c) $p = 0.007$

   (d) $p = 0.038$

5. $P(X_t = k | X_{t+s} = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{t}{s+t}\right)^k \left(1 - \frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$

6. (a) $\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{29}{50} & \frac{6}{50} & \frac{15}{50} \\ \frac{8}{25} & \frac{7}{25} & \frac{10}{25} \\ \frac{18}{50} & \frac{9}{50} & \frac{23}{50} \end{pmatrix}$

   (b) $P(X_2 = 0) = \frac{21}{50}$
   $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2) = \frac{2}{15}$

7. (a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   (b) $P(X_3 = \text{sonnig} | X_0 = \text{sonnig}) = \frac{65}{108}$
   $P(X_3 = \text{bewölkt} | X_0 = \text{sonnig}) = \frac{43}{108}$

   (c) $\mathbf{p}^{(\infty)} = (0.6, 0.4)$

8. (a) $P_1(\{0\}) = \frac{8}{21}$

   (b) $m_1 = m_2 = \frac{10}{3}$