# Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

## Übungsblatt 4

31. 01. 2006

---

*Familienname* *Vorname* *Matrikelnummer* *Gruppe*

---

*Familienname* *Vorname* *Matrikelnummer* *Gruppe*

Geben Sie bitte an,
— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben
— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

| | | | Pkte | T-Pkte |
|---|---|---|---|---|
| Übertrag 1.-3. Übungsblatt | | | | |
| Aufgabe | bearbeitet | Tafel | | |
| 1 | ☐ | ☐ | | |
| 2 | ☐ | ☐ | | |
| 3 | ☐ | ☐ | | |
| 4 | ☐ | ☐ | | |
| 5 | ☐ | ☐ | | |
| 6 | ☐ | ☐ | | |
| 7 | ☐ | ☐ | | |
| 8 | ☐ | ☐ | | |
| | Gesamt 4.Übungsblatt: | | ☐ | ☐ |
| | Gesamt 1.- 4. Übungsblatt: | | ☐ | ☐ |

**1. [A 11.1]** Es sei $\{X_t |\, t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess mit Verteilungsfunktion $\boxed{3P}$

$$F_t(x) = P(X_t \leq x) = 1 - e^{-(x/t)^2}\,, \;\; x \geq 0\,.$$

(a) Man berechne und skizziere die Trendfunktion $m_t$ des Prozesses.

(b) Ist der Prozess stationär im engeren oder weiteren Sinn?

**2. [A 11.4]** Es sei $X_t = A_t \sin(\omega t + \Phi)$ ein stochastischer Prozess mit $A_t$ und $\Phi$ für alle $t$ unabhängige, nicht negative Zufallsvariablen. Weiters sei die Zufallsvariable $\Phi$ in $(0, 2\pi)$ gleichverteilt ($\Phi \sim U(0, 2\pi)$). $\boxed{4P}$

**Man zeige:** Wenn $\{A_t |\, t \in \mathbb{R}\}$ ein im *weiteren Sinn stationärer Prozess* ist, dann ist auch der Prozess $\{X_t |\, t \in \mathbb{R}\}$ *stationär im weiteren Sinn.*

**Hinweis:** Verwenden Sie

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

**3. [A 11.9]** Eine autoregressive Folge erster Ordnung sei durch $\boxed{3P}$

$$Y_t - 0.8\, Y_{t-1} = X_t\,,\; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

definiert, wobei $\{X_t |\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ eine rein zufällige Folge mit den Parametern $E(X_t) = 0$ und $Var(X_t) = 1$ ist.

(a) Man berechne die Kovarianzfunktion $K(\tau)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(\tau)$ von $Y_t$.

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Korrelationsfunktion $\rho(\tau)$.

**4. [A 12.2]** Gegeben sei ein POISSON–Prozess $\{N_t |\, t \geq 0\}$ mit Intensität $\lambda$. Man berechne für $\lambda = 2$ $\boxed{3P}$

(a) $P(N_3 = 6)$.

(b) $P(N_{3.7} = 4 | N_{2.1} = 2)$.

(c) $P(N_7 - N_3 = 2 | N_3 = 2)$.

(d) Man berechne für allgemeines $\lambda > 0$: $P(N_{2.1} = 2 | N_{3.7} = 4)$.

**5. [A 12.9]** Eine radioaktive Quelle emittiert Partikel gemäss einem POISSON–Prozess mit Parameter $\lambda = 2$ pro Minute. $\boxed{4P}$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Partikel frühestens nach drei Minuten emittiert wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Partikel frühestens nach drei Minuten aber spätestens nach fünf Minuten emittiert wird?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Partikel in der Zeit zwischen drei und fünf Minuten emittiert wird?

**6.** Das Wetter in einer bestimmten Region hat 3 Ausprägungen: {Sonne, Wolken, Regen}. Sei $X_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) das Wetter am Tag $n$. Wir nehmen an, dass $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine MARKOV–Kette mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten sei $\boxed{\text{4P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeichne den zugehörigen Übergangsgraphen.

(b) Heute scheint die Sonne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es übermorgen regnen?

(c) Heute regnet es. Bestimmen sie mittels der stationären Verteilung approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass es in 5 Tagen regnet und berechenen Sie (mit dem Computer) die entsprechende theoretische Wahrscheinlichkeit.

**7.** **[A 13.9]** Die MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ ist gegeben durch die Übergangsmatrix $\boxed{\text{4P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und berechnen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeiten $P_i(T)$ für $i = 1, 2$ und $T = \{0\}$.

(b) Man bestimme die erwartete Anzahl von Schritten $m_i$ ($i = 1, 2$) bis zur Absorption in den Zustand $0$ oder in den Zustand $3$.

**8.** **Simulation einer Bernoulli Irrfahrt.** Zwei Spieler (Spieler A und Spieler B) werfen 1000 mal eine faire Münze und spielen dabei jeweils um 1 Euro. Wir bezeichnen mit $X_n$ den Betrag, den Spieler A zum Zeitpunkt $n$ gewinnt oder verliert. Somit ist $X_n \pm 1$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Weiters sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ der gesamte Gewinn oder Verlust von Spieler A bis zum Zeitpunkt $n$. (Der Prozess $\{S_n | n \geq 1\}$ ist eine sogenannte Bernoulli Irrfahrt.) Spieler A wundert sich, dass er fast während des gesamten Spieles in Führung lag, also zu den meisten der Zeitpunkte $\{1, \ldots, 1000\}$ sein bisheriger Gewinn größer als sein Verlust war. Spieler A glaubt deshalb, dass er hellseherische Kräfte besitzen muss. Wir definieren dazu $Y_n = I(S_n > 0)$, d.h. $Y_n$ ist 1, wenn $S_n > 0$ (wenn Spieler A bis zum Zeitpunkt $n$ in Führung liegt) und 0 sonst. Damit ist $\boxed{\text{5P}}$

$$r_{1000} := \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} Y_n$$

die relative Häufigkeit der Zeitpunkte, an denen Spieler A in den 1000 Spielen in Führung lag.

(a) Überlegen Sie sich, dass $\{S_n | n \geq 0\}$ eine homogene Markov-Kette ist und geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{Z})$ an.

(b) Simulieren Sie dieses Spiel nun 200 mal und speichern Sie die jeweiligen Ergebnisse für $r_{1000}$ ab.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Beobachtungen in den Intervallen $[0, 1/10)$, $[4/10, 6/10]$ und $(9/10, 1]$.

(d) Ist Spieler A wirklich Hellseher oder hatte er nur ein wenig Glück?

**Hinweis:** Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe–Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 30. 01. 06, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

1. Starten eines Ftp Programmes (freie Downloads z.B. unter: `http://www.thefreesite.com/Free_Software/FTP_freeware/`)
2. Name des Rechners eingeben: bs2.tugraz.at
3. Username: abgabe.stat
4. Password: WS05/06
5. Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter /**incoming/wthstoch**

**Maximal erreichbare Punkteanzahl** 30 P

**Abgabetermin:** Spätestens am **Di. 31.01.2006, 10:45 Uhr** in HS G.

**Besprechungstermine:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gruppe A:** | **Di. 31. 01. 2006** | **10:45 - 13:00** | **HS G**: Prof. Stadlober |
| **Gruppe B:** | **Di. 31. 01. 2006** | **13:00 - 14:30** | **HS B**: Mag. Hörmann |
| **Gruppe C:** | **Di. 31. 01. 2006** | **14:45 - 16:15** | **HS B**: Mag. Hörmann |

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

**Mag. Siegfried Hörmann** `shoermann@TUGraz.at`
**Gordana Djuras** `g.djuras@TUGraz.at`
**Verena Feirer** `vfeirer@sbox.TUGraz.at`
**Johannes Schauer** `schauer@sbox.TUGraz.at`