Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

1. 2. 2005

Familienname(n) *Vorname(n)* *Matr.nr(n)/Ü.einheit*

Bitte in Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern, abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. – 3. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
		Gesamt 4. Übungsblatt:	☐	☐
		Gesamt 1. – 4. Übungsblatt:	☐	☐

1. [A 11.3] $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

Es sei $X_t = A\,\sin(\omega t + \Phi)$ ein stochastischer Prozess mit A und Φ unabhängige, nicht negative Zufallsvariablen. Weiters seien $E(A) < \infty$ und Φ in $(0, 2\pi)$ gleichverteilt ($\Phi \sim U(0, 2\pi)$).

(a) Berechnen Sie die Trendfunktion m_t des Prozesses $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$.

(b) Berechnen Sie die Kovarianzfunktion $K(s,t)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(s,t)$ des Prozesses $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$.

2. [A 11.7] Es sei $X_t = \sin \Phi t$, mit Φ eine in $(0, 2\pi)$ gleichverteilte Zufallsvariable. $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

Man zeige:

(a) Die zufällige Folge $\{X_t | t = 1, 2, \ldots\}$ ist *stationär im weiteren*, aber **nicht** *im engeren Sinn.*

(b) Der stochastische Prozess $\{X_t | t \geq 0\}$ ist *weder im engeren noch im weiteren Sinne stationär.*

3. [A 12.7] Sei $\{X_t | t \geq 0\}$ ein homogener POISSON–Prozess mit Intensität $\lambda = 2$. $\boxed{3\ \mathrm{P}}$
Man berechne:

(a) $P(X_1 \leq 2)$, $P(X_1 = 2, X_3 = 6)$,

(b) $P(X_1 = 2 | X_3 = 6)$, $P(X_3 = 6 | X_1 = 2)$,

(c) $E(X_2)$, $E((X_1)^2)$, $E(X_1 X_2)$.

4. [A 12.10] Die folgenden Berechnungen tauchen in bestimmten vereinfachten Modellen für Lernprozesse auf. Seien X_t und Y_t unabhängige homogene POISSON–Prozesse mit Intensitäten λ_X und λ_Y. $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_t = 1$ bevor $Y_t = 1$?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_t = 2$ bevor $Y_t = 2$?

5. [A 13.6] Eine MARKOV–Kette mit den 3 Zuständen $0, 1, 2$ ist gegeben durch die Übergangsmatrix $\boxed{4\ \mathrm{P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-q & 0 & q \end{pmatrix},$$

mit $0 < p < 1$ und $0 < q < 1$.

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass der Zustand 0 ein *rekurrenter* und *aperiodischer* Zustand ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Zustand 0 ein *positiv rekurrenter* Zustand ist und berechnen Sie die mittlere Rückkehrzeit m_0.

6. [A 13.8] Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ ist gegeben durch folgende Übergangsmatrix $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 = 0)$ und $P(X_3 = 0)$ für die Anfangsverteilung $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$.

(b) Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten in (a) für die Anfangsverteilung $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$?

7. [A 13.12] Eine MARKOV–Kette mit 3 Zuständen hat die Übergangsmatrix $\boxed{3\ \text{P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Jede Periode in welcher der Prozess in den Zustand $0, 1, 2$ kommt, kostet EUR 2,–, EUR 5,–, EUR 3,–. Was sind die Langzeitkosten pro Periode für diese MARKOV–Kette?

8. [A 13. 15] Man erstelle ein Computerprogramm, das die MARKOV–Kette aus **Beispiel 13.4** mit Übergangsmatrix $\boxed{6\ \text{P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

simuliert. Setze die Parameter $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{3}$.

(a) Starten Sie mit Zustand 0 und führen Sie insgesamt 1000 Schritte durch. Registrieren Sie jeweils nach $n = 100, 200, 500, 1000$ Schritten die relativen Häufigkeiten des Auftretens von Zustand 0:

$$h_0(n) = \frac{\text{Häufigkeit des Auftretens von Zustand } 0}{n}.$$

(b) Wiederholen Sie das Experiment in (a) 8–mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch und graphisch in Form von 8 Pfaden

$$(n, h_0^j(n)), \quad n = 100, 200, 500, 1000\,;\ j = 1, \ldots, 8,$$

dar.

(c) Berechnen Sie für $n = 100, 200, 500, 1000$ die Mittelwerte und Standardabweichungen

$$\overline{h_0}(n) = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} h_0^j(n), \quad s_0(n) = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{8}\left(h_0^j(n) - \overline{h_0}(n)\right)^2}$$

und vergleichen Sie die Mittelwerte $\overline{h_0}(n)$ mit der Grenzwahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{b}{a+b} = \frac{2}{5}$.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 31.1.2005, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)
(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at
(c) Username: abgabe
(d) Passwort: WS04/05
(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter /incoming/wthstoch.

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{30\text{ P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 1.2.2005 9 Uhr** in HS G oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1:	**Di. 1. 2. 2005**	**11:00-12:30**	**HS G**: UProf. Stadlober
Gruppe 2:	**Di. 1. 2. 2005**	**13:00-14:30**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe 3:	**Di. 1. 2. 2005**	**14:45-16:15**	**HS B**: UProf. Stadlober

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere StudienassistentInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`
Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`
Johannes Poglitsch `pogo@sbox.TUGraz.at`
Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`