Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

27. 1. 2004

Familienname(n) *Vorname(n)* *Matr.nr(n)/Ü.einheit*

Bitte in Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern, abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. – 3. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 4. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. – 4. Übungsblatt:		☐	☐

1. **[A 11. 4]** Es sei $X_t = A_t \sin(\omega t + \Phi)$ ein stochastischer Prozess mit A_t und Φ für alle t unabhängige, nicht negative Zufallsvariablen. Weiters sei die Zufallsvariable Φ in $(0, 2\pi)$ gleichverteilt ($\Phi \sim U(0, 2\pi)$). $\boxed{4\text{ P}}$

   Man zeige: Wenn $\{A_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein im *weiteren Sinn stationärer Prozess* ist, dann ist auch der Prozess $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ *stationär im weiteren Sinn.*

2. **[A 11. 5]** Es seien $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine Folge reeller Zahlen und $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ eine Folge unabhängiger, in $(0, 2\pi)$ gleichverteilter Zufallsvariabler. $\boxed{3\text{ P}}$

   Man berechne die Kovarianzfunktion $K(s, t)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(s, t)$ des stochastischen Prozesses

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega t + \Phi_i)\,.$$

3. **[A 11. 8]** Es seien $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t | t \in \mathbb{R}\}$ zwei unabhängige stochastische Prozesse mit den Trendfunktionen $m_X(t)$ und $m_Y(t)$ sowie den Kovarianzfunktionen $K_X(s, t)$ und $K_Y(s, t)$. $\boxed{3\text{ P}}$

   Man berechne die Kovarianzfunktionen $K_U(s, t)$ und $K_V(s, t)$ der beiden Prozesse

$$U_t = X_t + Y_t \quad \text{und} \quad V_t = X_t - Y_t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

4. **[A 12. 3]** In den Papierfabriken der *Papyrus AG* kann die Anzahl von Störfällen pro Jahr durch einen homogenen POISSON–Prozess mit der Intensität $\lambda = 4$ modelliert werden. $\boxed{3\text{ P}}$

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten im zweiten Halbjahr 2003 mindestens 3 Störfälle auf?

   (b) Man berechne die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in (a) unter der Bedingung, dass im ersten Halbjahr 2003 bereits 2 Störfälle aufgetreten sind.

5. **[A 12. 6]** Es sei $\{N_t | t \geq 0\}$ ein homogener POISSON–Prozess mit Intensität λ. $\boxed{3\text{ P}}$

   Man zeige: Für alle $\tau > 0$ ist der durch $X_t = N_{t+\tau} - N_t$ definierte stochastische Prozess $\{X_t | t \geq 0\}$ *stationär im weiteren Sinne.*

6. **[A 13. 2]** Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix: $\boxed{4\text{ P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und berechnen Sie die Matrix der zweistufigen Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}^{(2)}$.

(b) Bei Vorgabe der Anfangsverteilung

$$P(X_0 = i) = \tfrac{1}{3}\,,\; i = 0, 1, 2\,,$$

berechne man die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 0) \quad \text{und} \quad P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2)\,.$$

7. [A 13. 9] Die MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ ist gegeben durch die Übergangsmatrix $\boxed{4\text{ P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und berechnen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeiten $P_i(T)$ für $i = 1, 2$, und $T = \{0\}$.

(b) Man bestimme die erwartete Anzahl von Schritten m_i $(i = 1, 2)$ bis zur Absorption in den Zustand 0 oder in den Zustand 3.

8. [A 13. 15] Man erstelle ein Computerprogramm, das die MARKOV–Kette aus **Beispiel 13.4** mit Übergangsmatrix $\boxed{6\text{ P}}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

simuliert. Setze die Parameter $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{3}$.

(a) Starten Sie mit Zustand 0 und führen Sie insgesamt 1000 Schritte durch. Registrieren Sie jeweils nach $n = 100, 200, 500, 1000$ Schritten die relativen Häufigkeiten des Auftretens von Zustand 0:

$$h_0(n) = \frac{\text{Häufigkeit des Auftretens von Zustand } 0}{n}\,.$$

(b) Wiederholen Sie das Experiment in (a) 8–mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch und graphisch in Form von 8 Pfaden

$$(n, h_0^j(n))\,, \quad n = 100, 200, 500, 1000\,;\; j = 1, \ldots, 8\,,$$

dar.

(c) Berechnen Sie für $n = 100, 200, 500, 1000$ die Mittelwerte und Standardabweichungen

$$\overline{h_0}(n) = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} h_0^j(n)\,, \quad s_0(n) = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{8}\left(h_0^j(n) - \overline{h_0}(n)\right)^2}$$

und vergleichen Sie die Mittelwerte $\overline{h_0}(n)$ mit der Grenzwahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{b}{a+b} = \frac{2}{5}$.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 27.1.2004, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)

(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at

(c) Username: abgabe

(d) Passwort: WS03/04

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter /incoming/wthstoch.

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{\text{30 P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 27.1.2004 9 Uhr** in HS B oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1 :	**Di. 27. 1. 2004**	**09:00-10:30**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe 2+3:	**Di. 27. 1. 2004**	**11:00-12:30**	**HS G**: DI Kern
Gruppe 4+5:	**Di. 27. 1. 2004**	**14:00-15:30**	**HS B**: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere TutorInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`

Radoslava Mirkov `rmirkov@sbox.TUGraz.at`

Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`