

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Telematiker

ÜBUNGSBLATT 4

28. 01. 2003

Familienname

Vorname

Matrikelnummer

Geben Sie bitte an,

- welche Aufgaben Sie zu Hause bearbeitet haben,
- welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. + 2. + 3. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Gesamt 4. Übungsblatt:			<input type="text"/>	<input type="text"/>
Gesamt:			<input type="text"/>	<input type="text"/>

1. [A 11.2] Es sei $\{X_t|t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess mit Verteilungsfunktion 3 P

$$F_t(x) = P(X_t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} du, \quad \mu > 0, \sigma > 0; x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Man berechne die Trendfunktion m_t des Prozesses.
 (b) Man berechne und skizziere für $\mu = 1$ und $\sigma = \frac{1}{2}$ die Funktionen

$$g_1(t) = m_t - \sqrt{\text{Var}(X_t)} \quad \text{und} \quad g_2(t) = m_t + \sqrt{\text{Var}(X_t)}.$$

2. [A 11.6] Es seien $\{X_t|t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t|t \in \mathbb{R}\}$ zwei unabhängige stochastische Prozesse mit gleicher Kovarianzfunktion $K(s, t)$, und Trendfunktionen m_t beide gleich 0. Der stochastische Prozess $\{Z_t|t \in \mathbb{R}\}$ sei gegeben durch 4 P

$$Z_t = X_t \cos \omega t - Y_t \sin \omega t.$$

Man zeige: Wenn die Prozesse $\{X_t|t \in \mathbb{R}\}$ und $\{Y_t|t \in \mathbb{R}\}$ stationär im weiteren Sinn sind, dann ist es auch der Prozess $\{Z_t|t \in \mathbb{R}\}$.

3. [A 11.9] Eine autoregressive Folge erster Ordnung sei durch 4 P

$$Y_t - 0.8 Y_{t-1} = X_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

definiert, wobei $\{X_t|t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ eine rein zufällige Folge mit den Parametern $E(X_t) = 0$ und $\text{Var}(X_t) = 1$ ist.

- (a) Man berechne die Kovarianzfunktion $K(\tau)$ und die Korrelationsfunktion $\rho(\tau)$ von Y_t .
 (b) Zeichnen Sie den Graphen der Korrelationsfunktion $\rho(\tau)$.

4. [A 12.1] Eine Feuerwehrstation einer großen Stadt erhält pro Tag (24 Stunden) im Schnitt 10 Anforderungen um Hilfe. Eine Schicht dauert 12 Stunden; alle 12 Stunden wird die Mannschaft ausgewechselt. Man nehme an, dass die Anforderungen um Hilfe einem homogenen POISSON-Prozess genügen. 5 P

- (a) Wie lange wartet die Mannschaft im Durchschnitt vom Beginn der Schicht bis zum ersten Anruf?
 (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft 6 Anforderungen um Hilfe während der Schicht bekommt?
 (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft während der Schicht keine Anforderungen um Hilfe bekommt?
 (d) Von den Hilferufen ist einer von fünf ein Fehlalarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft 6 Anforderungen um Hilfe hat, aber mit keinem Fehlalarm darunter?

5. [A 12.4] Man zeige, dass die Kovarianzfunktion eines homogenen POISSON-Prozesses mit Intensität λ durch 3 P

$$K(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

gegeben ist.

6. [A 12.9] Eine radioaktive Quelle emittiert Partikel gemäss einem POISSON-Prozess mit Parameter $\lambda = 2$ pro Minute. 3 P

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es länger als drei Minuten dauert bis das erste Partikel emittiert wird?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Partikel frühestens nach drei Minuten aber spätestens nach fünf Minuten emittiert wird?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Partikel in der Zeit zwischen drei und fünf Minuten emittiert wird?

7. [A 13.4] In einer bestimmten Region folgt die Wetterlage folgendem Muster. Ein Tag wird als *sonnig* bezeichnet, falls die Sonne mehr als 50% der Tagesstunden scheint, und als *bewölkt*, falls die Sonne weniger als 50% der Tagesstunden scheint. Die Daten lassen den Schluss zu, dass es nach einem *bewölkten* Tag gleich wahrscheinlich ist, dass der nächste Tag *sonnig* oder *bewölkt* ist. Nach einem *sonnigen* Tag ist es am darauf folgenden Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ wieder *sonnig*, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ *bewölkt*. 4 P

- (a) Wie lautet die Übergangsmatrix für diese MARKOV-Kette?
- (b) Falls es heute sonnig ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es in drei Tagen i. *sonnig*, ii. *bewölkt*?
- (c) Man berechne $\mathbf{P}^{(5)}$ und $\mathbf{P}^{(10)}$ (mit Hilfe eines Programms für symbolisches Rechnen wie z.B. Maple oder Mathematica). Wie verhält sich $\mathbf{p}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$?

8. [A 13.5] Es sei die MARKOV-Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ aus **Beispiel 13.4** gegeben: 4 P

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

- (a) **Man zeige durch vollständige Induktion:** Unter der Voraussetzung $0 < a + b \leq 1$ ist die Matrix der n -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}^{(n)}$ gegeben durch

$$\mathbf{P}^{(n)} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

- (b) Es seien $a = b = \frac{1}{10}$. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $P(X_5 = 0 | X_0 = 0)$.

Maximal erreichbare Punkteanzahl

30 P

Besprechungstermine:

Gruppe A - L: Di. 28. 01. 2003 9:15 - 10:45 HS B: UProf. Stadlober

Gruppe M - Z: Di. 28. 01. 2003 11:00 - 12:30 HS G: UProf. Stadlober

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin
oder an unsere/n TutorIn:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern kern@stat.tu-graz.ac.at

Elke Pauritsch mathe@sbox.tu-graz.ac.at

Reinhard Fiedler boss@sbox.tu-graz.ac.at