Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien

506.000

Übungsblatt 3

015. Dez. 2009

1. **[A 6.10]** Das Café auf der Acconci–Insel hat maximal 120 Sitzplätze. Zu einer geschlossenen Veranstaltung werden 130 Personen eingeladen. Aus Erfahrung weiß man, dass im Mittel 10% der eingeladenen Personen nicht erscheinen.
   (a) Sei $X=$ *Anzahl der eingeladenen Personen, die kommen*. Geben Sie die Verteilung von X an. Wie lauten $E(X), Var(X)$?
   (b) Approximieren Sie die W!, dass alle Personen, die kommen, auch einen Sitzplatz erhalten. Verwenden Sie dazu die Normalverteilung.
   (c) Wieviele Einladungen dürfen höchstens verschickt werden, damit die W! in (b) mindestens 0.95 beträgt?

2. **[A 7.1]** In einer Fabrik werden elektrische Widerstände maschinell gefertigt. Aufgrund längerer Beobachtungen weiß man, dass die von einer bestimmten Maschine produzierten Widerstände einen Mittelwert von $\mu = 152$ [Ohm] und eine Streuung von $\sigma = 2$ [Ohm] aufweisen und normalverteilt sind. Man benötigt nun eine größere Serie Widerstände von 150 Ohm mit den Toleranzen (Streuungen) ± 4 Ohm.
   (a) Wie groß würde der mittlere Ausschußanteil, wenn man zur Produktion die Maschine mit $\mu = 152$ [Ohm] und $\sigma = 2$ [Ohm] benutzt? (D.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Widerstand außerhalb der Toleranzgrenze liegt?)
   (b) Wie groß wäre der mittlere Ausschußanteil, wenn es gelänge, die Maschine bei gleicher Streuung auf den Mittelwert $\mu = 150$ [Ohm] einzustellen?

3. **[A 8.3]** Ein Gerät besteht aus 2 Einzelteilen T_1 und T_2. Die Zufallsvariablen X_1 bzw. X_2 beschreiben die Anzahl der Reparaturen, die innerhalb eines Jahres an T_1 bzw. T_2 vorgenommen werden müssen. X_1 und X_2 seien unabhängige Zufallsvariablen. Die Verteilungen seien wie folgt gegeben:

i	0	1	2	3
$P_{X_1}(X_1 = i)$	0.1	0.5	0.3	0.1

j	0	1	2
$P_{X_2}(X_2 = j)$	0.1	0.5	0.4

   (a) Mit welcher W! muss das Gerät *höchstens einmal* pro Jahr repariert werden?

(b) Berechnen Sie $E(X_1), E(X_2)$ und $Var(X_1), Var(X_2)$.

(c) Es seien $Y_1 = 2X_1 + 1$ bzw. $Y_2 = 3X_2$ die jährlichen Betriebskosten von T_1 bzw. T_2 und $Z = Y_1 + Y_2$ die jährlichen Betriebskosten des Geräts. Wie lauten $E(Z)$ und $Var(Z)$?

4. [A 8.4] Für einen zweidimensionalen ZV (X, Y) sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

X/Y	0	1	2	$P_X(X = i)$
0	1/6	1/12		1/3
1		0	1/6	
2	1/6			
$P_Y(Y = j)$	1/2		1/3	

(a) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle.

(b) Berechnen Sie $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$.

(c) Wie lautet der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$?

5. [A 8.16] Die Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ eines Zufallsvektors (X, Y) ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y},\ 0 < x < y < \infty\,.$$

(a) Man zeige, dass $f_{X,Y}(x, y)$ eine Dichte darstellt.

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$?

(c) Geben Sie $E(X), Var(X), E(Y), Var(Y)$ an.

(d) Sind X und Y unabhängig?

6. [A 8.22] Eine Maschine funktioniert nur, wenn zwei voneinander unabhängige Bauteile A und B arbeiten. Die Lebensdauern der Teile [in Stunden] seien normalverteilt mit $\mu_A = 360$, $\sigma_A = 50$ und $\mu_B = 400$, $\sigma_B = 25$.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Maschine nach 400 Betriebsstunden noch arbeitet?

(b) Teil A wird vor Teil B defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?
(Hinweis: Summe von unabhängigen normalverteilten Z.V.)

7. [A 8.34] Eine Ersatzteillieferung enthält eine Packung Kugellager, zwei Packungen Zahnräder und drei Packungen Schrauben. Die Packungsgewichte [in kg] seien als unabhängige normalverteilte Zufallsvariable

$K_1 \sim N(125, 1)$, $Z_i \sim N(84, 4)$, $i = 1, 2$; $S_j \sim N(65, 3)$, $j = 1, 2, 3$; angenommen, wobei mit $N(\mu, \sigma^2)$ der Erwartungswert $(= \mu)$ und die Varianz $(=\sigma^2)$ gemeint sind.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung mehr als 500 kg wiegt?
(Hinweis: Summe von unabhängigen normalverteilten Z.V.)

(b) Wieviele solche Lieferungen darf man maximal auf einen Lastwagen laden, damit das zulässige Gesamtgewicht der Ladung von 18 Tonnen mit einer Wahrscheinlichkeit von *mindestens* 0.99 eingehalten wird?

8. **[A 9.1]** Ein regelmäßiger Würfel wird n Mal geworfen. Dabei bezeichne $\overline{X}$ das arithmetische Mittel der Ergebnisse. Wie groß ist n mindestens zu wählen, damit $P_{\bar{X}}(3.4 \leq \overline{X} \leq 3.6) \geq 0.9$ wird, falls

(a) die *TSCHEBYSCHEV–Ungleichung* benutzt wird,

(b) die Approximation durch die Normalverteilung angewandt wird?

Besprechungstermine:

Gruppe 1:	**Di. 15. 12. 2009**	**11:45 - 13:15**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe 2:	**Di. 15. 12. 2009**	**11:45 - 13:15**	**HS G**: DI Jirak
Gruppe 3:	**Di. 15. 12. 2009**	**14:15 - 15:45**	**HS B**: DI Jirak

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Moritz Jirak `m0ritz@yahoo.com`

Markus Zahrnhofer `markus.zahrnhofer@student.tugraz.at`

Markus Kügerl `kuegerl@student.TUGraz.at`

Brigitte Pfeiler `b.pfeiler@student.TUGraz.at`

Lisa Stadlmüller `lisa86@sbox.TuGraz.at`

Lösungen:

1. (a) $P(X = k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $p = 0.9$ $E(X) = n0.9$, $Var(X) = n0.09$

   (b) $P\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{120-n0.9}{\sqrt{n0.09}}\right)$

   (c) 127

2. (a) $p = 0.16$

   (b) $p = 0.046$

3. (a) 0.11

   (b) $E(X_1) = 1.4$, $E(X_2) = 1.3$, $\mathrm{Var}(X_1) = 0.64$, $\mathrm{Var}(X_2) = 0.41$

   (c) $E(Z) = 7.7$, $\mathrm{Var}(Z) = 6.25$

4. (b) $E(X) = 1$, $E(Y) = 5/6$, $\mathrm{Var}(X) = 2/3$, $\mathrm{Var}(Y) = 29/36$

   (c) $\rho(X,Y) = 0$

5. (b) $f_X(x) = e^{-x}$, $f_Y(y) = y\ e^{-y}$

   (c) $E(X) = Var(X) = 1$, $E(Y) = 2$, $Var(Y) = 2$

   (d) nein

6. (a) 0.106

   (b) 0.763

7. (a) ~ 0

   (b) 36

8. (a) $n \geq 2917$

   (b) $n \geq 790$