Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

12. Dez. 2006

1. **[A 7.6]** Interpretiert man eine stetige Zufallsvariable $T \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $F_T(t)$ und Dichte $f_T(t)$ als *Lebensdauer* eines Systems, so heißt

$$a(t) := \frac{1}{1 - F_T(t)} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

Ausfallrate (hazard rate) des Systems. $a(t) \cdot \Delta t$ ist als eine Näherung für die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitraum $(t, t + \Delta t]$ ausfällt, wenn es zum Zeitpunkt t noch intakt war. Berechnen Sie die Ausfallraten $a(t)$ für

(a) eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & 0 \leq t < \infty, \end{cases}$$

(b) eine *Weibull–verteilte* Zufallsvariable T mit Parametern $s > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t^s) & 0 \leq t < \infty, \end{cases}$$

(c) eine *Hjorth–verteilte* Zufallsvariable T mit den Parametern $q > 0$, $r > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{\exp(-r \cdot t^2/2)}{(1+q \cdot t)^{\lambda/q}} & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

2. **[A 7.10]** Die Zufallsvariable X sei $\boxed{\text{P}}$

(a) diskret gleichverteilt auf $\{4, 5, 6, 7\}$,

(b) stetig gleichverteilt in $[3, 10]$,

(c) exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$,

(d) normalverteilt mit $\mu = 5$ und $\sigma = 1$.

Man berechne jeweils $P_X(0 < X \leq 5)$, $P_X(6 \leq X < 10)$, sowie $E(X)$ und $Var(X)$.

3. **[A 8.2]** Für eine bestimmte Kommission sollen 3 Studenten *zufällig* aus einem Pool von 10 Studenten, der aus 2 Erstsemestrigen, 3 Drittsemestrigen, 2 Fünftsemestrigen und 3 Studenten aus höheren Semestern besteht, ausgewählt werden. Sei $X = $ *#(Drittsemestrige)* und $Y = $ *#(Fünftsemestrige)*, die in die Kommission gewählt werden. $\boxed{\text{P}}$

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame W–Funktion $P_{X,Y}(X = i, Y = j)$ von (X, Y).

(b) Wie lauten $P_X(X = i)$ und $P_Y(Y = j)$?

(c) Ist $P_{X,Y}(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)$ größer als $\frac{2}{3}$?

(d) Man berechne $E(X - Y)$.

4. [A 8.6] X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{4\pi}x^2 - y} & -\infty < x < \infty, y \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ von X und $f_Y(y)$ von Y?

(b) Stellen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ und die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ graphisch dar.

(c) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariable?

5. [A 8.8] Der ZV (X, Y) besitzt die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < 1\,,\ 0 < y < x\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Man berechne die Randdichten von X und Y und zeige, dass der Korrelationskoeeffizient $\rho(X,Y) = \sqrt{3/7}$.

6. [A 8.17] Eine Ersatzteillieferung enthält eine Packung Kugellager, zwei Packungen Zahnräder und drei Packungen Schrauben. Die Packungsgewichte [in kg] seien als unabhängige normalverteilte Zufallsvariable $K_1 \sim N(125, 1)\,,\ Z_i \sim N(84, 2)\,,\ i = 1, 2\,;\ S_j \sim N(65, \sqrt{3})\,, j = 1, 2, 3$; angenommen. $\boxed{\text{P}}$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung mehr als 500 kg wiegt?

(b) Wieviele solche Lieferungen darf man maximal auf einen Lastwagen laden, damit das zulässige Gesamtgewicht der Ladung von 18 Tonnen mit einer Wahrscheinlichkeit von *mindestens* 0.99 eingehalten wird?

7. [A 8.27] Es seien zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable X und Y mit folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen gegeben: $\boxed{\text{P}}$

$X = i$	1	2	3	$Y = j$	0	2	4
$P_X(X = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$P_Y(Y = j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

(a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Zufallsvektors (X, Y).

(b) Man berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Z = X + Y$.

(c) Wie lauten $E(Z)$ und $P_Z(3 \leq Z \leq 5)$?

8. [A 9.6] Von einer Zufallsvariablen X kennt man nur den Erwartungswert und die Varianz mit $E(X) = 10$ und $Var(X) = 10$. $\boxed{\text{P}}$

(a) Man gebe eine Abschätzung für $P_X(5 \leq X \leq 15)$ mit Hilfe der TSCHEBYSCHEV–Ungleichung an.

(b) X sei POISSON–verteilt mit Parameter $\lambda = 10$. Berechnen Sie $P_X(5 \leq X \leq 15)$ exakt und näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung.

Besprechungstermine:

Gruppe A:	**Di. 12. 12. 2006**	**10:45 - 13:00**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe B:	**Di. 12. 12. 2006**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: Dr. Hörmann
Gruppe C:	**Di. 12. 12. 2006**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: Dr. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere Studienassistentinnen:

Dr. Siegfried Hörmann `shoermann@TUGraz.at`

Dipl.-Math. Gordana Djuras `gordana.djuras@joanneum.at`

Verena Feirer `vfeirer@sbox.TUGraz.at`

DI Johannes Schauer `johannes.schauer@TUGraz.at`

Lösungen:

1. (a) $a(t) = \lambda$

   (b) $a(t) = \lambda s t^{s-1}$

   (c) $a(t) = rt + \frac{\lambda}{1+qt}$

2.

	$P(0 < X \leq 5)$	$P(6 \leq X < 10)$	$E(X)$	$Var(X)$
(a)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{4}$
(b)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{49}{12}$
(c)	$1 - e^{-5/2}$	$e^{-3} - e^{-5}$	2	4
(d)	0.4999	0.1586	5	1

3. (a)

Y / X	0	1	2	3	$P_Y(Y=j)$
0	$\frac{10}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_X(X=i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$	

   (c) $P(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1) = \frac{81}{120}$

   (d) $E(X - Y) = \frac{3}{10}$

4. (a) $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\pi}}$ für $-\infty < x < \infty$
   $f_Y(y) = e^{-y}$ für $y \geq 0$

   (c) ja

5. $f_X(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$
   $f_Y(y) = -\ln(y)$ für $0 \leq y \leq 1$
   $E(X) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}$, $E(Y) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{7}{144}$, $E(XY) = \frac{1}{6}$

6. (a) $p = 0.0023$

   (b) 36

7. (a)

Y / X	1	2	3
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$

   (b)

Z	1	2	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$

   (c) $E(Z) = \frac{19}{4}$
   $P(3 \leq Z \leq 5) = \frac{21}{32}$

8. (a) $P(5 \leq X \leq 15) \geq \frac{3}{5}$

   (b) $P(5 \leq X_{\text{Poisson}} \leq 15) = 0.922$
   $P(4.5 \leq X_{\text{normal}} \leq 15.5) = 0.918$