Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

13. 12. 2005

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer* *Gruppe*

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer* *Gruppe*

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1.-2. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 3.Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1.- 3. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 7.9] 2% der CDs eines günstigen Sonderangebotes sind mangelhaft. Ein Computerfreak kauft eine Packung zu 25 Stück. Er will Videos, Musik und Software auf den CDs sichern und benötigt dafür den Speicherplatz von 23 CDs. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er sämtliche Programme auf nicht defekte CDs überspielen? Man löse die Aufgabe $\boxed{\text{3P}}$

(a) exakt mit der Binomialverteilung,

(b) näherungsweise mit der POISSON–Verteilung.

(c) Wie gut ist in diesem Fall die Approximation durch die Normalverteilung?

2. [A 7.15] Die Zufallsvariable X sei $\boxed{\text{3P}}$

(a) binomialverteilt mit $n = 7, p = \frac{1}{4}$,

(b) diskret gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 6\}$,

(c) POISSON–verteilt mit $\lambda = 2$,

(d) exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{1}{2}$,

(e) standardnormalverteilt.

Man berechne jeweils $P(X \in A)$ mit $A = (-1, 2] \cup \{6\}$.

3. [A 7.23] Die Schneefallmengen [in cm] im Dezember, Jänner und Feber der Schiregion Lungau werden als normalverteilte Zufallsvariable $\boxed{\text{3P}}$

$$D \sim N(80, 10), \quad J \sim N(100, 20), \quad F \sim N(110, 25)$$

angesehen.

(a) Geben Sie die Verteilung der Gesamtschneefallmenge in den drei Wintermonaten an.

(b) Wie lautet die Verteilung des über 15 Jahre gebildeten Mittelwertes der Schneefallmengen über Dezember und Jänner zusammen.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneit es im Jänner mehr als im Feber?

4. [A 8.4] Der Zufallsvektor (X, Y) hat die Dichte $\boxed{\text{4P}}$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(1+x)^4}\, e^{-\frac{y}{1+x}} & x, y \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Man berechne die Randdichten $f_X(x)$ von X und $f_Y(y)$ von Y.

(b) Stellen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ und die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ (mit einer Software) graphisch dar.

5. [A 8.11] Die *diskreten* Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte 1, 2, 3 an. Dabei sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $\boxed{4\text{P}}$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.50\,; & P(X=2) &= 0.30\,; \\ P(Y=1) &= 0.70\,; & P(Y=2) &= 0.20\,; \\ P(X=1,Y=1) &= 0.35\,; & P(X=2,Y=2) &= 0.06\,; \\ P(X=3,Y=1) &= 0.20\,. \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie $P(X=i,Y=j)$ für $i,j\in\{1,2,3\}$,

(b) $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\rho(X,Y)$.

(c) Sind X und Y unabhängig?

6. [A 8.13] $X_1,\ldots,X_n$ seien unabhängige, identisch geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p, 0<p<1$ (siehe Abschnitt 6.2): $\boxed{4\text{P}}$

$$P(X_i=k)=pq^k, k=0,1,2,\ldots; q=1-p$$

(a) Man zeige (durch Induktion über n), dass die Summe $S_n=X_1+\cdots+X_n$ *negativ binomialverteilt* mit den Parametern n und p, d.h.

$$P(S_n=k)=\binom{n+k-1}{n-1}q^kp^n\ ,k=0,1,2,\ldots$$

Hinweis: Man zeige zuerst durch Induktion, dass

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j-1}{n-1}=\binom{n+k}{n}$$

und verwende dazu

$$\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}.$$

(b) Man zeige, dass das Minimum von $X_1,\ldots,X_n$ geometrisch verteilt ist.
Hinweis: Man bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\geq k)$.

(c) Die Erzeugende Funktion der Zufallsvariablen X_i ist gegeben durch

$$G_{X_i}(s)=E\left(s^{X_i}\right)=\frac{p}{1-qs}\,.$$

Ermitteln Sie die Erzeugende Funktion $G_{S_n}(s)$ über die Erzeugenden Funktionen der X_i.

(c') Ermitteln Sie die Erzeugende Funktion $G_{S_n}(s)$ gemäss der Definition $G_{S_n}(s)=E\left(s^{S_n}\right)$. (2 Zusatzpunkte)

(d) Berechnen sie mit Hilfe der Erzeugenden Funktionen $E(S_n)$ und $Var(S_n)$.

7. [A 9.1] Man schätze die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass bei n–maligem Würfeln mit einem regelmäßigen (sechseitigen) Würfel das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der Ergebnisse zwischen 3.4 und 3.6 liegt. Wie groß ist n mindestens zu wählen, damit $P(3.4 \leq \overline{X} \leq 3.6) \geq 0.9$ wird, falls $\boxed{\text{4P}}$

(a) die *TSCHEBYSCHEV–Ungleichung* benutzt wird,

(b) die Approximation durch die Normalverteilung angewandt wird?

8. [A 9.7] [Monte Carlo Integration] Bestimmmen sie mittels Simulation eine Approximation für das Integral $\boxed{\text{5P}}$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

das die Fläche unter dem Viertelkreis im ersten Quadranten ist.

Verwenden sie dazu das folgende *Trefferverfahren:* Bezeichne K die Fläche unter der Kreislinie im ersten Quadranten. Man betrachte eine auf dem Quadrat $R = [0,1] \times [0,1]$ gleichverteilte Folge $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ von n Zufallsvektoren. Das Verhältnis

$$\hat{S}_m = \frac{\sharp\{(U_i, V_i) \in K | i = 1, \ldots, m\}}{m}, \quad m \leq n,$$

ist ein Schätzer für I.

(a) Generieren Sie eine Folge $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ von $n = 1000$ Zufallsvektoren. Berechnen Sie $\hat{S}_m$ für die ersten $m = 100, 200, 500, 1000$ Zufallsvektoren der obigen Folge. Vergleichen sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert $p = \pi/4$ des Integrals I.

(b) Wiederholen sie das Experiment in (a) 10 Mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch oder (besser) graphisch in Form der Pfade

$$(m, \hat{S}_m), \quad m = 100, 200, 500, 1000$$

dar.

(c) Ein Experiment besteht aus m BERNOULLI–Experimenten, definiert durch die Zufallsvariable X_i mit dem Wert $X_i = 1$, falls $(U_i, V_i) \in K$ und dem Wert 0 sonst. Nach dem *Schwachen Gesetz der großen Zahl* strebt $\hat{S}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ stochastisch gegen p, d.h.

$$P(|\hat{S}_m - p| > \epsilon) \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten durch die Normalverteilung für $\epsilon = 0.02$, $m = 100, 200, 500, 1000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe–Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 12. 12. 05, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (freie Downloads z.B. unter: `http://www.thefreesite.com/Free_Software/FTP_freeware/`)

(b) Name des Rechners eingeben: bs2.tugraz.at

(c) Username: abgabe.stat

(d) Password: WS05/06

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter **/incoming/wthstoch**

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{\text{30 P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 13.12.2005, 10:45 Uhr** in HS G.

Besprechungstermine:

Gruppe A:	**Di. 13. 12. 2005**	**10:45 - 13:00**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe B:	**Di. 13. 12. 2005**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: Mag. Hörmann
Gruppe C:	**Di. 13. 12. 2005**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: Mag. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Mag. Siegfried Hörmann `shoermann@TUGraz.at`

Gordana Djuras `g.djuras@TUGraz.at`

Verena Feirer `vfeirer@sbox.TUGraz.at`

Johannes Schauer `schauer@sbox.TUGraz.at`