Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

14. 12. 2004

Familienname(n) *Vorname(n)* *Matr.nr(n)/Ü.einheit*

Bitte bei Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern, abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1-2. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 3. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1- 3. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 7. 3] Die Dauer T einer bestimmten Art von Telefongesprächen erfüllt die Bedingung: $\boxed{3\text{ P}}$

$$P_T(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1-a)e^{-\mu t} \quad t \geq 0, 0 \leq a \leq 1, \lambda, \mu > 0\,.$$

Man berechne $E(T)$ und $Var(T)$.

2. [A 7. 12] Bestimmen Sie $c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt: $\boxed{3\text{ P}}$

$$P_X(X \leq c) = 0.1; \quad P_X(X \geq d) = 0.1, \text{ falls } X$$

(a) gleichverteilt auf $[0, 9]$,

(b) $N(0, 1)$–verteilt,

(c) exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{1}{3}$.

3. [A 8. 5] Der *bivariate Cauchy–verteilte* ZV (X, Y) hat die Dichte $\boxed{4\text{ P}}$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{c}{2\pi}(c^2 + x^2 + y^2)^{-3/2}\,, -\infty < x < \infty\,, -\infty < y < \infty\,, c > 0$$

(a) Man berechne die Randdichten $f_X(x)$ von X und $f_Y(y)$ von Y.

(b) Stellen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ und die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ graphisch dar.

4. [A 8. 7] Der ZV (X, Y) hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\boxed{3\text{ P}}$

$$P_{X,Y}(X = i, Y = j) = p_{ij} = \frac{2}{n(n+1)}\,, \ i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, i\,.$$

Man zeige, dass X und Y nicht unabhängig sind.

5. [A 8. 8] Der ZV (X, Y) besitzt die Dichte $\boxed{4\text{ P}}$

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < 1\,,\ 0 < y < x\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Man berechne die Randdichten von X und Y und zeige, dass der Korrelationskoeeffizient $\rho(X, Y) = \sqrt{3/7}$.

6. [A 8. 19] Man betrachte folgendes Spiel: Die Pikkarten eines Skatspiels (Ass, König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht, Sieben) werden gut gemischt. Anschließend werden hintereinander *ohne Zurücklegen* zwei Karten gezogen. Bei jeder einzelnen Ziehung kann man einen bestimmten Betrag gewinnen. Und zwar erhält man für das Ziehen einer Ass 0.4 Euro, für das Ziehen von König, Dame oder Bube jeweils 0.1 Euro. Bei den übrigen vier Karten bekommt man nichts. X sei der Gewinn beim ersten Zug und Y der Gewinn beim zweiten Zug. $\boxed{4\text{ P}}$

(a) Man bestimme die Verteilung von $Z = (X, Y)$.

(b) Man berechne die W–Funktionen von X und Y.

(c) Man berechne $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ und $\rho(X, Y)$.

7. [A 8. 28] Ein Computer arbeitet mit Wahrscheinlichkeit 0.98 innerhalb einer Stunde fehlerlos. Die Anzahl der auftretenden Fehler sei POISSON–verteilt, die Fehleranzahlen innerhalb verschiedener Zeitspannen seien unabhängig. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Bestimmen Sie den Parameter der POISSON–Verteilung, sowie die zu erwartende Fehleranzahl innerhalb einer Stunde.

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Computer 24 Stunden lang

i. fehlerlos arbeitet, ii. maximal 2 Fehler macht?

8. [A 9. 7] [Monte Carlo Integration] Bestimmen Sie mittels Simulation eine Approximation für das Integral $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, das die Fläche unter dem Viertelkreis im ersten Quadranten ist. Verwenden Sie dazu das folgende *Trefferverfahren:* $\boxed{6\text{ P}}$

Bezeichne K die Fläche unter der Kreislinie im ersten Quadranten. Man betrachte eine auf dem Quadrat $R = [0,1]\times[0,1]$ gleichverteilte Folge $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ von n Zufallsvektoren. Das Verhältnis

$$\hat{S}_m = \frac{\sharp\{(U_i, V_i) \in K | i = 1, \ldots, m\}}{m}, \quad m \leq n,$$

ist ein Schätzer für I.

(a) Generieren Sie eine Folge $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ von $n = 1000$ Zufallsvektoren. Berechnen Sie $\hat{S}_m$ für die ersten $m = 100,\ 200,\ 500,\ 1000$ Zufallsvektoren der obigen Folge. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert $p = \frac{\pi}{4}$ des Integrals I.

(b) Wiederholen Sie das Experiment in (a) 10 Mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch oder (besser) graphisch in Form der Pfade

$$(m, \hat{S}_m)\,, \quad m = 100,\ 200,\ 500,\ 1000 \text{ dar.}$$

(c) Ein Experiment besteht aus m BERNOULLI–Experimenten, definiert durch die Zufallsvariable X_i mit dem Wert $X_i = 1$, falls $(U_i, V_i) \in K$, und dem Wert 0 sonst. Nach dem *Schwachen Gesetz der großen Zahl* strebt $\hat{S}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ stochastisch gegen p, d.h.

$$P_{\hat{S}_m}(|\hat{S}_m - p| > \epsilon) \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten durch die Normalverteilung für $\epsilon = 0.02$, $m = 100,\ 200,\ 500,\ 1000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis 1: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die **Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile)** bis **Montag, den 13.12.004, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)

(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at

(c) Username: abgabe

(d) Passwort: WS04/05

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen max. 8 Zeichen - ein Name bei einer 2-er Gruppe reicht) unter **/incoming/wthstoch**.

Hinweis 2: Falls nur das Prorammierbeispiel berechnet wird, bitte entweder das Deckblatt mit angekreuztem Beispiel 8 abgeben oder ein Mail an die StudienassistInnen richten.

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{\text{30 P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 14.12.2004 11.00 Uhr** im HS G oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1:	**Di. 14. 12. 2004**	**11:00-12:30**	**HS G**: UProf. Stadlober
Gruppe 2:	**Di. 14. 12. 2004**	**13:00-14:30**	**HS B**: DI Kern
Gruppe 3:	**Di. 14. 12. 2004**	**14:45-16:15**	**HS B**: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere StudienassistentInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`

Johannes Poglitsch `pogo@sbox.TUGraz.at`

Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`