Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

16. 12. 2003

Familienname(n) Vorname(n) Matr.nr(n)/Ü.einheit

Bitte bei Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern, abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1-2. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 3. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1- 3. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 7. 4] *PARETO–Verteilung* $\boxed{3\ \text{P}}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ b/x^{b+1} & x \geq 1, b > 0\,. \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass $E(X^k)$ nur für $k < b$ existiert.

(b) Sei $b > 2$. Man berechne den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

(c) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und die Umkehrfunktion $F_X^{-1}(u)$ der Verteilungsfunktion?

2. [A 7. 24] Ein Versuch habe die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.01$ und wird n mal unabhängig wiederholt. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg größer als 0.6 wird? $\boxed{3\ \text{P}}$

(a) Lösen Sie die Aufgabe exakt.

(b) Verwenden Sie die POISSON–Approximation.

(c) Benutzen Sie die Normal-Approximation.

3. [A 8. 6] X und Y haben die gemeinsame Dichte $\boxed{3\ \text{P}}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{4\pi}x^2 - y} & -\infty < x < \infty, y \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ von X und $f_Y(y)$ von Y?

(b) Stellen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ und die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ graphisch dar.

(c) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariable?

4. [A 8. 13] $\boxed{5\ \text{P}}$

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p, 0 < p < 1$ (siehe Abschnitt 6.2):

$$P_{X_i}(X_i = k) = pq^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ q = 1 - p.$$

(a) Man zeige (durch Induktion über n), dass die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *negativ binomialverteilt* ist mit den Parametern n und p, d.h.

$$P_{S_n}(S_n = k) = \binom{n+k-1}{n-1}\, q^k p^n,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Man zeige, dass das Minimum von $X_1, \ldots, X_n$ wiederum geometrisch verteilt ist.

(c) Die Erzeugende Funktion der Zufallsvariablen X_i ist gegeben durch $G_{X_i}(s) = E\left(s^{X_i}\right) = p(1 - qs)^{-1}$. Ermitteln Sie die Erzeugende Funktion $G_{S_n}(s)$

i. über die Erzeugenden Funktionen der X_i,

ii. gemäß der Definition $G_{S_n}(s) = E\left(s^{S_n}\right)$.

(d) Berechnen Sie $E(S_n)$ und $Var(S_n)$.

5. [A 8. 15] Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig mit X exponentialverteilt $Exp(2)$ und Y normalverteilt $N(2,1)$. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Man berechne die Erwartungswerte und Varianzen der Zufallsvariablen $U = 2X - Y$ und $V = 3Y - 2X$.

(b) Wie lauten die Kovarianz $Cov(U,V)$ und die Korrelation $\rho(U,V)$?

(c) Man schätze die Wahrscheinlichkeit $P_{X,Y}((X-Y) \leq 0)$ mit Hilfe der TSCHEBYSCHEV–Ungleichung nach unten ab.

6. [A 8. 30] Ein Benzintank habe am Beginn eines Monats den (zufälligen) Inhalt Y. Ein (zufälliger) Anteil X wird während des Monats verbraucht. Die gemeinsame Verteilung von (X,Y) sei gegeben durch die Dichte $\boxed{4\text{ P}}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{k^2} & 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

wobei k die vorgegebene Kapazität des Tanks ist.

(a) Man zeige, dass $f_{X,Y}(x,y)$ eine Dichte darstellt.

(b) Wie lauten die Randdichte $f_X(x)$ und $E(X)$?

(c) Man berechne $P_X(X \leq \frac{k}{2})$ und $P_{X,Y}(X \leq \frac{k}{2},\, Y \geq \frac{3k}{4})$.

7. [A 8. 33] Der Kern eines Transformators besteht aus 24 Blechen mit je einer (einseitigen) Isolierschicht. Die Dichte [in mm] der Bleche B_i und der Isolierschichten I_i seien unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit $B_i \sim N(0.9, 0.04)$ und $I_i \sim N(0.3, 0.02)$. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blech zusammen mit einer Isolierschicht zwischen 1.15 mm und 1.3 mm dick ist?

(b) Die Spulenöffnung sei 29.2 mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kern dicker als die Spulenöffnung ist?

8. [A 9. 7] [Monte Carlo Integration] Bestimmen Sie mittels Simulation eine Approximation für das Integral $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, das die Fläche unter dem Viertelkreis im ersten Quadranten ist. Verwenden Sie dazu das folgende *Trefferverfahren:* $\boxed{6\text{ P}}$

Bezeichne K die Fläche unter der Kreislinie im ersten Quadranten. Man betrachte eine auf dem Quadrat $R = [0,1]\times[0,1]$ gleichverteilte Folge $(U_1,V_1),\ldots,(U_n,V_n)$ von n Zufallsvektoren. Das Verhältnis

$$\hat{S}_m = \frac{\sharp\{(U_i,V_i) \in K | i = 1,\ldots,m \text{ ist ein Schätzer für } I\ .\}}{m}, \quad m \leq n,$$

(a) Generieren Sie eine Folge $(U_1,V_1),\ldots,(U_n,V_n)$ von $n = 1000$ Zufallsvektoren. Berechnen Sie $\hat{S}_m$ für die ersten $m = 100, 200, 500, 1000$ Zufallsvektoren der obigen Folge. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert p des Integrals I.

(b) Wiederholen Sie das Experiment in (a) 10 Mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch oder (besser) graphisch in Form der Pfade

$$(m, \hat{S}_m)\,, \quad m = 100, 200, 500, 1000 \text{ dar.}$$

(c) Ein Experiment besteht aus m BERNOULLI–Experimenten, definiert durch die Zufallsvariable X_i mit dem Wert $X_i = 1$, falls $(U_i, V_i) \in K$, und dem Wert 0 sonst. Nach dem *Schwachen Gesetz der großen Zahl* strebt $\hat{S}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ stochastisch gegen p, d.h.

$$P_{\hat{S}_m}(|\hat{S}_m - p| > \epsilon) \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten durch die Normalverteilung für $\epsilon = 0.02$, $m = 100, 200, 500, 1000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 15.12.03, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)

(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at

(c) Username: abgabe

(d) Passwort: WS03/04

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter /incoming/wthstoch.

Maximal erreichbare Punkteanzahl 30 P

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 16.12.2003 9 Uhr** in HS B oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1 :	**Di. 16. 12. 2003**	**09:00-10:30**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe 2+3:	**Di. 16. 12. 2003**	**11:00-12:30**	**HS G**: DI Kern
Gruppe 4+5:	**Di. 16. 12. 2003**	**14:00-15:30**	**HS B**: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere TutorInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`

Radoslava Mirkov `rmirkov@sbox.TUGraz.at`

Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`