Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Telematiker

Übungsblatt 3

10. 12. 2002

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie zu Hause bearbeitet haben,

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. + 2. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 3. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. + 2. + 3. Übungsblatt:		☐	☐

1. [**A 7.21**] Ein Ferienhotel in einem renommierten Wintersportort hat einen Vertrag mit einem Reisebüro für ein Kontingent von 77 Betten. Aufgrund der großen Nachfrage nimmt das Reisebüro aber 80 Buchungen vor. Aus Erfahrung weiß man, dass 5% der Reservierungen nicht in Anspruch genommen werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Hotel *mindestens einen Gast* wegen Überbuchung umquartieren muss. 3 P

(a) Wie lautet die exakte Lösung?

(b) Benutzen Sie die POISSON–Verteilung als Annäherung.

(c) Welches Ergebnis liefert die Approximation durch die Normalverteilung?

2. [**A 7.23**] Die Schneefallmengen [in cm] im Dezember, Jänner und Feber der Schiregion Lungau werden als normalverteilte Zufallsvariable 3 P

$$D \sim N(80, 10), \quad J \sim N(100, 20), \quad F \sim N(110, 25)$$

angesehen.

(a) Geben Sie die Verteilung der Gesamtschneefallmenge in den drei Wintermonaten an.

(b) Wie lautet die Verteilung des über 15 Jahre gebildeten Mittelwertes der Schneefallmengen über Dezember und Jänner zusammen.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneit es im Jänner mehr als im Feber?

3. [**A 8.2**] Für eine bestimmte Kommission sollen 3 Studenten *zufällig* aus einem Pool von 10 Studenten, der aus 2 Erstsemestrigen, 3 Drittsemestrigen, 2 Fünftsemestrigen und 3 Studenten aus höheren Semestern besteht, ausgewählt werden. Sei $X = \#(\textit{Drittsemestrige})$ und $Y = \#(\textit{Fünftsemestrige})$, die in die Kommission gewählt werden. 3 P

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame W–Funktion $P_{X,Y}(X = i, Y = j)$ von (X, Y).

(b) Wie lauten $P_X(X = i)$ und $P_Y(Y = j)$?

(c) Ist $P_{X,Y}(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)$ größer als $\frac{2}{3}$?

(d) Man berechne $E(X - Y)$.

4. [**A 8.4**]

Der Zufallsvektor (X, Y) hat die Dichte 4 P

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(1+x)^4}\, e^{-\frac{y}{1+x}} & x, y \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Man berechne die Randdichten $f_X(x)$ von X und $f_Y(y)$ von Y.

(b) Stellen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ und die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ graphisch dar.

5. [A 8.21] n voneinander unabhängige Jobs werden zur Bearbeitung in einem Parallelrechner auf n freie Knoten verteilt, wobei die Bearbeitungszeit T_i von Job i als $Exp(\lambda_i)$–verteilt angenommen wird. $\boxed{5\text{ P}}$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der gesamten Bearbeitungszeit $X := \max(T_1, \dots, T_n)$, wenn die Bearbeitung beendet wird, sobald *alle* Jobs vollständig bearbeitet wurden.

(b) Man bestimme die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ der gesamten Bearbeitungszeit $Y := \min(T_1, \dots, T_n)$, wenn die Bearbeitung beendet wird, sobald ein Job vollständig bearbeitet wurde (sog. *Wettbewerbsparallelität*. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn für die Lösung eines Problems n unterschiedliche (sequentielle) Verfahren zur Verfügung stehen, ohne dass bekannt ist, welches Verfahren für die konkrete Anwendung am besten geeignet ist.)

(c) Wie groß ist die mittlere Bearbeitungszeit $E(Y)$? Man interpretiere das Ergebnis für den Spezialfall $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Gesamtzeit X bzw. Y

i. zwischen 15 und 25 [ms], ii. unter 15 [ms], iii. unter 10 [ms],

wenn $n = 5$ Jobs zur Bearbeitung anstehen und die mittlere Bearbeitungszeit pro Job auf 20 [ms] geschätzt wird?

6. [A 8.26] Die Zufallsvariablen X und Y seien diskret verteilt mit den Werten $1, 2, 3$ bzw. $0, 1, 2$. Y sei $B(2, 1/2)$–verteilt. Die folgende Tabelle enthält die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{X|Y}(X = i|Y = k)$ für $i = 1, 2, 3$ und $k = 0, 1, 2$. $\boxed{3\text{ P}}$

	i		
k	1	2	3
0	1/2	1/2	0
1	1/4	1/4	1/2
2	0	1/4	3/4

(a) Man berechne die Wahrscheinlichkeiten $P_{X,Y}(X = i, Y = k)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{0, 1, 2\}$.

Anmerkung: $P_{X|Y}(X = i|Y = k) = \dfrac{P_{X,Y}(X = i, Y = k)}{P_Y(Y = k)}$.

(b) Ermitteln Sie die Randdichte von X.

(c) Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ und $Var(Y)$.

(d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.

7. **[A 8.32]** Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig. X sei gleichverteilt auf $(-1,1)$ und Y normalverteilt $N(0,1)$. $\boxed{3\text{ P}}$

(a) Man berechne Erwartungswerte und Varianzen der Zufallsvariablen $V = X+Y$ und $W = 3Y - 2X$.

(b) Wie lauten die Kovarianz $Cov(V,W)$ und die Korrelation $\rho(V,W)$?

(c) Man schätze die Wahrscheinlichkeit $P_V(|V| \leq 2)$ mit Hilfe der TSCHEBYSCHEV–Ungleichung nach unten ab.

8. **[A 9.7]** **[Monte Carlo Integration]** Bestimmmen Sie mittels Simulation eine Approximation für das Integral $\boxed{6\text{ P}}$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

das ist die Fläche unter dem Viertelkreis im ersten Quadranten.

Verwenden Sie dazu das folgende *Trefferverfahren:* Bezeichne K die Fläche unter der Kreislinie im ersten Quadranten. Man betrachte eine auf dem Quadrat $R = [0,1] \times [0,1]$ gleichverteilte Folge $(U_1,V_1),\ldots,(U_n,V_n)$ von n Zufallsvektoren. Das Verhältnis

$$\hat{S}_m = \frac{\sharp\{(U_i,V_i) \in K | i = 1,\ldots,m\}}{m}, \quad m \leq n,$$

ist ein Schätzer für I.

(a) Generieren Sie eine Folge $(U_1,V_1),\ldots,(U_n,V_n)$ von $n = 1000$ Zufallsvektoren. Berechnen Sie $\hat{S}_m$ für die ersten $m = 100, 200, 500, 1000$ Zufallsvektoren der obigen Folge. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert p des Integrals I.

(b) Wiederholen Sie das Experiment in (a) 10 Mal und stellen Sie das Resultat tabellarisch oder (besser) graphisch in Form der Pfade

$$(m, \hat{S}_m)\,, \quad m = 100, 200, 500, 1000$$

dar.

(c) Ein Experiment besteht aus m BERNOULLI–Experimenten, definiert durch die Zufallsvariable X_i mit dem Wert $X_i = 1$, falls $(U_i,V_i) \in K$, und dem Wert 0 sonst. Nach dem *Schwachen Gesetz der großen Zahl* strebt $\hat{S}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ stochastisch gegen p, d.h.

$$P_{\hat{S}_m}(|\hat{S}_m - p| > \epsilon) \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten durch die Normalverteilung für $\epsilon = 0.02$, $m = 100, 200, 500, 1000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe–Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie (**Quellcode, exe-File, Ergebnisfile**) bis **Montag, den 9. 12., 20 Uhr** an uns.

Bei Fehlen einer dieser Dateien werden **keine Punkte** vergeben.

Die Übertragung erfolgt über anonymous ftp wie üblich:

1. Starten des ftp–Programms (beispielweise das von Onnet angebotene)
2. Name des Rechners eingeben: `statistik.tu-graz.ac.at`
3. Username: `anonymous`
4. Password: `guest`
5. Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter `statistik.tu-graz.ac.at/incoming/wthtele`

Maximal erreichbare Punkteanzahl 30 P

Besprechungstermine:

Gruppe A - L:	**Di. 10. 12. 2002**	**9:15 - 10:45**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe M - Z:	**Di. 10. 12. 2002**	**11:00 - 12:30**	**HS G**: UProf. Stadlober

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere/n TutorIn:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Elke Pauritsch `mathe@sbox.tu-graz.ac.at`

Reinhard Fiedler `boss@sbox.tu-graz.ac.at`