Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien

506.000

Übungsblatt 2

24. Nov. 2009

1. [A 5.3]

(a) Für welche Werte von c definieren die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_k = P_X(X = k)$ auf den positiven ganzen Zahlen $k = 1, 2, \ldots$?

i. $p_k = c\,\dfrac{2^k}{k!}$ (modifizierte POISSON)

ii. $p_k = \dfrac{c}{2^k}$ (geometrisch)

iii. $p_k = \dfrac{c}{k2^k}$ (logarithmisch)

iv. $p_k = \dfrac{c}{k^2}$ (invers quadratisch)

(b) Wie lauten die Erzeugenden Funktionen $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$?

(c) Für welche Verteilungen existiert der Erwartungswert $E(X)$? Geben Sie diesen gegebenfalls an.
Hinweis: Man nutze die Reihendarstellungen von e^x, $1/(1-x)$, $\ln(1-x)$, und differenzieren/integrieren von Potenzreihen.

2. [A 5.5] Sei X eine stetige ZV mit einer Verteilungsfunktion der Form

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{3}\,(x+1)^2 & -1 \le x \le 0 \\ c_1 + c_2\,x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2.

(b) Wie lautet die Dichte $f_X(x)$?

(c) Man stelle $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar.

(d) Man berechne $E(X)$.

3. [A 5.23] Die Fahrgäste einer Straßenbahnlinie (Länge ℓ) des Jahres 2006 steigen an einer zufälligen Stelle X im Intervall $[0, \ell]$ zu. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast den Triebwagen in einer kleinen Nachbarschaft von x besteigt, sei proportional zu $x(\ell - x)^2$. Das bedeutet, dass die Zufallsvariable X die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(\ell - x)^2 & 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

besitzt.

(a) Berechnen Sie die Konstante c.

(b) Stellen Sie die Dichte für $\ell = 1$ graphisch dar. An welcher Stelle ist die Dichte maximal?

(c) Bestimmen Sie $P_X(X \leq \frac{1}{2})$ für $\ell = 1$.

4. [A 6.8] Bei einem Glücksspiel habe die Zufallsvariable $X =$ *Auszahlung* folgende Verteilung:

$X = x$	$-c$	0	$c + d$	$c + 2d$	$c + 4d$
$P_X(X = x)$	0.7	0.2	0.04	0.03	0.03

(a) Man zeige, dass $E(X) < 0$, falls $c = 1$, $d = 2$. Wie lautet $Var(X)$?

(b) Sei

$$g(X) = \begin{cases} -1 & X < 0 \\ 0 & X = 0 \\ 1 & X > 0 \end{cases}.$$

Wie lauten $E(g(X))$ und $Var(g(X))$, falls weiterhin $c = 1$, $d = 2$?

(c) Für welche positiven Konstanten c und d gilt $E(X) = 0$?

5. [A 6.10] Das Café auf der Acconci–Insel hat maximal 120 Sitzplätze. Zu einer geschlossenen Veranstaltung werden 130 Personen eingeladen. Aus Erfahrung weiß man, dass im Mittel 10% der eingeladenen Personen nicht erscheinen.

(a) Sei $X=$ *Anzahl der eingeladenen Personen, die kommen.* Geben Sie die Verteilung von X an. Wie lauten $E(X), Var(X)$?

(b) Approximieren Sie die W!, dass alle Personen, die kommen, auch einen Sitzplatz erhalten. Verwenden Sie dazu die Normalverteilung.

(c) Wieviele Einladungen dürfen höchstens verschickt werden, damit die W! in (b) mindestens 0.95 beträgt?

6. [A 6.21] Der polnische Mathematiker BANACH war ein leidenschaftlicher Raucher. Damit er stets Zündhölzer bei sich hatte, trug er in zwei Taschen je eine Schachtel Zündhölzer, von denen er bei Bedarf zufällig ein Streichholz nahm. In die *rechte* Tasche griff er mit der Wahrscheinlichkeit p, in die *linke* Tasche mit der W $q = 1 - p$. An einem Tag steckte er zwei volle Schachteln in seine Taschen. In jeder Tasche waren n Zündhölzer. Es bezeichne P_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Moment, in dem er zum *erstenmal* eine der Schachteln leer gefunden hat, in der anderen noch k Zündhölzer waren.

(a) Man berechne P_k.

(b) Sei $p = q = \frac{1}{2}$. Bei welchem Wert von k wird P_k maximal?

7. [A 7.1] In einer Fabrik werden elektrische Widerstände maschinell gefertigt. Aufgrund längerer Beobachtungen weiß man, dass die von einer bestimmten Maschine produzierten Widerstände einen Mittelwert von $\mu = 152$ [Ohm] und eine Streuung von $\sigma = 2$ [Ohm] aufweisen und normalverteilt sind. Man benötigt nun eine größere Serie Widerstände von 150 Ohm mit den Toleranzen (Streuungen) ± 4 Ohm.

(a) Wie groß würde der mittlere Ausschußanteil, wenn man zur Produktion die Maschine mit $\mu = 152$ [Ohm] und $\sigma = 2$ [Ohm] benutzt? (D.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Widerstand außerhalb der Toleranzgrenze liegt?)

(b) Wie groß wäre der mittlere Ausschußanteil, wenn es gelänge, die Maschine bei gleicher Streuung auf den Mittelwert $\mu = 150$ [Ohm] einzustellen?

8. [A 7.5] In einem Büro ist der einzige Kopierer ausgefallen. Über die Zeit X (in Stunden) die ein Techniker benötigt, um den Kopierer zu reparieren, ist bekannt, dass diese einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 3$ folgt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Techniker

(a) höchstens eine Viertelstunde,

(b) zwischen 0.5 und 0.75 Stunden,

(c) mehr als 1 Stunde für die Reparatur benötigt.

(d) Wieviele Minuten benötigt der Techniker im Mittel?

Besprechungstermine:

Gruppe 1:	**Di. 24. 11. 2009**	**11:45 - 13:15**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe 2:	**Di. 24. 11. 2009**	**11:45 - 13:15**	**HS G**: DI Jirak
Gruppe 3:	**Di. 24. 11. 2009**	**14:15 - 15:45**	**HS B**: DI Jirak

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Moritz Jirak `m0ritz@yahoo.com`

Markus Zahrnhofer `markus.zahrnhofer@student.tugraz.at`

Markus Kügerl `kuegerl@student.TUGraz.at`

Brigitte Pfeiler `b.pfeiler@student.TUGraz.at`

Lisa Stadlmüller `lisa86@sbox.TuGraz.at`

Lösungen:

1. a) i) $c = 1/(e^2 - 1)$, ii) $c = 1$, iii) $c = 1/\ln(2)$ iv) $c = 6/\pi^2$

   b) i) $\frac{e^{2s}-1}{e^2-1}$, $ii) s/2 \frac{1}{1-s/2}$, $iii) - \ln(1 - s/2)/\ln(2)$, $iv) - \int_0^s \frac{\ln(1-x)}{x} dx$,

   c) i) $2e^2/(e^2 - 1)$, $ii) 2$, $iii) 1/(\ln(2))$, $iv) \infty$.

2. (a) $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{2}{3}$

   (b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ \frac{2}{3}(x+1) & -1 \leq x \leq 0 \\ c_2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x < \infty\,. \end{cases}$$

   (d) $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{9}$

3. (a) $c = \frac{12}{l^4}$

   (b) $x = \frac{1}{3}$

   (c) $\frac{11}{16}$.

4. (a) $\mathrm{Var}(X) = 4.21$

   (b) $E(g(X)) = -0.6$, $\mathrm{Var}(g(X)) = 0.44$

   (c) $c > 0$ und $d = \frac{30}{11} c$

5. (a) $P(X = k)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $p = 0.9$ $\mathbb{E}(X) = n0.9$, $Var(X) = n0.09$

   (b) $P\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{120-n0.9}{\sqrt{n0.09}}\right)$

   (c) 127

6. (a) $\binom{2n-k}{n} p^{n+1} q^{n-k} + \binom{2n-k}{n} q^{n+1} p^{n-k}$

   (b) $k \in \{0,1\}0$, $\max_{0\leq k\leq n} \binom{2n-k}{n} 2^k \in \{\binom{2n-1}{n} 2^1, \binom{2n}{n}\}$.

7. (a) $p = 0.16$

   (b) $p = 0.046$

8. (a) 0.5276

   (b) 0.1177

   (c) $\frac{1}{e^3}$

   (d) $\frac{1}{3}$