

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

ÜBUNGSBLATT 2

21. Nov. 2006

1. [A 5.3]

(a) Für welche Werte von c definieren die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_k = P_X(X = k)$ auf den positiven ganzen Zahlen $k = 1, 2, \dots$?

i. $p_k = c \frac{2^k}{k!}$ (modifizierte POISSON)

ii. $p_k = \frac{c}{2^k}$ (geometrisch)

(b) Bestimmen Sie die Erzeugenden Funktionen $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ der beiden Verteilungen.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$ für beide Verteilungen.

2. [A 5.5] Ein Würfel ist so verfälscht, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl proportional zu k ist ($k = 1, 2, \dots, 6$). X sei die *Augenzahl* beim Werfen dieses Würfels.

(a) Geben Sie die W-Funktion mittels einer Tabelle an.

(b) Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$.

(c) Berechnen Sie $P_X(3 \leq X \leq 6)$ und $P_X(-1 < X < 1)$.

3. [A 5.9] Eine stetige ZV X habe die folgende Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c & 0 \leq x \leq 1 \\ c/x^2 & 1 < x. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c und $P_X(X = 1)$, $P_X(\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2})$.

(b) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar.

4. [A 6.3] Beim Würfeln mit 2 Würfeln setzt der Spieler EUR 10.– ein. Er erhält EUR 10.– und seinen Einsatz zurück, wenn sich die Augenzahlen im Wert um 1 unterscheiden, und EUR 15.– und seinen Einsatz, wenn gleiche Augenzahlen erscheinen. Andernfalls bekommt der Spieler kein Geld zurück.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der ZV $X = \text{Gewinn}$ ($\text{Verlust} = -\text{Gewinn}$).

- (b) Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$.
 - (c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns, wenn nicht in EUR sondern in Schweizer Franken CHF ($10 \text{ EUR} = 14.7 \text{ CHF}$) gespielt wird.
 - (d) Bestimmen Sie den kleinsten Ereignisraum für eine sinnvolle Beschreibung dieses Spiels.
5. [A 6.7] Jemand hat n Schlüssel, mit denen er eine Tür zu öffnen versucht. Genau ein Schlüssel passt. Er probiert die Schlüssel unabhängig und zufällig aus. Man gebe die Wahrscheinlichkeitsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz der ZV $X := \text{Anzahl der Versuche}$ an,
- (a) falls *falsche Schlüssel nicht* ausgesondert werden,
 - (b) falls *falsche* Schlüssel ausgesondert werden.
6. [A 6.16] Eine regelmäßige Münze wird sooft geworfen, bis zum *ersten Mal Kopf* erscheint.
- (a) Man stelle das Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar.
 - (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: *Kopf erscheint nicht beim ersten Wurf.*
B: *Die Münze wird dreimal geworfen.*
 - (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nach einer *geraden* Anzahl von Würfen endet?
7. [A 7.5] Die Laufzeit T eines stochastischen Suchverfahrens auf einer Workstation werde als $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt angenommen. Weiters sei bekannt, dass die mittlere Laufzeit 100 [sec] beträgt.
- (a) Wie lautet der Parameter λ der Exponentialverteilung?
 - (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Lauf des Verfahrens i. genau 100 [sec], ii. zwischen 90 und 110 [sec] dauert?
 - (c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in ii., wenn bekannt ist, dass das Verfahren bereits 50 [sec] läuft?
8. [A 7.21] Ein Ferienhotel in einem renommierten Wintersportort hat einen Vertrag mit einem Reisebüro für ein Kontingent von 77 Betten. Aufgrund der großen Nachfrage nimmt das Reisebüro aber 80 Buchungen vor. Aus Erfahrung weiß man, dass im Mittel 5% der Reservierungen nicht in Anspruch genommen werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Hotel *mindestens einen Gast* wegen Überbuchung umquartieren muss.
- (a) Wie lautet die exakte Lösung?
 - (b) Benutzen Sie die POISSON-Verteilung als Annäherung.
 - (c) Welches Ergebnis liefert die Approximation durch die Normalverteilung?

Besprechungstermine:

Gruppe A: Di. 21. 11. 2006 10:45 - 13:00 HS G: Prof. Stadlober

Gruppe B: Di. 21. 11. 2006 13:00 - 14:30 HS B: Mag. Hörmann

Gruppe C: Di. 21. 11. 2006 14:45 - 16:15 HS B: Mag. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftlichen Mitarbeiter
oder an unsere Studienassistentinnen:

Mag. Siegfried Hörmann shoermann@TUGraz.at

Gordana Djuras gordana.djuras@joanneum.at

Verena Feirer vfeirer@sbox.TUGraz.at

DI Johannes Schauer johannes.schauer@TUGraz.at