Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

22. 11. 2005

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Familienname *Vorname* *Matrikelnummer*

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 2.Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. und 2. Übungsblatt:		☐	☐

1. **[A 4.20]** Ein *dreimotoriges* Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Ein *viermotoriges* Flugzeug stürzt ab, wenn auf einer Seite beide Motoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. 3P

   (a) Unter der Annahme der Unabhängigkeit für das Eintreten der Defekte an den einzelnen Flugzeugmotoren berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein *dreimotoriges* bzw. *viermotoriges* Flugzeug durch Motorversagen abstürzt.

   (b) Man stelle die beiden errechneten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p in einer Skizze dar.

2. **[A 4.22]** Gegeben sei ein Feld der Länge n auf das zufällig r Daten abgespeichert werden sollen (**Hash–Tabelle**). Eine Mehrfachbesetzung des selben Speicherplatzes nennt man *Kollision*. Die Wahrscheinlichkeit, dass *keine Kollision* stattfindet kann approximativ angegeben werden als $P_r = \exp(-r^2/(2n))$. Für $n = 1024,\ r = 37$ ergibt sich $P_r \approx 0.512$ (exakt:0.518). Für $n = 1024,\ r = 10$ erhält man $P_r \approx 0.952$ (exakt:0.957). 5P

   (a) Führen Sie das 1. Szenario ($n = 1024,\ r = 37$) in 8 Simulationsläufen mit $m = 250, 500, 1000$ und 2000 Wiederholungen durch, wobei die Integerzahl `j = random(n)+1` die belegte Zelle j angibt. Berechnen Sie $x_i = \#(\text{Belegungen ohne Kollision})/m$, deren Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$ und Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2)^{1/2}$. Definieren Sie einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den 8 Simulationsläufen mit 250 Wiederholungen, die 2. Simulationsserie aus den 8 Simulationsläufen mit 500 Wh. usw.).

   (b) Simulieren Sie das 2. Szenario ($n = 1024,\ r = 10$) analog zu (a).

   (c) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a) und (b) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P_r.

   Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe–Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 21. 11. 05., 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

   (a) Starten eines Ftp Programmes (freie Downloads z.B. unter: `http://www.thefreesite.com/Free_Software/FTP_freeware/`)

   (b) Name des Rechners eingeben: bs2.tugraz.at

   (c) Username: abgabe.stat

   (d) Password: WS05/06

   (e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter **/incoming/wthstoch**

3. [A 4.23] In einer Packung von 50 Glühbirnen befinden sich 5 defekte Glühbirnen. Man zieht zufällig 3 Stück. Stellen Sie dieses Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $\boxed{\text{4P}}$

(a) genau eine,

(b) mindestens eine,

(c) höchstens eine,

(d) genau zwei

defekte Glühbirne(n) in der Stichprobe unter der Annahme, dass

i. nach jedem Zug das gezogene Stück wieder zurückgelegt wird (*mit Zurücklegen*),

ii. dies nicht erfolgt (*ohne Zurücklegen*).

4. [A 5.11] Die Fahrgäste einer Straßenbahnlinie (Länge ℓ) steigen an einer zufälligen Stelle X im Intervall $[0, \ell]$ zu. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast den Triebwagen in einer kleinen Nachbarschaft von x besteigt, sei proportional zu $x(\ell - x)^2$. Das bedeutet, dass die Zufallsvariable X die Dichte $\boxed{\text{4P}}$

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(\ell - x)^2 & 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

(a) Berechnen Sie die Konstante c, die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und $E(X)$.

(b) Sei $\ell = 1$. Stellen Sie die Dichte $f_X(x)$ und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ graphisch dar. An welcher Stelle ist die Dichte maximal? Berechnen Sie numerisch (beispielsweise mit dem Newtonverfahren oder mit einem PC) den Median $x_{0.5}$, definiert durch $F_X(x_{0.5}) = 0.5$.

5. [A 6.4] Bei einem Glücksspiel habe die Zufallsvariable X = *Auszahlung* folgende Verteilung: $\boxed{\text{3P}}$

x	$-c$	0	$c+d$	$c+2d$	$c+4d$
$P(X = x)$	0.7	0.2	0.04	0.03	0.03

(a) Sei $c = 1$, $d = 2$. Man zeige, dass $E(X) < 0$. Wie lautet $Var(X)$?

(b) Sei

$$g(X) = \begin{cases} -1 & X < 0 \\ 0 & X = 0 \\ 1 & X > 0 \end{cases}.$$

Wie lauten $E(g(X))$ und $Var(g(X))$?

(c) Für welche positiven Konstanten c und d gilt $E(X) = 0$?

6. [A 6.8] Aus einem Fischteich mit N Fischen werden 1000 Fische entnommen, gekennzeichnet und wieder ausgesetzt. Nach einiger Zeit wird eine neue Stichprobe von 1000 Fischen entnommen; unter diesen befinden sich 100 gekennzeichnete Fische. 3P

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{100}, 100 *gekennzeichnete Fische* zu fangen, in Abhängigkeit von N?

(b) Für welches N wird P_{100} maximal?

7. [A 7.6] Interpretiert man eine stetige Zufallsvariable $T \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $F_T(t)$ und Dichte $f_T(t)$ als *Lebensdauer* eines Systems, so heißt 4P

$$a(t) := \frac{1}{1 - F_T(t)} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

Ausfallrate (hazard rate) des Systems. $a(t) \cdot \Delta t$ ist also eine Näherung für die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitraum $(t, t + \Delta t]$ ausfällt, wenn es zum Zeitpunkt t noch intakt war. Berechnen Sie die Ausfallraten $a(t)$ für

(a) eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(b) eine *Weibull–verteilte* Zufallsvariable T mit Parametern $s > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t^s) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(c) eine *Hjorth–verteilte* Zufallsvariable T mit den Parametern $q > 0$, $r > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{\exp(-r \cdot t^2/2)}{(1+q \cdot t)^{\lambda/q}} & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

8. [A 7.7] In der Telefonzentrale der TU Graz ist die Zeitspanne T [in min] zwischen zwei Anrufen *exponentialverteilt* mit Parameter λ, wobei pro Stunde durchschnittlich 150 Anrufe eintreffen und die Anzahl X der *Anrufe pro Zeiteinheit* POISSON–verteilt ist. 4P

(a) Wie groß ist λ? Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft in den nächsten 30 Sekunden kein Anruf ein?

(b) Wir nehmen an, dass der letzte Anruf vor s Minuten einlangte. Zeigen sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten t Minuten ein Anruf eintrifft nicht von s abhängt. (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 20 Minuten zwischen 40 und 60 Anrufe kommen?

(d) Die Vermittlung ist überlastet, falls mehr als k Anrufe in 1 Minute eintreffen. Für welches k ist die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung kleiner als 0.05?

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{30\text{ P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 22.11.2005, 10:45 Uhr** im HS G.

Besprechungstermine:

Gruppe A:	**Di. 22. 11. 2005**	**10:45 - 13:00**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe B:	**Di. 22. 11. 2005**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: Mag. Hörmann
Gruppe C:	**Di. 22. 11. 2005**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: Mag. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unseren Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Mag. Siegfried Hörmann `shoermann@TUGraz.at`

Gordana Djuras `g.djuras@TUGraz.at`

Verena Feirer `vfeirer@sbox.TUGraz.at`

Johannes Schauer `schauer@sbox.TUGraz.at`