Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

23. 11. 2004

Familienname(n) *Vorname(n)* *Matr.nr(n)/Ü.gr.*

Bitte bei Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 2. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. und 2. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 4. 16] A und B seien Ereignisse aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Man zeige, dass für $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ folgendes gilt: $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

(a) Sind A und B *disjunkte* Mengen, dann sind A und B *abhängig*.

(b) Sind A und B *unabhängig*, dann sind A und B *nicht disjunkt*.

(c) Wann sind A und B *disjunkt* und *unabhängig*?

2. [A 4. 22] Gegeben sei ein Feld der Länge n auf das zufällig r Daten abgespeichert werden sollen (**Hash–Tabelle**). Eine Mehrfachbesetzung des selben Speicherplatzes nennt man *Kollision*. Die Wahrscheinlichkeit, dass *keine Kollision* stattfindet kann approximativ angegeben werden als $P_r = \exp(-r^2/(2n))$. Für $n = 1024$, $r = 37$ ergibt sich $P_r \approx 0.512$ (exakt: 0.522). Für $n = 1024$, $r = 10$ erhält man $P_r \approx 0.952$ (exakt: 0.957). $\boxed{6\ \mathrm{P}}$

(a) Führen Sie das 1. Szenario ($n = 1024$, $r = 37$) in 8 Simulationsläufen mit $m = 250, 500, 1000$ und 2000 Wiederholungen durch, wobei die Integerzahl `j = random(n)+1` die belegte Zelle j angibt. Berechnen Sie $x_i = \#(\text{Belegungen ohne Kollision})/m$, deren Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$ und Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2)^{1/2}$. Definieren Sie einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den 8 Simulationsläufen mit 250 Wiederholungen, die 2. Simulationsserie aus den 8 Simulationsläufen mit 500 Wh. usw.).

(b) Simulieren Sie das 2. Szenario ($n = 1024$, $r = 10$) analog zu (a).

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a) und (b) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P_r.

Hinweis 1: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die **Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile mit Interpretation (2c))** bis **Montag, den 22.11.03, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)

(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at

(c) Username: abgabe

(d) Passwort: WS04/05

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen max. 8 Zeichen - ein Name bei einer 2-er Gruppe reicht) unter **/incoming/wthstoch**.

Hinweis 2: Falls nur das Prorammierbeispiel berechnet wird, bitte entweder das Deckblatt mit angekreuztem Beispiel 2 abgeben oder ein Mail an die StudienassistInnen richten.

3. [A 4. 18] Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse: $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

A — die zuerst geworfene Münze zeigt das Wappen,

D — es erscheint wenigstens ein Wappen,

E — es erscheint wenigstens eine Zahl,

F — die zweite Münze zeigt das Wappen.

(a) Man bestimme, ob die folgenden Paare von Ereignissen unabhängig sind. (a) A und E; (b) A und F; (c) D und E; (d) D und F.

(b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse und für jedes Paar die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

4. [A 5. 2] $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

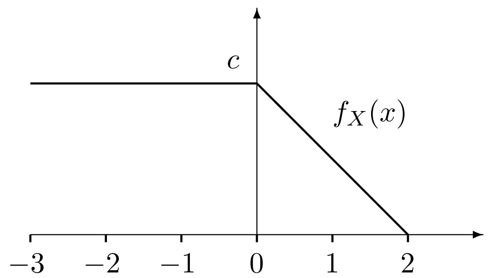
(a) Man zeige, dass

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0\,, \\ \frac{(x+1)}{\lambda(\lambda+1)}\, e^{-x/\lambda} & x > 0\,, \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ eine Dichte definiert.

(b) Man bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz.

5. [A 5. 7] Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X habe folgenden Graphen $\boxed{4\ \mathrm{P}}$



(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie $P_X(-\frac{3}{2} \le X \le -\frac{1}{2})$ und $P_X(0 < X < \infty)$.

(c) Geben Sie die Dichtefunktion $f_X(x)$ formelmäßig an.

(d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

6. [A 6. 10] Eine Zufallsvariable X besitzt eine *negative Binomialverteilung von der Ordnung* r ($r \in \mathbb{N}$), wenn sie die Werte k ($k = 0, 1, \dots$) mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P_X(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k \quad (k = 0, 1, \dots; r \geq 1 \text{ fest})$$

annimmt, wobei $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ ist. 4 P

(a) Man zeige, dass P_X eine W–Funktion darstellt.

(b) Wie lautet die Erzeugende Funktion $G_X(s)$?

(c) Man berechne $E(X)$ und $Var(X)$ mit Hilfe der Erzeugenden Funktion.

(Eventuell auftretende Reihen sind auszurechnen.)

7. [A 6. 12] Ein Würfel wird so oft geworfen, bis das Ereignis $A =$ *Summe der Augenzahl* ≥ 4 eintritt. Man bestimme die Verteilung der Zufallsvariablen $X =$ *Anzahl der Versuche bis zum Eintreffen von A* mit Hilfe eines W–Baumes, falls 4 P

(a) der Würfel regelmäßig ist ($p_i = \frac{1}{6}$),

(b) der Würfel verfälscht ist mit $p_i = \frac{i}{21}$, $i = 1, \dots, 6$.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ für den regelmäßigen und den verfälschten Würfel.

8. [A 7. 10] Die Zufallsvariable X sei 3 P

(a) diskret gleichverteilt auf $\{4, 5, 6, 7\}$,

(b) stetig gleichverteilt in $[3, 10]$,

(c) exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$,

(d) normalverteilt mit $\mu = 5$ und $\sigma = 1$.

Man berechne jeweils $P_X(0 < X \leq 5)$, $P_X(6 \leq X < 10)$, sowie $E(X)$ und $Var(X)$.

Maximal erreichbare Punkteanzahl 30 P

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 23.11.2004 11 Uhr** in HS G oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1 :	**Di. 23. 11. 2004**	**11:00 - 12:30**	**HS G**: UProf. Stadlober
Gruppe 2 :	**Di. 23. 11. 2004**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: DI Kern
Gruppe 3 :	**Di. 23. 11. 2004**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere StudienassistentInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`

Johannes Poglitsch `pogo@sbox.TUGraz.at`

Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`